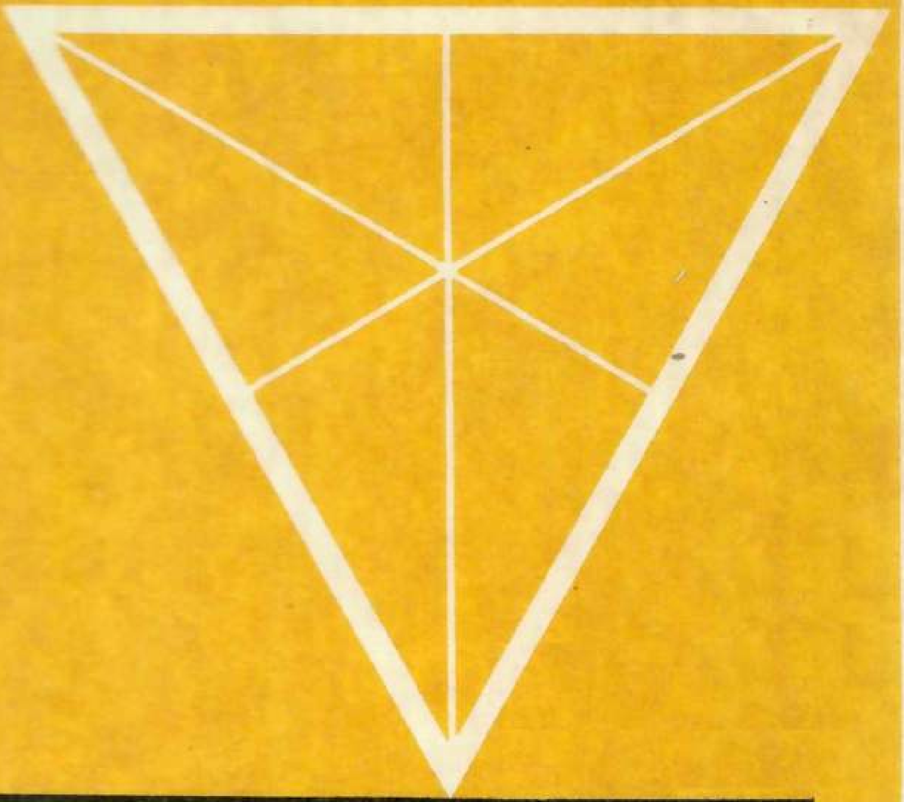
Геометрия

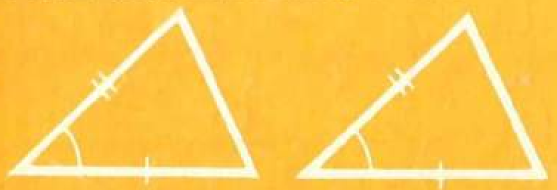
А.В. Погорелов



7-11

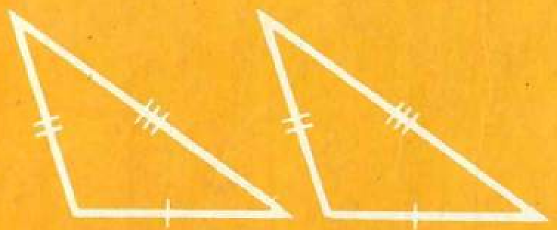
Геометрия
А.В. Погорелов
7-11

ӨЧПОЧМАКЛАРНЫҢ ТИГЕЗЛЕК БИЛГЕЛӘРЕ



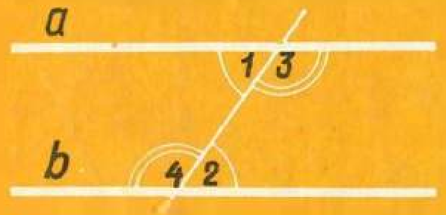
1. ИКЕ ЯГЫ ҺӘМ АЛАР АРАСЫНДАГЫ ПОЧМАГЫ БУЕНЧА

2. БЕР ЯГЫ ҺӘМ ШУЛ УК ЯНЫНДАГЫ ПОЧМАКЛАРЫ БУЕНЧА



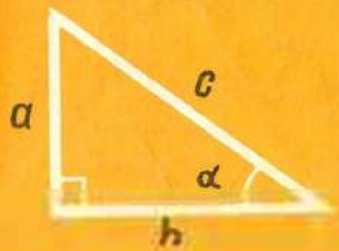
3. ӨЧ ЯГЫ БУЕНЧА

ТУРЫЛАРНЫҢ ПАРАЛЛЕЛЬЛЕК БИЛГЕЛӘРЕ



$a \parallel b$, әгәр:
$\angle 1 = \angle 2$ ($\angle 3 = \angle 4$) булса,
яки
$\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$
($\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$)

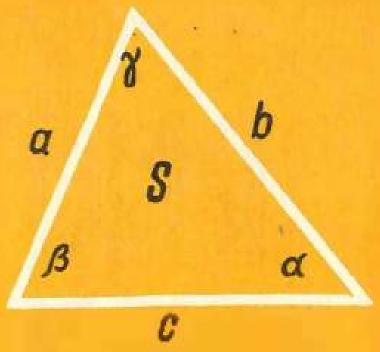
ТУРЫПОЧМАКЛЫ ӨЧПОЧМАКТА БӘЙЛӘНЕШЛӘР



$a^2 + b^2 = c^2$ (ПИФАГОР ТЕОРЕМАСЫ)

$a = c \sin \alpha,\ b = c \cos \alpha,\ a = b \operatorname{tg} \alpha$

ИРЕКЛЕ ӨЧПОЧМАКТА БӘЙЛӘНЕШЛӘР



$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

(СИНУСЛАР ТЕОРЕМАСЫ)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

(КОСИНУСЛАР ТЕОРЕМАСЫ)

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{где} \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

(ГЕРОН ФОРМУЛАСЫ)

КАМАУЧЫ ӘЙЛӘНӘ РАДИУСЫ $R = \frac{abc}{4S}$

КАМАУЛЫ ӘЙЛӘНӘ РАДИУСЫ $r = \frac{2S}{a+b+c}$

КАЙБЕР ПОЧМАКЛАР СИНУСЫ, КОСИНУСЫ ҺӘМ ТАНГЕНСЫНЫҢ КЫЙММӘТЛӘРЕ

функцияләр	почмаклар					
	0°	30°	45°	60°	90°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0

А.В.Погорелов

ГЕОМЕТРИЯ

УРТА МӘКТӘПНЕҢ 7—11 НЧЕ СЫЙНЫФЛАРЫ ӨЧЕН ДӘРЕСЛЕК

Россия Федерациясе Мәгариф министрлыгы тарафыннан расланган

Тәрҗемә Татарстан Республикасы Мәгариф министрлыгы тарафыннан расланган

ҚАЗАН «МӘГАРИФ» НӘШРИЯТЫ 1996

ББК 22.151я72
П52

А. В. Погорелов

Геометрия: Учеб. для 7—11 кл. сред. шк.— М.: «Просвещение», 1993.

СССР ФӘННӘР АКАДЕМИЯСЕНЕҢ МАТЕМАТИКА БҮЛЕГЕ БЮРОСЫ, СССР ПЕДАГОГИЯ ФӘННӘРЕ АКАДЕМИЯСЕ ПРЕЗИДИУМЫ ТАРАФЫННАН РАСЛАНГАН

Дәреслек гомуми урта белем бирү мәктәпләре өчен математика дәреслекләренең Бөтенсоюз конкурсында призлы урын алды

Погорелов А. В.

П52 Геометрия: Урта мәктәпнең 7—11 сыйныфлары өчен дәреслек / Русчадан Ф. С. Шәйхәйдәрова, З. Г. Мортазин һәм З. Х. Билалова тәрж.— Казан: Мәгариф, 1996.— 399 б.: рәс. белән.
ISBN 5-7761-0320-7

П $\frac{4306020502-013}{\text{П86(03)}-96}$ БЗ—62—37—96/97 **ББК 22.151я72**

ISBN 5-7761-0320-7

© Погорелов А. В., 1990
© Шәйхәйдәрова Ф. С., Мортазин З. Г., Билалова З. Х., тәрҗемә, 1992

7 нче сыйныф

ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. ИҢ ГАДИ ГЕОМЕТРИК ФИГУРАЛАРНЫҢ ТӨП ҮЗЛЕКЛӘРЕ

1. ГЕОМЕТРИК ФИГУРАЛАР

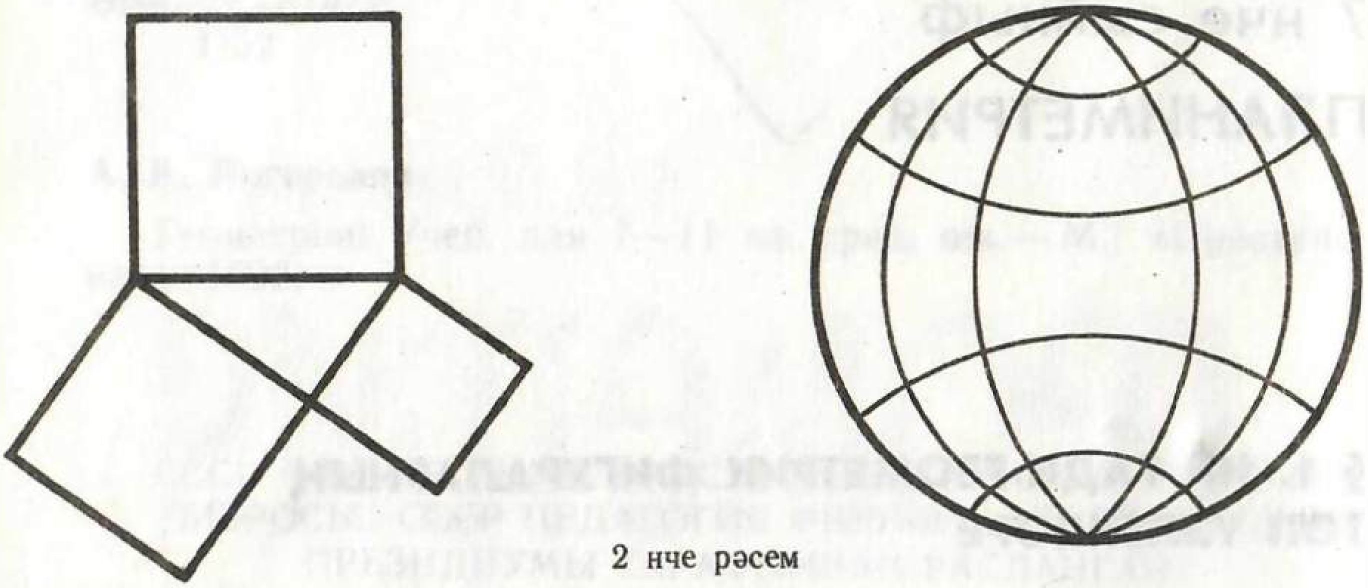
Геометрия — ул геометрик фигураларның үзлекләрен өйрәнә торган фән. «Геометрия» — грек сүзе, татарчага тәрҗемәсе «җир үлчәү»не аңлата. Болай атау геометрияне җир өстендә үлчәүләр өчен куллану белән бәйләнгән.

Геометрик фигураларга мисаллар китерик: өчпочмак, квадрат, әйләнә (1 нче рәсем).

Геометрик фигуралар шактый күптөрле. Теләсә нинди геометрик фигураның өлеше геометрик фигура була. Берничә геометрик фигураның берләшмәсе дә геометрик фигура. 2 нче рәсемдә сурәтләнгән фигураларның сул яктагысы өчпочмак һәм өч квадраттан, ә уң яктагысы әйләнә һәм әйләнә өлешләреннән тора. Без теләсә нинди геометрик фигураны нокталардан төзелгән дип күз алдына китерәбез.

Геометрия тормышта бик киң кулланыла. Аны эшче дә, инженер, архитектор һәм художник та белергә тиеш. Кыскасы, геометрияне барыбызга да белергә кирәк.

1 нче рәсем



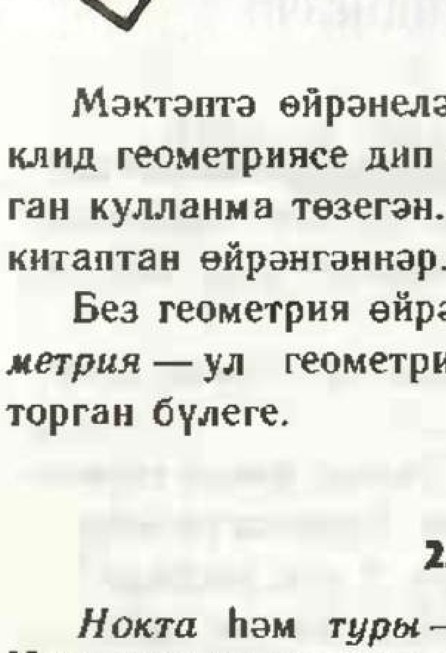
2 нче рәсем

Мәктәптә өйрәнелә торган геометрия Евклид хөрмәтенә Евклид геометриясе дип атала. Евклид «Башлангычлар» дип аталган кулланма төзегән. Күп еллар дәвамында геометрияне шушы китаптан өйрәнгәннәр.

Без геометрия өйрәнүне планиметриядән башлыйбыз. *Планиметрия* — ул геометриянең яссылыктагы фигураларны өйрәнә торган бүлеге.

2. НОКТА ҺӘМ ТУРЫ

Нокта һәм *туры* — яссылыктагы төп геометрик фигуралар. Нокталарны латинча баш хәрефләр белән билгеләү кабул ителгән: A, B, C, D, ... Турылар латинча юл хәрефләре белән билгеләнә: a, b, c, d, ...

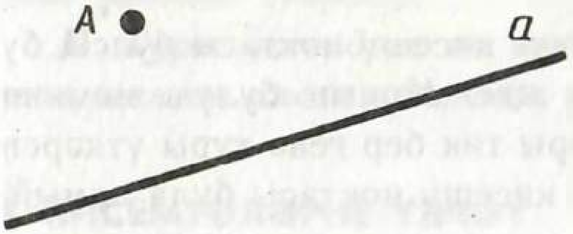


Евклид борынгы грек галиме (безнең эрага кадәр III гасыр)

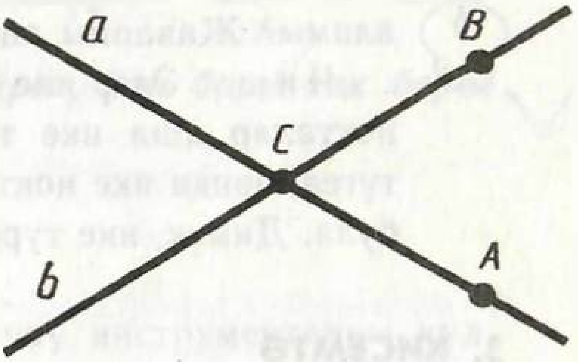
3 нче рәсемдә сез A ноктасын һәм a турысын күрәсез.

Туры — ул чиксез. Рәсемдә без турының бер өлешен генә күрсәтәбез, ләкин без аны ике якка да чиксез дәвам ителгән дип күз алдына китерәбез.

4 нче рәсемне карагыз. Анда a, b турылары һәм A, B, C нокталары бар. A һәм C нокталары a турысы өстендә *ята*. A һәм C нокталары a туры-



3 нче рәсем

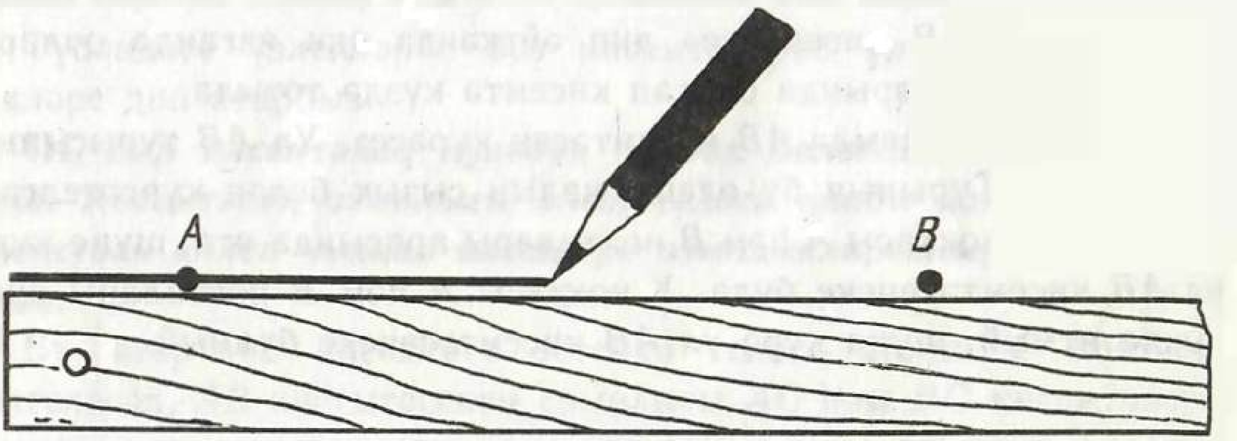


4 нче рәсем

сыныкы яки *a* турысы *A* һәм *C* нокталары аша *уза* дип тә әйтергә мөмкин.

B ноктасы *b* турысы өстендә ята. Ул *a* турысы өстендә ятмый. *C* ноктасы *a* турысы өстендә дә, *b* турысы өстендә дә ята. *a* һәм *b* турылары *C* ноктасында *кисешәләр.* *C* ноктасы *a* һәм *b* турыларының *кисешү ноктасы* була.

5 нче рәсемдә сез бирелгән *A* һәм *B* нокталары аша үтүче турыны линейка ярдәмендә ничек итеп төзергә икәнен күрәсез.



5 нче рәсем

Яссылыктагы нокта һәм турыларның берсе икенчесенеке булуның төп үзлекләре дип без түбәндәге үзлекләрне атарбыз:

I. ***Теләсә нинди туры өчен аныкы булган һәм аныкы булмаган нокталар бар.***

Теләсә нинди ике нокта аша туры үткәрергә мөмкин, һәм бары тик берне генә.

Турыны аның өстендә яткан ике нокта белән тамгаларга мөмкин. Мәсәлән, 4 нче рәсемдәге *a* турысын *AC*, ә *b* турысын *BC* дип тамгаларга була.

Мәсьәлә (3)[1]. Ике турының ике кисешү ноктасы була аламы? Җавапны аңлатыгыз.

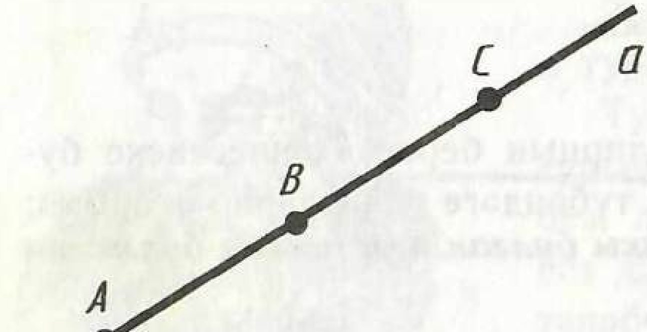
Чишү. Әгәр ике турының ике кисешү ноктасы булса, бу нокталар аша ике туры узар иде. Моның булуы мөмкин түгел, чөнки ике нокта аша бары тик бер генә туры үткәреп була. Димәк, ике турының ике кисешү ноктасы була алмый.

3. КИСЕМТӘ

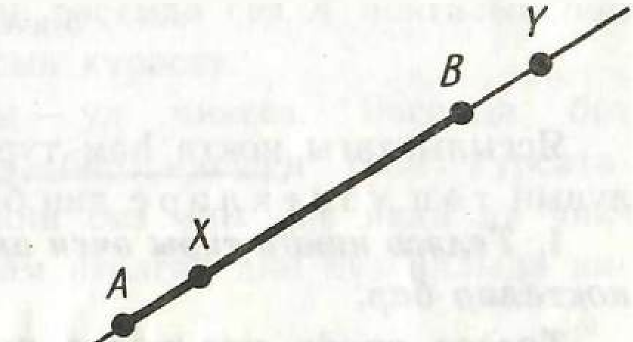
6 нчы рәсемгә карагыз. Сез *a* турысын һәм бу туры өстендә *A*, *B*, *C* нокталарын күрәсез. *B* ноктасы *A* һәм *C* нокталары *арасында* ята, ул *A* һәм *C* нокталарын аера. Шулай ук *A* һәм *C* нокталары *B* ноктасыннан *төрле якларда яталар* дип тә әйтергә мөмкин. *B* һәм *C* нокталары *A* ноктасыннан бер үк якта яталар, аларны *A* ноктасы аермый. *A* һәм *B* нокталары *C* ноктасыннан бер үк якта яталар.

Турының бирелгән ике ноктасы арасында яткан барлык нокталарыннан торган өлеше ***кисемтә*** дип атала. Бирелгән нокталар ***кисемтәнең очлары*** дип аталалар. Кисемтә үзенең очлары белән тамгалана. «*AB* кисемтәсе» дип әйткәндә яки язганда очлары *A* һәм *B* нокталарында булган кисемтә күздә тотыла.

Сез 7 нче рәсемдә *AB* кисемтәсен күрәсез. Ул *AB* турысының бер өлеше. Турының бу өлеше калын сызык белән күрсәтелгән. Турының *X* ноктасы *A* һәм *B* нокталары арасында ята, шуңа күрә ул *AB* кисемтәсенеке була. *Y* ноктасы *A* һәм *B* нокталары арасында ятмый, шуңа күрә ул *AB* кисемтәсенеке булмый.



6 нчы рәсем



7 нче рәсем

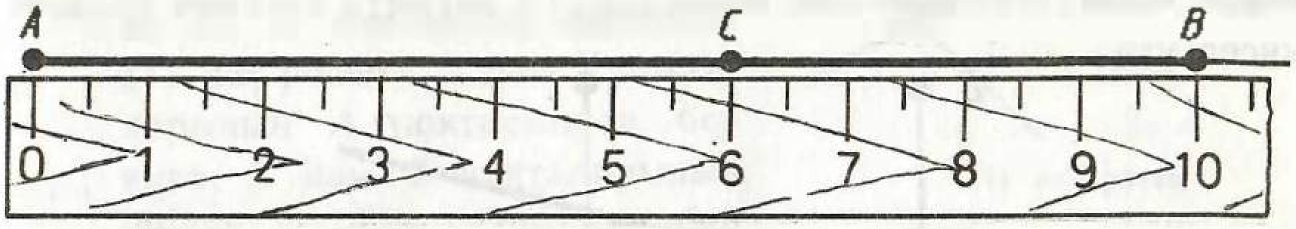
[1] Җәя эчендәге сан мәсьәләнең параграф ахырында бирелгән мәсьәләләр исемлегендәге номерын күрсәтә.

Туры өстендә нокталар торышының төп үзлеге дип без түбәндәге үзлекне атарбыз:

II. ***Туры өстендәге өч ноктаның берсе, һәм бары тик берсе генә, калган икесе арасында ята.***

4. КИСЕМТӘЛӘРНЕ ҮЛЧӘҮ

Кисемтәләрне үлчәү өчен төрле үлчәү инструментлары кулланыла. Шундый инструментларның иң гадие — бүлемле линейка. 8 нче рәсемдәге AB кисемтәсе 10 см га тигез, AC кисемтәсе 6 см га, ә BC кисемтәсе 4 см га тигез. AB кисемтәсенең озынлыгы AC һәм BC кисемтәләренең озынлыклары суммасына тигез.



8 нче рәсем

Түбәндәге үзлекләрне без кисемтәләрне үлчәүнең төп үзлекләре дип атарбыз:

III. ***Һәр кисемтәнең нульдән зуррак билгеле бер озынлыгы була. Кисемтәнең озынлыгы аның теләсә нинди ноктасы белән бүленүдән килеп чыккан өлешләре озынлыкларының суммасына тигез.***

Бу, әгәр AB кисемтәсе өстендә теләсә нинди C ноктасы билгеләсәк, AB кисемтәсенең озынлыгы AC һәм BC кисемтәләре озынлыкларының суммасына тигез дигән сүз. AB кисемтәсенең озынлыгын шулай ук A һәм B нокталары арасындагы ераклык дип атыйлар.

Мәсьәлә (9). Өч нокта: A, B, C бер туры өстендә ята. $AB = 4{,}3$ см, $AC = 7{,}5$ см, $BC = 3{,}2$ см икәнлеге билгеле. A ноктасы B һәм C нокталары арасында ятармы? C ноктасы A һәм B нокталары арасында ятармы? A, B, C нокталарының кайсысы калган икесе арасында ята?

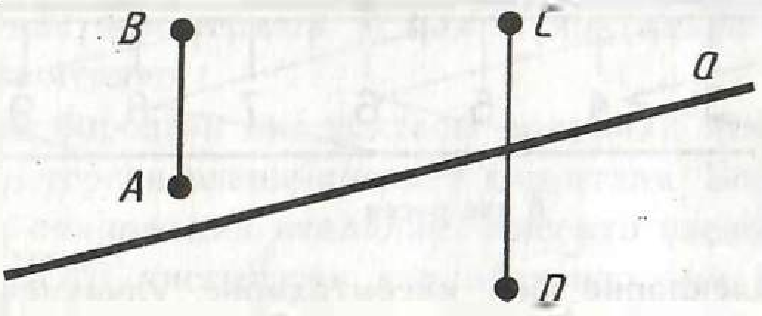
Чишү. Әгәр A ноктасы B һәм C нокталары арасында ятса, кисемтәләрне үлчәү үзлеге буенча $AB + AC = BC$ булырга тиеш. Ләкин $4{,}3 + 7{,}5 \neq 3{,}2$. Димәк, A ноктасы B һәм C арасында ятмый.

Әгәр C ноктасы A һәм B нокталары арасында ятса, $AC+BC=AB$ булырга тиеш, ләкин $7{,}5+3{,}2\neq4{,}3$. Димәк, C ноктасы A һәм B нокталары арасында ятмый.

Туры өстендәге өч нокта: A, B, C ның берсе калган икесе арасында ята. Димәк, ул нокта B була.

5. ЯРЫМЪЯССЫЛЫКЛАР

9 нчы рәсемне карагыз. a турысы яссылыкны ике ярымъяссылыкка *булә*. Бу бүлү түбәндәге үзлеккә ия. Әгәр нинди дә булса кисемтәнең очлары бер үк ярымъяссылыкныкы булсалар, ул вакытта кисемтә туры белән кисешми. Әгәр кисемтәнең очлары төрле ярымъяссылыкныкы булсалар, ул вакытта кисемтә турыны кисеп үтә.



9 нчы рәсем

9 нчы рәсемдә A һәм B нокталары a турысы яссылыкны бүлгәндә барлыкка килгән ярымъяссылыкларның берсендә ята. Шуңа күрә AB кисемтәсе a турысы белән кисешми. C һәм D нокталары төрле ярымъяссылыкларда яталар. Шуңа күрә CD кисемтәсе a турысын кисеп үтә.

Яссылыкта нокталарның турыга карата торышының төп үзлеге дип без түбәндәге үзлекне атарбыз:

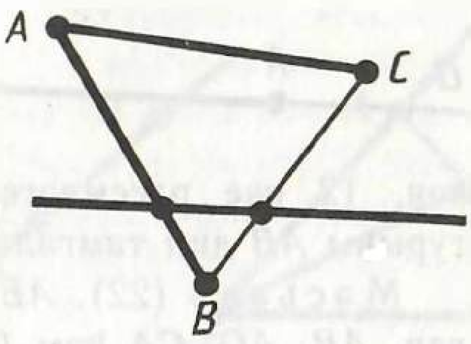
IV. *Туры яссылыкны ике ярымъяссылыкка булә.*

Мәсьәлә (17). Туры һәм бу туры өстендә ятмый торган өч нокта: A, B, C бирелгән. AB кисемтәсенең туры белән кисешүе, ә AC кисемтәсенең туры белән кисешмәве билгеле. BC кисемтәсе туры белән кисешерме? Җавапны аңлатыгыз.

Чишү. Туры яссылыкны ике ярымъяссылыкка бүлә (10 нчы рәсем). A ноктасы шул ярымъяссылыкларның кайсы да булса берсенеке. AC кисемтәсе туры белән кисешми. Димәк, C ноктасы A ноктасы яткан ярымъяссылыкта ята.

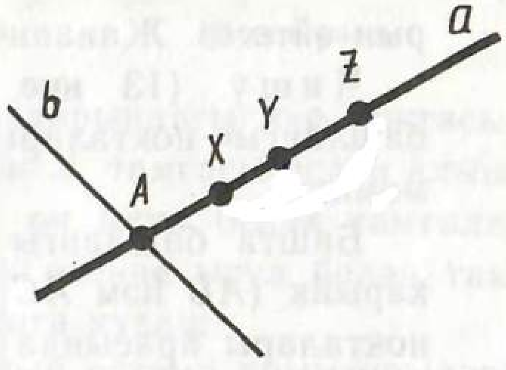
AB кисемтәсе турыны кисеп үтә. Димәк, *B* ноктасы икенче ярымъяссылыкта ята.

Шулай булгач, *B* һәм *C* нокталары төрле ярымъяссылыкларда яталар. Ә бу *BC* кисемтәсе бирелгән турыны кисеп үтә дигән сүз.



10 нчы рәсем

6. ЯРЫМТУРЫ



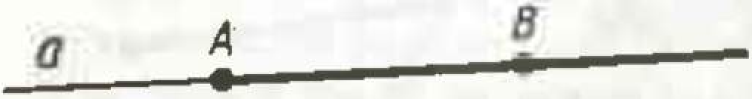
11 нче рәсем

Мәсьәлә (20). *a* турысы һәм шул туры өстендә ятучы *A*, *X*, *Y*, *Z* нокталары бирелгән (11 нче рәсем). *X* һәм *Y* нокталарының *A* ноктасыннан бер якта, *X* һәм *Z* нокталарының шулай ук *A* ноктасыннан бер якта ятканлыгы билгеле. *Y* һәм *Z* нокталары *A* ноктасына карата ничек урнашкан: бер үк яктамы, әллә төрле яктамы? Җавапны аңлатыгыз.

Чишү. *A* ноктасы аша, *a* турысыннан үзгә булган, нинди дә булса *b* турысы үткәрәбез. Ул яссылыкны ике ярымъяссылыкка бүлә. *X* ноктасы шул ярымъяссылыкларның берсенеке. *Y* һәм *Z* нокталары да шул ук ярымъяссылыкта ята, чөнки *XY* һәм *XZ* кисемтәләре *b* турысы белән кисешми. *Y* һәм *Z* нокталары бер үк ярымъяссылыкта ятканлыктан, *YZ* кисемтәсе *b* турысы белән кисешми, димәк, *A* ноктасы *YZ* кисемтәсенеке була алмый. Ягъни *Y* һәм *Z* нокталары *A* ноктасыннан бер якта яталар.

Турының бирелгән ноктасыннан бер үк якта ятучы барлык нокталарыннан торган өлеше *ярымтуры* яки *нур* дип атала. Бу нокта ярымтурының *башлангыч ноктасы* дип атала. Бер үк турының башлангыч нокталары уртак булган төрле ярымтурылар *өстәмә* ярымтурылар дип атала.

Турылар кебек үк, ярымтурылар да латинча юл хәрефләре белән билгеләнә. Ярымтурыны ике нокта: башлангыч һәм ярымтурыныкы булган тагын ниндидер нокта белән тамгаларга мөмкин. Бу очракта башлангыч нокта беренче урынга куела.



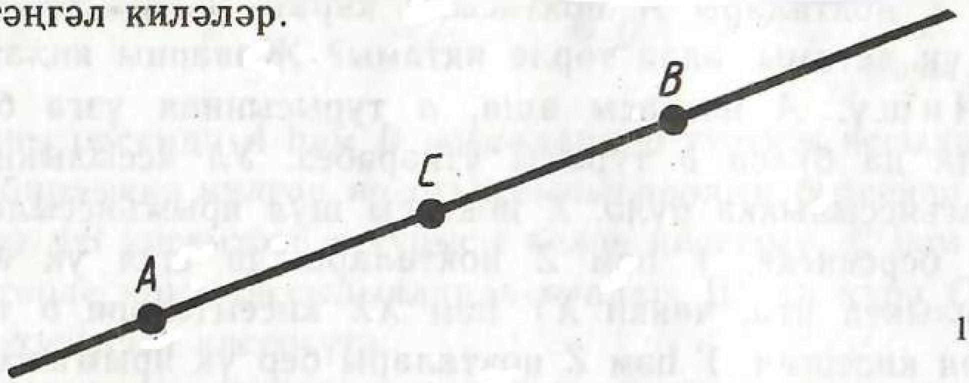
12 нче рәсем

Мәсәлән, 12 нче рәсемдәге калын сызык белән күрсәтелгән ярымтурыны *AB* дип тамгаларга мөмкин.

М ә с ь ә л ә (22). *AB* кисемтәсе өстендә *C* ноктасы алынган. *AB*, *AC*, *CA* һәм *CB* ярымтурылары арасында тәңгәл килгән ярымтурылар һәм өстәмә ярымтурыларның парларын әйтегез. Җавапны аңлатыгыз.

Ч и ш ү (13 нче рәсем). Бирелгән ярымтурыларның башлангыч нокталары я *A* ноктасы, яки *C* ноктасы булырга мөмкин.

Башта башлангыч ноктасы *A* булган ярымтурыларны карыйк (*AB* һәм *AC* ярымтурылары). *C* ноктасы *A* һәм *B* нокталары арасында ята, чөнки мәсьәләнең шарты буенча ул *AB* кисемтәсенеке. Димәк, *A* ноктасы *B* һәм *C* нокталары арасында ятмый, ягъни *B* һәм *C* нокталары *A* ноктасыннан бер якта яталар. Шуңа күрә *AB* һәм *AC* ярымтурылары тәңгәл киләләр.



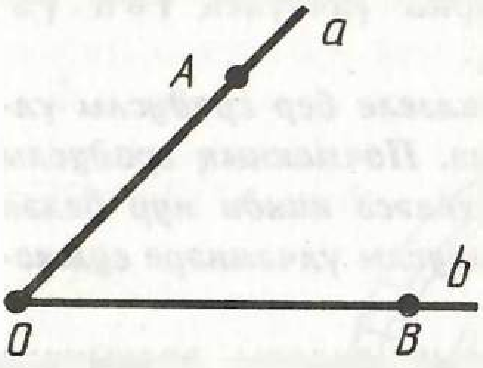
13 нче рәсем

Хәзер инде башлангыч ноктасы *C* булган ярымтурыларны (*CA* һәм *CB* ярымтурыларын) карыйк. *C* ноктасы *A* һәм *B* нокталарын аера. Шуңа күрә *A* һәм *B* нокталары бер ярымтурыныкы була алмыйлар, димәк, *CA* һәм *CB* ярымтурылары өстәмә булалар.

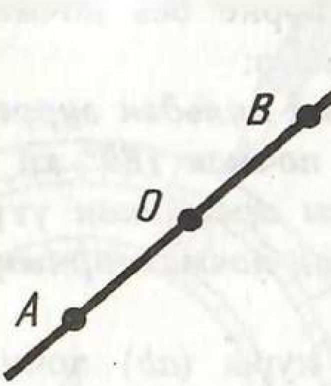
7. ПОЧМАК

Бер ноктадан һәм шул ноктадан чыккан төрле ике ярымтурыдан торган фигура *почмак* дип атала. Ул нокта почмакның *түбәсе* дип, ә ярымтурылар *почмакның яклары* дип атала.

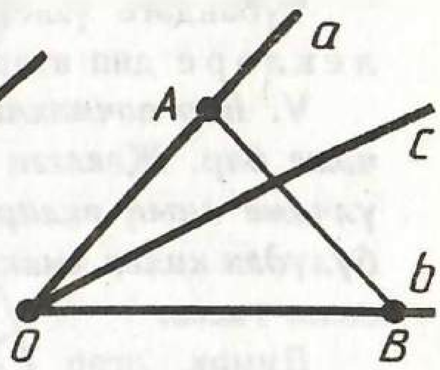
14 нче рәсемдә сез түбәсе *O* һәм яклары *a*, *b* булган почмакны күрәсез. Почмакны тамгалаганда я түбәсен, я якларын,



14 нче рәсем



15 нче рәсем



16 нчы рәсем

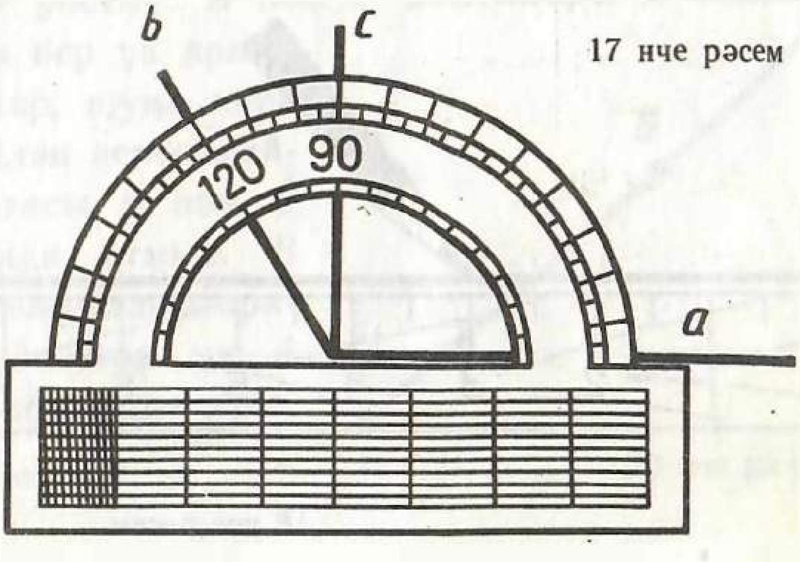
я өч ноктасын: түбәсе һәм почмак якларындагы ике ноктасын күрсәтәләр. Кайвакытта «почмак» сүзен ∠ тамгасы белән алыштыралар. 14 нче рәсемдәге почмакны өч ысул белән тамгалап була: $\angle O$, $\angle(ab)$, $\angle AOB$. Почмакны өченче ысул белән тамгалаганда түбәне күрсәтүче хәреф уртага куела.

Әгәр почмакның яклары бер турының өстәмә ярымтурылары булып торса, андый почмак *җәелгән почмак* дип атала. 15 нче рәсемдә сез түбәсе O һәм яклары OA һәм OB булган җәелгән почмакны күрәсез.

Әгәр нур почмак түбәсеннән чыкса һәм очлары почмакның якларында ятучы нинди дә булса кисемтәне кисеп үтсә, без нур бирелгән почмакның яклары *арасыннан* уза дип әйтербез. 16 нчы рәсемдә c нуры (ab) почмагының яклары арасыннан үтә, чөнки ул (ab) почмагының түбәсеннән чыга һәм очлары шул почмак якларындагы AB кисемтәсен кисеп үтә.

Җәелгән почмакның түбәсеннән чыгучы һәм аның якларыннан үзгә булган теләсә нинди нурны без аның яклары арасыннан уза дип исәплибез.

Почмаклар транспортир ярдәмендә градусларда үлчәнә. 17 нче рәсемдә (ab) почмагы 120° ка тигез. c ярымтурысы (ab) почмагының яклары арасыннан уза. (ac) почмагы 90° ка тигез, ә (bc) почмагы 30° ка тигез. (ab) почмагы (ac) һәм (bc) почмакларының суммасына тигез.



17 нче рәсем

Түбәндәге үзлекләрне без почмакларны үлчәүнең төп үзлекләре дип атарбыз:

V. Һәр почмакның нульдән зуррак билгеле бер градуслы үлчәме бар. Җәелгән почмак 180° ка тигез. Почмакның градуслы үлчәме аның яклары арасыннан үтүче теләсә нинди нур белән бүлүдән килеп чыккан почмакларның градуслы үлчәмнәре суммасына тигез.

Димәк, әгәр c нуры (ab) почмагының яклары арасыннан үтсә, (ab) почмагы (ac) һәм (bc) почмакларының суммасына тигез була.

Мәсьәлә (25). Әгәр $\angle(ac)=30°$, $\angle(cb)=80°$, $\angle(ab)=50°$ булса, c нуры (ab) почмагының яклары арасыннан узармы?

Чишү. Әгәр c нуры (ab) почмагының яклары арасыннан узса, почмакларны үлчәүнең үзлеге буенча

$$\angle(ac)+\angle(bc)=\angle(ab)$$

булырга тиеш. Ләкин

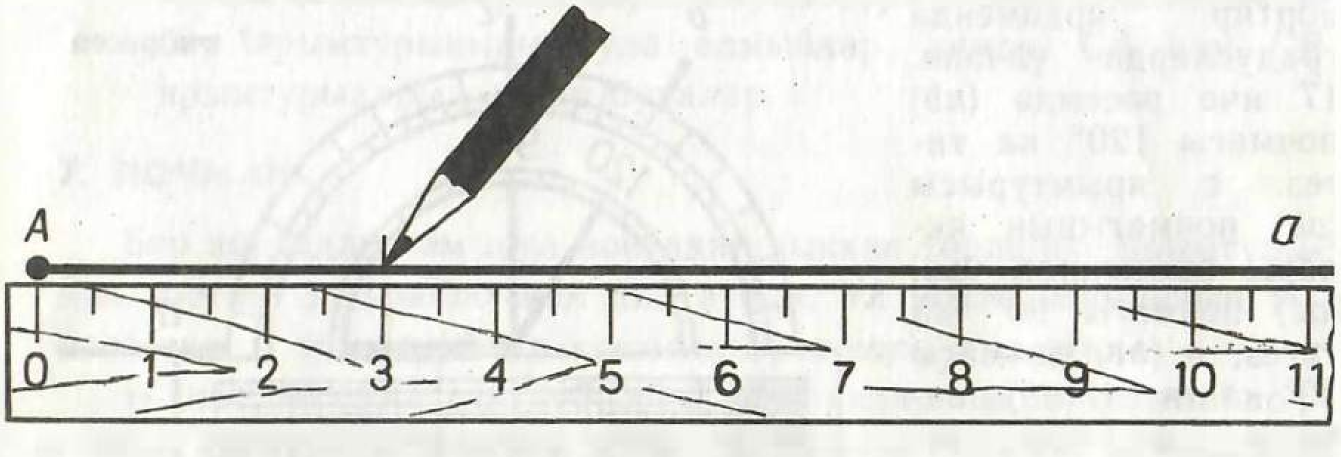
$$30°+80°\neq 50°.$$

Димәк, c нуры (ab) почмагының яклары арасыннан уза алмый.

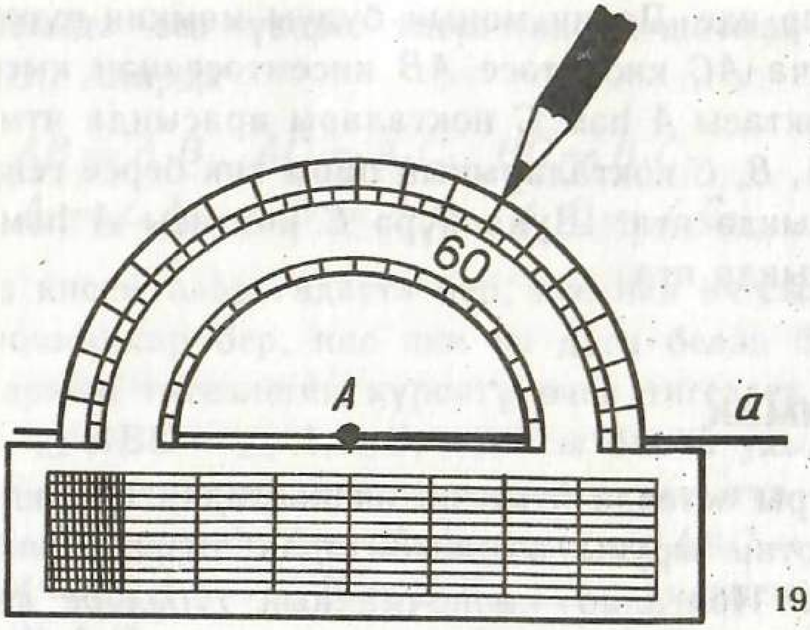
8. КИСЕМТӘЛӘР ҺӘМ ПОЧМАКЛАР САЛУ

18 нче рәсемдә A ноктасыннан башланган a ярымтурысы өстендә озынлыгы (3 см) бирелгән кисемтәне линейка ярдәмендә ничек салырга икәне күрсәтелгән.

19 нчы рәсемне карагыз, a ярымтурысын башлангыч A ноктасыннан сулга таба дәвам иттерсәк, ул яссылыкны ике ярымъ-



18 нче рәсем



19 нчы рәсем

яссылыкка бүлә. Рәсемдә градуслы үлчәме (60°) бирелгән почмакны a ярымтурысыннан өске ярымъяссылыкка транспортир ярдәмендә ничек салырга икәне күрсәтелгән.

Түбәндәге үзлекләрне без кисемтәләр һәм почмаклар салуның төп үзлекләре дип атарбыз:

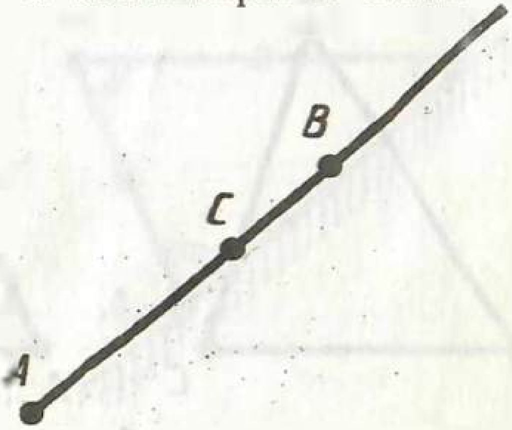
VI. ***Теләсә нинди ярымтуры өстендә, аның башлангыч ноктасыннан башлап, бирелгән озынлыкта кисемтә салырга мөмкин һәм бары тик берне генә.***

VII. ***Теләсә нинди ярымтурыдан бирелгән ярымъяссылыкка градуслы үлчәме 180° тан кечерәк булган почмак салырга мөмкин һәм бары тик берне генә.***

Мәсьәлә (30). AB нуры өстенә AB кисемтәсеннән кыскарак булган AC кисемтәсе салынган. Өч нокта: A, B, C ның кайсысы калган икесе арасында ята? Җавапны аңлатыгыз.

Чишү (20 нче рәсем). B һәм C нокталары A ноктасыннан башланучы бер үк ярымтуры өстендә яталар, шуңа күрә алар A ноктасы белән аерылмыйлар, ягъни A ноктасы B һәм C нокталары арасында ятмый. B ноктасы A һәм C нокталары арасында ята аламы? Әгәр ул A һәм C нокталары арасында ятса,

$$AB + BC = AC$$



20 нче рәсем

булыр иде. Ләкин моның булуы мөмкин түгел, чөнки шарт буенча *AC* кисемтәсе *AB* кисемтәсеннән кыскарак. Димәк, *B* ноктасы *A* һәм *C* нокталары арасында ятмый.

A, *B*, *C* нокталарының бары тик берсе генә калган икесе арасында ята. Шуңа күрә *C* ноктасы *A* һәм *B* нокталары арасында ята.

9. ӨЧПОЧМАК

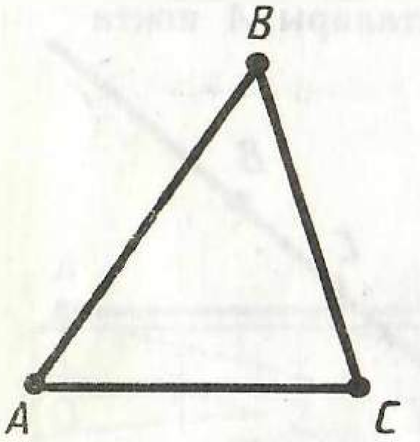
Бер туры өстендә ятмаган өч ноктадан һәм шул нокталарны парлап тоташтыручы өч кисемтәдән торган фигура *өчпочмак* дип атала. Нокталар — өчпочмакның *түбәләре* дип, ә кисемтәләр аның *яклары* дип аталалар.

21 нче рәсемдә сез түбәләре *A*, *B*, *C* һәм яклары *AB*, *BC*, *AC* булган өчпочмак күрәсез. Өчпочмак үзенең түбәләрен күрсәтеп тамгалана. Җайвакытта «өчпочмак» сүзе урынына △ тамгасын кулланалар. Мәсәлән, 21 нче рәсемдәге өчпочмак болай тамгалана: △ *ABC*.

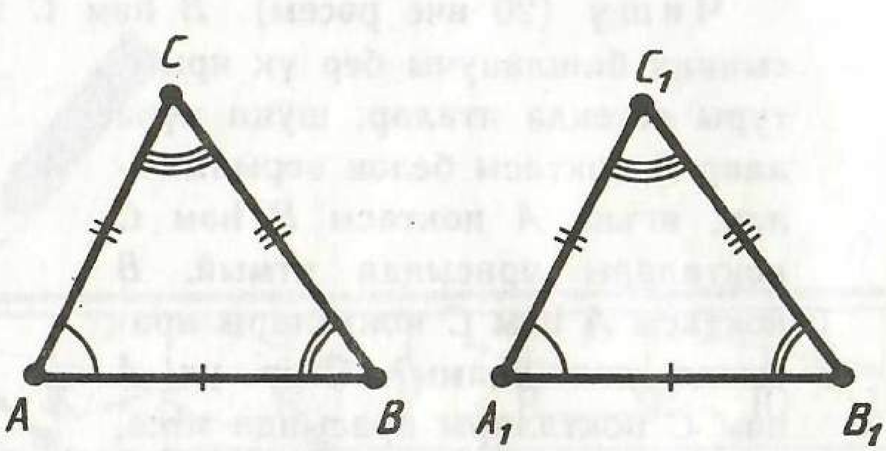
AB һәм *AC* ярымтурыларыннан төзелгән почмак *ABC* өчпочмагының *A* түбәсе янындагы почмагы дип атала. Өчпочмакның *B* һәм *C* түбәләре янындагы почмаклары да шулай ук тамгаланалар.

Әгәр ике кисемтә бер үк озынлыкта булса, алар *тигез* кисемтәләр дип атала. Әгәр ике почмакның градуслы үлчәмнәре бертөрле булса, алар *тигез* почмаклар дип аталалар.

Әгәр өчпочмакларның тиңдәш яклары һәм тиңдәш почмаклары тигез булса, алар *тигез* дип атала. Бу очракта тиңдәш почмаклар тиңдәш якларга каршы ятарга тиеш.



21 нче рәсем



22 нче рәсем

22 нче рәсемдә сез үзара тигез ике өчпочмак күрәсез: ABC һәм $A_1B_1C_1$. Аларда

$$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1,\ BC = B_1C_1,$$
$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1.$$

Сызымда тигез кисемтәләр гадәттә бер, ике яки өч сызыкча белән, ә тигез почмаклар бер, ике яки өч дуга белән билгеләнә.

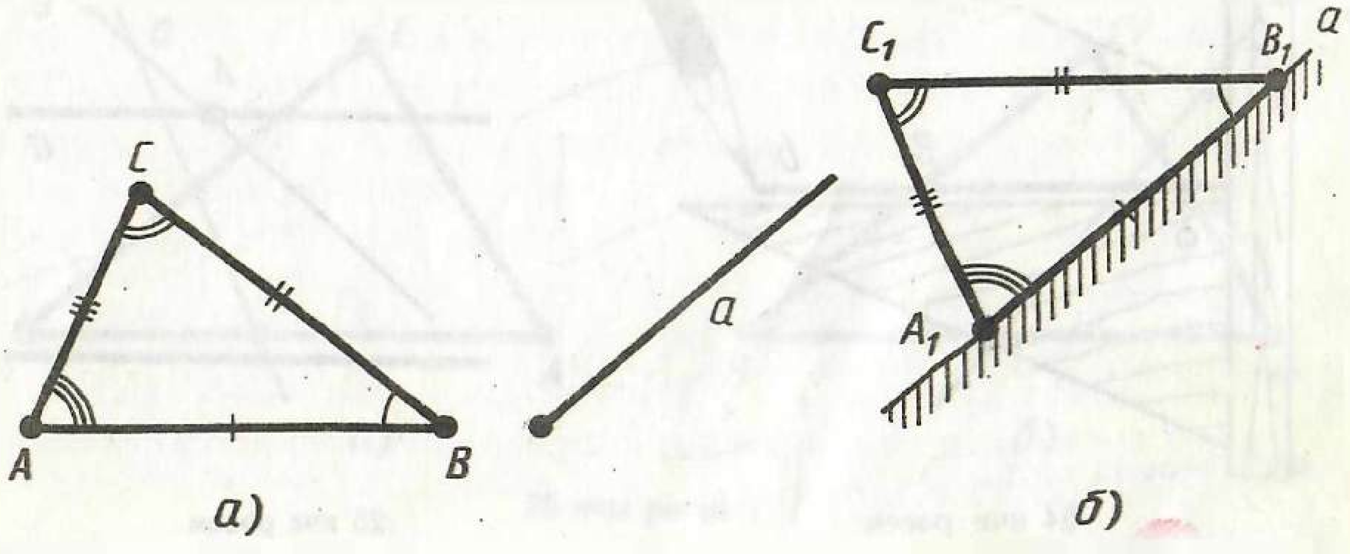
Өчпочмакларның тигезлеген күрсәтү өчен тигезлек тамгасы: $=$ кулланыла. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ язмасы болай укыла: «ABC өчпочмагы $A_1B_1C_1$ өчпочмагына тигез». Бу вакытта өчпочмак түбәләренең язылу тәртибе бик әһәмиятле. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ тигезлеге $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, ... икәнен аңлата. Ә $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$ тигезлеге инде бөтенләй башканы аңлата: $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle A_1$, ...

Мәсьәлә (38). ABC һәм PQR өчпочмаклары тигезләр. AB ягы 10 м га һәм C почмагы 90° ка тигез икәне билгеле. PQ ягы һәм R почмагы нәрсәгә тигез? Җавапны аңлатыгыз.

Чишү. ABC һәм PQR өчпочмаклары тигез булганга күрә, $AB = PQ$, $\angle C = \angle R$. Димәк, $PQ = 10$ м, $\angle R = 90°$.

10. БИРЕЛГӘН ӨЧПОЧМАККА ТИГЕЗ ӨЧПОЧМАКНЫҢ БУЛУЫ

ABC өчпочмагы һәм a нуры бирелгән булсын (23 нче a рәсем). A түбәсе a нурының башлангычына туры килерлек, B түбәсе a нуры өстенә төшәрлек, ә C түбәсе a нуры һәм аның дәвамына карата бирелгән ярымъяссылыкта булырлык итеп, ABC өчпочма-



23 нче рәсем

гын күчерик. Бу яңа торышта безнең өчпочмакның түбәләрен A_1, B_1, C_1 дип тамгалыйк (23 нче б рәсем).

$A_1B_1C_1$ өчпочмагы ABC өчпочмагына тигез.

ABC өчпочмагына тигез һәм бирелгән a нурына карата күрсәтелгән тәртиптә урнашкан $A_1B_1C_1$ өчпочмагы булуны иң гади фигураларның төп үзлекләре санына кертәбез. Бу үзлекне без түбәндәгечә әйтербез:

VIII. ***Өчпочмак нинди генә булмасын, бирелгән ярымтурыга карата күрсәтелгән тәртиптә урнашкан аңа тигез өчпочмак бар.***

11. ПАРАЛЛЕЛЬ ТУРЫЛАР

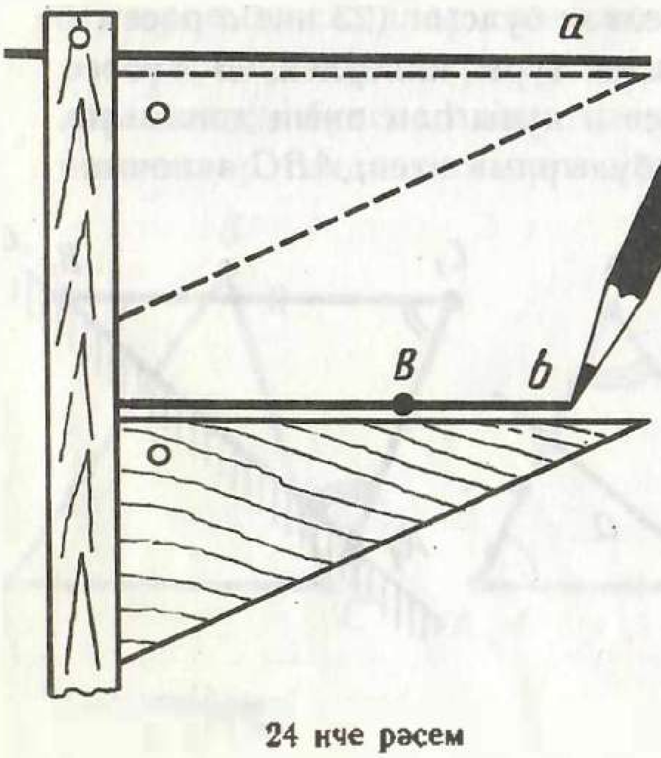
Әгәр ике туры кисешмәсәләр, алар *параллель* турылар дип атала.

24 нче рәсемдә, бирелгән a турысына параллель итеп, бирелгән B ноктасы аша b турысын почмаклык һәм линейка ярдәмендә ничек үткәрергә икәне күрсәтелгән.

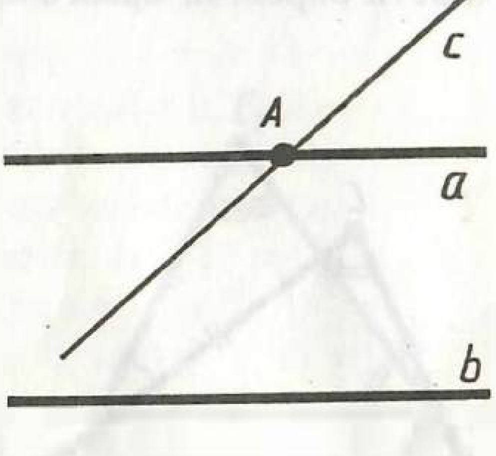
Турыларның параллель икәнен күрсәтү өчен ∥ тамгасы кулланыла. $a \parallel b$ язмасы болай укыла: «a турысы b турысына параллель».

Параллель турыларның төп үзлеге болай була:

IX. ***Яссылыкта бирелгән туры өстендә ятмаган нокта аша, шул турыга параллель итеп, бер генә туры үткәрергә мөмкин.***



24 нче рәсем



25 нче рәсем

Мәсьәлә (41). Параллель турыларның берсен кисүче туры аларның икенчесен кисмичә каламы? Җавапны аңлатыгыз.

Чишү. a һәм b параллель турылар булсын һәм c турысы a турысын A ноктасында кисеп үтсен (25 нче рәсем). Әгәр c турысы b турысын кисмичә үтсә, A ноктасы аша b турысын кисмәүче ике туры: a һәм c турылары үтәр иде. Ләкин параллель турыларның үзлеге буенча моның булуы мөмкин түгел. Димәк, a турысын кисүче c турысы a турысына параллель булган b турысын да кисәргә тиеш.

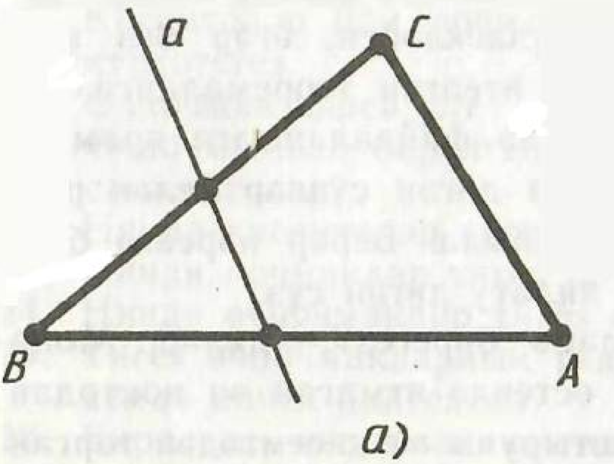
12. ТЕОРЕМАЛАР ҺӘМ ИСБАТЛАУЛАР

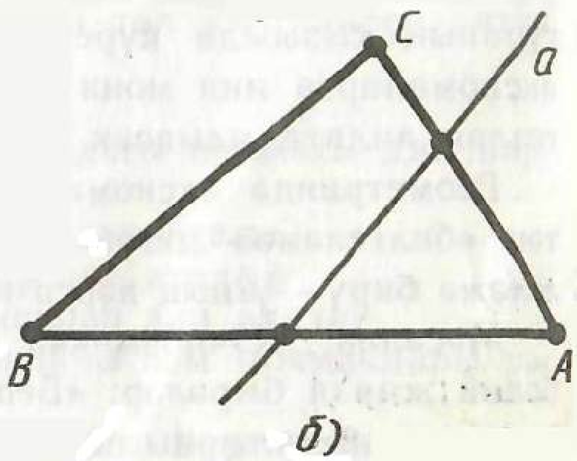
Теге яки бу геометрик фигураның үзлеге турында раслауның дөреслеге фикер йөртү юлы белән ачыклана. Бу фикер йөртү *исбатлау* дип атала. Исбат ителә торган раслау үзе *теорема* дип атала. Мисал китерик.

Теорема 1.1. ***Әгәр туры өчпочмакның бер түбәсе аша да үтмәсә һәм аның бер ягын кисеп үтсә, бу туры өчпочмакның калган ике ягының бары тик берсен генә кисеп үтә.***

Исбатлау. a турысы ABC өчпочмагының бер түбәсе аша да үтмәсен һәм аның AB ягын киссен ди (26 нчы рәсем). a турысы яссылыкны ике ярымъяссылыкка бүлә. A һәм B нокталары төрле ярымъяссылыкларда яталар, чөнки AB кисемтәсе a турысы белән кисешә. C ноктасы бу ярымъяссылыкларның берсендә ята.

Әгәр C ноктасы A ноктасы белән бер ярымъяссылыкта ятса, AC кисемтәсе a турысы белән кисешми, ә BC кисемтәсе бу туры белән кисешә (26 нчы рәсем, a).





26 нчы рәсем

Әгәр C ноктасы B ноктасы белән бер ярымъяссылыкта ятса, AC кисемтәсе a турысы белән кисешә, ә BC кисемтәсе кисешми (26 нчы рәсем, *б*).

Ике очракта да a турысы AC яки BC кисемтәләренең кайсы да булса берсе белән генә кисешә. Исбатлау менә шуннан тора.

Теорема гадәттә ике кисәктән тора. Бер кисәгендә нәрсә бирелүе турында әйтелә. Бу кисәк теореманың *шарты* дип атала. Икенче кисәгендә нәрсә исбат ителергә тиешлеге әйтелә. Бу кисәк теореманың *нәтиҗәсе* дип атала.

1.1 теоремасының туры өчпочмакның бер түбәсе аша да үтми һәм аның бер ягын кисеп үтә дигән кисәге — шарты, бу туры өчпочмакның калган ике ягының бары тик берсен генә кисеп үтә дигән кисәге теореманың нәтиҗәсе була.

13. АКСИОМАЛАР

Иң гади фигураларның төп үзенчәлекләрен аңлаткан раслаулар исбатланмый һәм алар *аксиомалар* дип атала. «Аксиома» сүзе аксиос дигән грек сүзеннән килеп чыккан һәм шик тудырмый торган раслауны белдерә.

Теоремаларны исбатлаганда иң гади фигураларның төп үзлекләреннән, ягъни аксиомалардан, шулай ук исбатланган үзлекләрдән, ягъни исбатланган теоремалардан файдаланырга рөхсәт ителә. Фигураларның башка бернинди үзлекләреннән дә, әгәр алар күренеп торган кебек булсалар да, файдаланырга ярамый.

Теоремаларны исбатлаганда, сүз белән аңлатканның геометрик язмасы буларак, сызымнан файдаланырга рөхсәт ителә. Фигураның сызымда күренеп торган үзлекләрен, әгәр без аны аксиомаларга яки моңа кадәр исбат ителгән теоремаларга нигезләп аңлата алмасак, фикер йөртүдә файдаланырга ярамый.

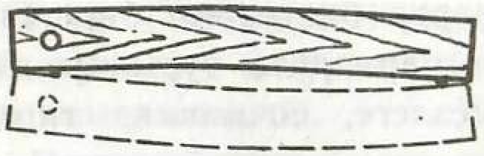
Геометриядә аксиома һәм теорема дигән сүзләр белән рәттән «билгеләмә» дигән сүз дә кулланыла. Берәр нәрсәгә *билгеләмә* бирү — аның нәрсә икәнен аңлату дигән сүз.

Мәсәлән, «Өчпочмакка билгеләмә бирегез»,— диләр. Моңа болай җавап бирәләр: «Бер туры өстендә ятмаган өч ноктадан һәм шул нокталарны парлап тоташтыручы өч кисемтәдән торган фигура өчпочмак дип атала».

Икенче мисал: «Параллель турыларга билгеләмә бирегез». Җавап: «Үзара кисешмәүче турылар параллель турылар дип атала». Сез инде кисемтәләрнең тигезлеге, почмаклар тигезлеге һәм өчпочмаклар тигезлегенең билгеләмәләрен беләсез.

КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Геометрик фигураларга мисаллар китерегез.
2. Яссылыктагы төп геометрик фигураларны әйтеп күрсәтегез.
3. Нокталар һәм турылар ничек тамгалана?
4. Нокта һәм турыларның берсе икенчесенеке булуның төп үзлекләрен әйтеп күрсәтегез.
5. Очлары бирелгән нокталарда булган кисемтәнең нәрсә икәнен аңлатыгыз.
6. Нокталарның туры өстендә үзара торышының төп үзлеген әйтеп күрсәтегез.
7. Кисемтәләрне үлчәүнең төп үзлекләрен әйтеп күрсәтегез.
8. Бирелгән ике нокта арасындагы ераклык дип нәрсә атала?
9. Яссылыкны ике ярымъяссылыкка бүлү нинди үзлеккә ия?
10. Яссылыкта нокталарның турыга карата торышының төп үзлеген әйтеп күрсәтегез.
11. Нәрсә ул ярымтуры яки нур? Нинди ярымтурылар өстәмә ярымтурылар дип атала?
12. Ярымтурылар ничек тамгалана?
13. Нинди фигура почмак дип атала?
14. Почмак ничек тамгалана?
15. Нинди почмак җәелгән почмак дип атала?
16. «Ярымтуры почмакның яклары арасыннан үтә»,— дип әйтү нәрсәне аңлата?
17. Почмак нинди берәмлекләрдә һәм нинди инструмент ярдәмендә үлчәнә? Үлчәү ничек башкарылганны аңлатыгыз.
18. Почмаклар үлчәүнең төп үзлекләрен әйтеп күрсәтегез.
19. Кисемтәләр һәм почмаклар салуның төп үзлекләрен әйтеп күрсәтегез.
20. Өчпочмак нәрсә ул?
21. Өчпочмакның бирелгән түбәсе янындагы почмагы дип нәрсәгә әйтәләр?
22. Нинди кисемтәләр тигез кисемтәләр дип атала?
23. Нинди почмаклар тигез почмаклар дип атала?
24. Нинди өчпочмаклар тигез өчпочмаклар дип атала?
25. Тигез өчпочмакларның тиңдәш яклары һәм почмаклары рәсемдә ничек билгеләнә?
26. Бирелгән өчпочмакка тигез өчпочмак барлыгын 23 нче рәсем буенча аңлатыгыз.



27 нче рәсем

27. Нинди турылар параллель турылар дип атала? Турыларның параллельлеген тамгалау өчен нинди тамга кулланыла?
28. Параллель турыларның төп үзлеген әйтеп күрсәтегез.
29. Теоремага мисал китерегез.

Мәсьәләләр

1. 1) Туры үткәрегез. Туры өстендә яткан нинди дә булса A ноктасы һәм туры өстендә ятмый торган B ноктасы билгеләгез.
   2) Кисешүче a һәм b турылары үткәрегез. Турыларның кисешү ноктасы C ны; a турысы өстендә ятып та b турысы өстенә ятмаучы A ноктасы; a һәм b турыларының берсе өстендә дә ятмаучы D ноктасы билгеләгез.
2. Кәгазь өстендә ике нокта билгеләгез. Бу ике нокта аша кулдан гына туры үткәрегез. Линейка ярдәмендә төзүнең дөреслеген тикшереп карагыз.
3. Ике турының ике кисешү ноктасы булуы мөмкинме? Җавапны аңлатыгыз.
4. Линейканың дөреслеген тикшерү өчен түбәндәге ысул кулланыла. Ике нокта аша линейка ярдәмендә сызык үткәрәләр (27 нче рәсем). Шуннан соң линейканы әйләндерәләр һәм шул ук ноктадар аша яңадан сызык үткәрәләр. Әгәр сызыклар тәңгәл килмәсә, линейка дөрес булмый. Линейканың дөреслеген тикшерүнең бу ысулы турыларның нинди үзлегенә нигезләнгән?
5. a турысы үткәрегез. Туры өстендә нинди дә булса ике нокта: A һәм B ны билгеләгез. Аннары, A ноктасы B һәм C ноктадары арасында ятарлык итеп, C ноктасы билгеләгез.
6. a турысы үткәрегез. Туры өстендә нинди дә булса ике нокта: A һәм B ны билгеләгез. Аннары AB кисемтәсенең нинди дә булса C ноктасын билгеләгез.
7. M ноктасы CD турысы өстендә C һәм D ноктадары арасында ята. Әгәр: 1) $CM = 2{,}5$ см, $MD = 3{,}5$ см; 2) $CM = 3{,}1$ дм, $MD = 4{,}6$ дм; 3) $CM = 12{,}3$ м, $MD = 5{,}8$ м булса, CD кисемтәсенең озынлыгын табыгыз.
8. Туры өстендә ике нокта билгеләгез. Чама белән бу нок-

[1] Бу дәреслекнең күп кенә мәсьәләләре узган еллардагы мәктәп дәреслекләреннән һәм мәсьәләләр җыентыгыннан, аеруча А. П. Киселев «Геометрия»сеннән һәм Н. Рыбкинның «Геометриядән мәсьәләләр җыентыгы»ннан алынды.

таларны тоташтыручы кисемтәнең уртасын билгеләгез. Линейка ярдәмендә үлчәп, тәзүнең дөреслеген тикшерегез.

9. Өч нокта: A, B, C бер туры өстендә яталар. $AB=4{,}3$ см, $AC=7{,}5$ см, $BC=3{,}2$ см икәнлеге билгеле. A ноктасы B һәм C нокталары арасында ята аламы? C ноктасы A һәм B нокталары арасында ята аламы? A, B, C нокталарының кайсысы калган икесе арасында ята?
10. A, B, C нокталары бер туры өстендә яталар. Әгәр $AC=5$ см, $BC=7$ см булса, B ноктасы AC кисемтәсенеке буламы? Җавапны аңлатыгыз.
11. A, B, C нокталары бер туры өстендә яталар. Әгәр $AC=7$ м, $BC=7{,}6$ м булса, B ноктасы A һәм C нокталарын аера алырмы? Җавапны аңлатыгыз.
12. Әгәр $AB=1{,}8$ м, $AC=1{,}3$ м, $BC=3$ м булса, A, B, C нокталары бер туры өстендә ятарлармы?
13. Әгәр озынрак кисемтә AB ның озынлыгы AC һәм BC кисемтәләре озынлыгының суммасыннан кечерәк булса, өч нокта: A, B, C бер туры өстендә ятармы? Җавапны аңлатыгыз.
14. A, B, C нокталары бер туры өстендә яталар. $AB=2{,}7$ м, $AC=3{,}2$ м булганда, BC кисемтәсенең озынлыгын табыгыз. Мәсьәләнең ничә чишелеше бар?
15. 15 м озынлыгындагы AB кисемтәсе өстендә C ноктасы билгеләнгән. Әгәр: 1) AC кисемтәсе BC кисемтәсеннән 3 м га озынрак; 2) AC кисемтәсе BC кисемтәсеннән ике тапкыр озынрак; 3) C ноктасы AB кисемтәсенең уртасы; 4) AC һәм BC кисемтәләренең озынлыгы $2:3$ чагыштырмасында булса, AC һәм BC кисемтәләренең озынлыгын табыгыз.
16. Туры үткәрегез һәм туры өстендә ятмаган нинди дә булса A ноктасы билгеләгез. Аннары, AB кисемтәсе турыны кисеп үтәрлек, ә BC кисемтәсе турыны кисмәслек итеп, B һәм C нокталары билгеләгез.
17. Туры һәм бу туры өстендә ятмаган өч нокта: A, B, C бирелгән. AB кисемтәсенең турыны кисүе, ә AC кисемтәсенең турыны кисмәве билгеле. BC кисемтәсе турыны кисәме? Җавапны аңлатыгыз.
18. Туры һәм бу туры өстендә ятмаган дүрт нокта: A, B, C, D бирелгән. Әгәр: 1) AB, BC һәм CD кисемтәләре турыны киссә; 2) AC һәм BC кисемтәләре турыны киссә, ә BD кисемтәсе кисмәсә; 3) AB һәм CD кисемтәләре турыны киссә, ә BC кисемтәсе кисмәсә; 4) AB һәм CD кисемтәләре турыны кисмәсә, ә BC кисемтәсе киссә; 5) AB, BC һәм CD кисемтәләре турыны кисмәсә; 6) AC, BC һәм BD кисемтәләре турыны киссә, AD кисемтәсе турыны кисәрме? Җавапны аңлатыгыз.
19. Биш нокта һәм бу нокталарның берсе аша да үтмәгән туры бирелгән. Бу турыга карата өч нокганың бер ярымъ-

яссылыкта, ә ике ноктаның икенче ярымъяссылыкта ятканлыгы билгеле. Һәр ике нокта кисемтә белән тоташтырылган. Турыны ничә кисемтә кисеп үтә? Җавапны аңлатыгыз.

20. a турысы һәм бу туры өстендә A, X, Y, Z нокталары бирелгән (11 нче рәсем). X һәм Y нокталарының A ноктасыннан бер якта ятуы билгеле, X һәм Z нокталары шулай ук A ноктасыннан бер якта яталар. Y һәм Z нокталары A ноктасына карата ничек урнашкан: бер үк яктамы, әллә төрле яктамы? Җавапны аңлатыгыз.

21. A һәм B нокталары билгеләгез. AB ярымтурысы үткәрегез.

22. AB кисемтәсе өстендә C ноктасы алынган. AB, AC, CA һәм CB ярымтурылары арасында тәңгәл килгән ярымтурылар һәм өстәмә ярымтурыларның парларын әйтегез. Җавапны аңлатыгыз.

23. Бер ноктадан ирекле өч нур үткәрегез. Бу нурлар белән ясалган почмакларның зурлыкларын күз белән чамалагыз. Транспортир ярдәмендә үлчәп, җавапларыгызны тикшерегез. Күнегүне кабатлагыз.

24. a нуры (cd) почмагының яклары арасыннан уза. Әгәр: 1) $\angle(ac)=35°$, $\angle(ad)=75°$; 2) $\angle(ac)=57°$, $\angle(ad)=62°$; 3) $\angle(ac)=94°$, $\angle(ad)=85°$ булса, (cd) почмагын табыгыз.

25. Әгәр: 1) $\angle(ac)=30°$, $\angle(cb)=80°$, $\angle(ab)=50°$; 2) $\angle(ac)=$ $=100°$, $\angle(cb)=90°$; 3) (ac) почмагы (ab) почмагыннан зуррак булса, c нуры (ab) почмагының яклары арасыннан үтәрме?

26. $60°$ ка тигез булган (ab) почмагының яклары арасыннан c нуры уза. Әгәр: 1) (ac) почмагы (bc) почмагыннан $30°$ ка зуррак; 2) (ac) почмагы (bc) почмагыннан ике тапкыр зуррак; 3) c нуры (ab) почмагын урталай бүлсә; 4) (ac) һәм (bc) почмакларының градуслы үлчәмнәре $2:3$ чагыштырмасында булса, (ac) һәм (bc) почмакларын табыгыз.

27. Туры үткәрегез. Аның өстендә нинди дә булса A ноктасы билгеләгез. Аннары, чама белән $AB=5$ см булырлык итеп, шул туры өстендә B ноктасы билгеләгез. B ноктасын төзүнең төгәллеген линейка ярдәмендә тикшереп карагыз. Күнегүне 1) $AB=3$ см; 2) $AB=7$ см; 3) $AB=10$ см булган очраклар өчен кабатлагыз.

28. Чама белән $30°$, $45°$, $60°$, $90°$ лы почмаклар төзегез. Төзүнең төгәллеген транспортир ярдәмендә тикшерегез. Күнегүне кабатлагыз.

29. AB ярымтурысы өстендә, $AX=AB$ булырлык, B ноктасыннан үзгә X ноктасы була аламы? Җавапны аңлатыгыз.

30. AB нуры өстенә AB кисемтәсеннән кыскарак булган AC кисемтәсе салынган. Өч нокта: A, B, Cның кайсысы калган икесе арасында ята? Җавапны аңлатыгыз.

31. AB нуры өстендә C ноктасы билгеләнгән. Әгәр: 1) $AB=$

$=1{,}5$ м, $AC=0{,}3$ м; 2) $AB=2$ см, $AC=4{,}4$ см булса, BC кисемтәсенең озынлыгын табыгыз.

32. Чама белән якларын тигез итеп өчпочмак төзегез (тигезьяклы өчпочмак). Төзүнең төгәллеген якларның озынлыгын үлчәп тикшерегез.

33. ABC өчпочмагының AB ягы өстендә D ноктасы алынган. Әгәр $AD=5$ см, ә $BD=6$ см булса, өчпочмакның AB ягының озынлыгы нәрсәгә тигез?

34. ABC өчпочмагының AB ягы өстендә D ноктасы алынган. Әгәр $\angle ACD=30°$, ә $\angle BCD=70°$ булса, өчпочмакның C почмагы нинди зурлыкта булыр?

35. Нинди дә булса өчпочмак сызыгыз. Чама белән аңа тигез итеп, кулдан гына өчпочмак төзегез. Тиңдәш почмакларын һәм якларын үлчәп карап, төзүнең дөреслеген тикшерегез. Күнегүне кабатлагыз.

36. ABC һәм PQR өчпочмаклары тигез. $AB=5$ см, $BC=6$ см, $AC=7$ см икәне билгеле. PQR өчпочмагының якларын табыгыз. Җавапны аңлатыгыз.

37. ABC һәм PQR өчпочмаклары тигез. Икенче өчпочмакның почмаклары билгеле: $\angle P=40°$, $\angle Q=60°$, $\angle R=80°$. ABC өчпочмагының почмакларын табыгыз.

38. ABC һәм PQR өчпочмаклары тигез. AB ягы 10 м га, ә C почмагы 90° ка тигез икәне билгеле. PQ ягы һәм R почмагы күпмегә тигез? Җавапны аңлатыгыз.

39. ABC, PQR һәм XYZ өчпочмаклары тигезләр. $AB=5$ см, $QR=6$ см, $ZX=7$ см икәне билгеле. Һәр өчпочмакның калган якларын табыгыз.

40. ABC өчпочмагы бирелгән. Аңа тигез булган башка ABD өчпочмагы бармы?

41. Параллель турыларның берсен кисүче туры аларның икенчесен кисмичә каламы? Җавапны аңлатыгыз.

42. Кисешүче ике туры бирелгән. Бирелгән турыларның икесенә дә параллель итеп, өченче туры үткәреп буламы?

43. Өчпочмакның бер түбәсе аша да узмаган туры аның барлык якларын да кисеп үтә аламы? Ни өчен?

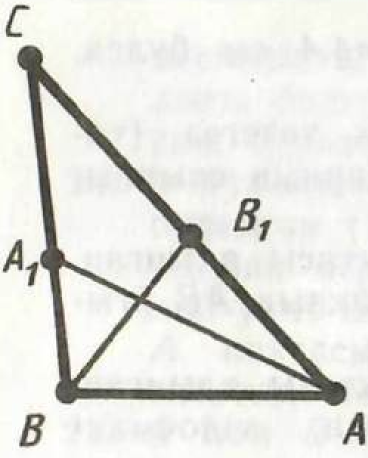
44*[1]. Дүрт нокта бирелгән: A, B, C һәм D. A, B, C нокталарының бер туры өстендә һәм B, C, D нокталарының шулай ук бер туры өстендә ятуы билгеле. Дүрт ноктаның барысы да бер үк туры өстендә ятканын исбатлагыз.

45*. Дүрт туры бирелгән: a, b, c һәм d. a, b, c турыларының бер ноктада кисешкәне һәм b, c, d турыларының шулай ук бер ноктада кисешкәне билгеле. Бирелгән дүрт турының барысы да бер үк нокта аша үткәнен исбат итегез.

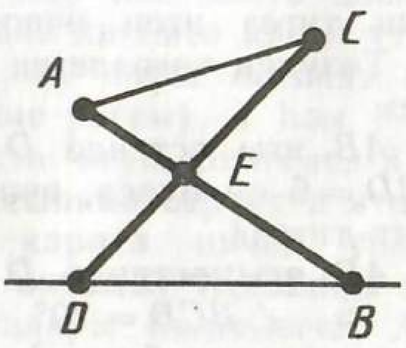
46*. A, B, C, D нокталары бер туры өстендә ятмыйлар. AB

---

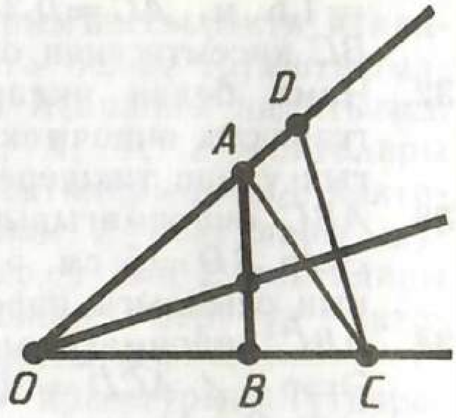
[1] Авыррак мәсьәләләр йолдызчыклар (*) белән билгеләнгән.



28 нче рәсем



29 нчы рәсем



30 нчы рәсем

турысы CD кисемтәсен, ә CD турысы AB кисемтәсен кисеп үтүе билгеле. AB һәм CD кисемтәләренең кисешүен исбат итегез.

47*. ABC өчпочмагы бирелгән. AC ягы өстендә B_1 ноктасы, ә BC ягы өстендә A_1 ноктасы алынган. AA_1 һәм BB_1 кисемтәләренең кисешүен исбат итегез (28 нче рәсем).

48*. Бер туры өстендә ятмаган AB һәм CD кисемтәләре E ноктасында кисешәләр. AC кисемтәсенең BD турысын кисмәвен исбат итегез (29 нчы рәсем).

49*. Әгәр почмакның түбәсеннән чыгучы нур очлары почмакның яклары өстендә яткан AB кисемтәсен кисеп үтсә, ул вакытта аның: 1) очлары почмакның яклары өстендә яткан AC кисемтәсен; 2) очлары почмакның яклары өстендә яткан теләсә нинди CD кисемтәсен кисеп үтүен исбат итегез (30 нчы рәсем).

50. Ике туры я үзара параллель була, яки бер ноктада кисешәләр, шуны исбатлагыз.

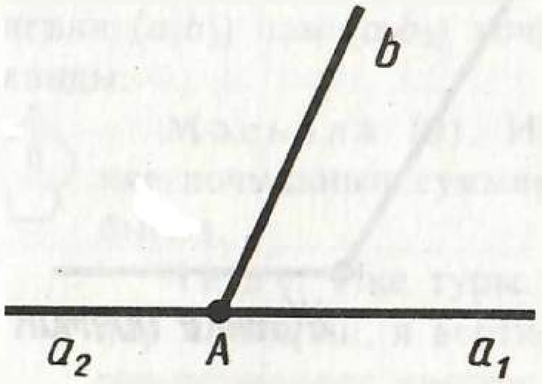
51*. A һәм C ноктагалары a турысыныкы. CA ярымтурысы өстендә CA кисемтәсеннән озынрак булган CB кисемтәсе салынган. 1) Өч нокта: A, B, C ның кайсысы калган икесе арасында ята? Җавапны аңлатыгыз. 2) A ноктасының a турысын ике ярымтурыга: AB һәм AC га бүлгәнен исбат итегез.

§ 2. ЧИКТӘШ ҺӘМ ВЕРТИКАЛЬ ПОЧМАКЛАР

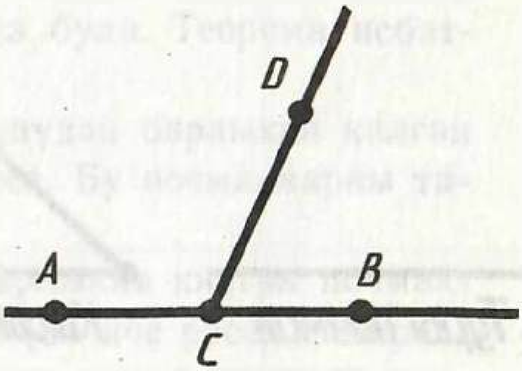
14. ЧИКТӘШ ПОЧМАКЛАР

Билгеләмә. Әгәр ике почмакның бер ягы уртак булып, калган ике ягы өстәмә ярымтурылар икән, алар *чиктәш* почмаклар дип атала.

31 нче рәсемдәге (a_1b) һәм (a_2b) почмаклары чиктәшләр. Аларның b ягы уртак, ә a_1 һәм a_2 яклары өстәмә ярымтурылар.



31 нче рәсем



32 нче рәсем

C ноктасы AB турысы өстендә A һәм B нокталары арасында ятучы нокта булсын, ә D ноктасы AB турысы өстендә ятмасын (32 нче рәсем). Ул вакытта BCD һәм ACD почмаклары чиктәш була. Аларның CD ягы уртак. CA һәм CB яклары AB турысының өстәмә ярымтурылары, чөнки бу ярымтурыларның A һәм B нокталарын C башлангыч ноктасы аера.

Теорема 2.1. ***Чиктәш почмакларның суммасы 180° ка тигез.***

Исбатлау. $\angle(a_1b)$ һәм $\angle(a_2b)$ — бирелгән чиктәш почмаклар булсын (31 нче рәсемне кара). b нуры җәелгән почмакның a_1 һәм a_2 яклары арасыннан уза. Шуңа күрә (a_1b) һәм (a_2b) почмакларының суммасы җәелгән почмакка, ягъни 180° ка тигез. Теорема исбатланды.

2.1 теоремасыннан болай килеп чыга: ***әгәр ике почмак тигез икән, аларга чиктәш почмаклар да тигез була.***

2.1 теоремасыннан шулай ук болай килеп чыга: ***әгәр почмак җәелгән почмак булмаса, аның градуслы үлчәме 180° тан кечерәк була.***

Мәсьәлә (3). Берсе икенчесеннән ике тапкыр зуррак булган чиктәш почмакларны табыгыз.

Чишү. Почмакларның кечерәгенең градуслы үлчәмен x дип билгелик. Ул вакытта зуррак почмакның градуслы үлчәме $2x$ була. Почмакларның суммасы 180°. Шулай булгач,

$$x+2x=180,\ 3x=180.$$

Моннан $x=60°$. Димәк, безнең чиктәш почмаклар 60° һәм 120° ка тигез.

90° ка тигез почмак туры почмак дип атала.

Чиктәш почмакларның суммасы турындагы теоремадан бо-

33 нче рәсем

лай килеп чыга: туры почмакка чиктәш почмак туры почмак була.

90° тан кечерәк почмак кысынкы почмак дип атала. 90° тан зуррак һәм 180° тан кечерәк почмак җәенке почмак дип атала.

Чиктәш почмакларның суммасы 180° ка тигез булганга күрә, кысынкы почмакка чиктәш почмак җәенке, ә җәенке почмакка чиктәш почмак кысынкы була. 33 нче рәсемдә өч төрле почмак күрсәтелгән.

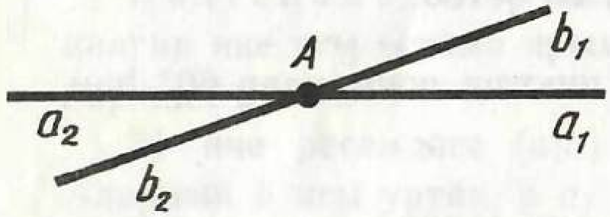
15. ВЕРТИКАЛЬ ПОЧМАКЛАР

Билгеләмә. Әгәр бер почмакның яклары икенче почмак якларының өстәмә ярымтурылары булса, андый ике почмак вертикаль почмаклар дип атала.

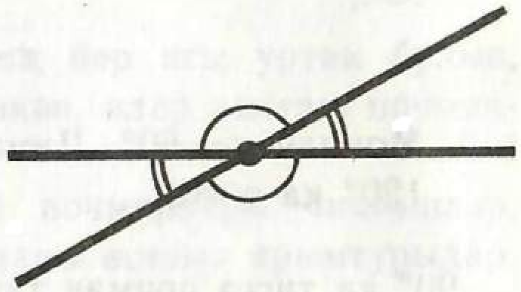
34 нче рәсемдәге (a_1b_1) һәм (a_2b_2) почмаклары вертикаль була. Икенче почмакның a_2 һәм b_2 яклары беренче почмакның a_1 һәм b_1 якларының өстәмә ярымтурылары була.

Теорема 2.2. ***Вертикаль почмаклар тигез була.***

Исбатлау. (a_1b_1) һәм (a_2b_2) почмаклары бирелгән вертикаль почмаклар булсын (34 нче рәсем). (a_1b_2) почмагы (a_1b_1) почмагы белән дә һәм (a_2b_2) почмагы белән дә чиктәш. Моннан чиктәш почмакларның суммасы турындагы теорема буенча (a_1b_1) һәм



34 нче рәсем



35 нче рәсем

(a_2b_2) почмакларының һәркайсы (a_1b_2) почмагын 180° ка тутыра, ягъни (a_1b_1) һәм (a_2b_2) почмаклары тигез була. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (9). Ике туры кисешүдән барлыкка килгән ике почмакның суммасы 50° ка тигез. Бу почмакларны табыгыз.

Чишү. Ике туры кисешүдән барлыкка килгән почмаклар я чиктәш, я вертикаль булалар (35 нче рәсем). Бирелгән почмаклар чиктәш була алмыйлар, чөнки аларның суммасы 50°, ә чиктәш почмакларының суммасы 180°. Димәк, алар вертикаль булалар. Вертикаль почмаклар тигез һәм шарт буенча аларның суммасы 50° булганга, почмакларның һәркайсы 25° ка тигез.

16. ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТУРЫЛАР

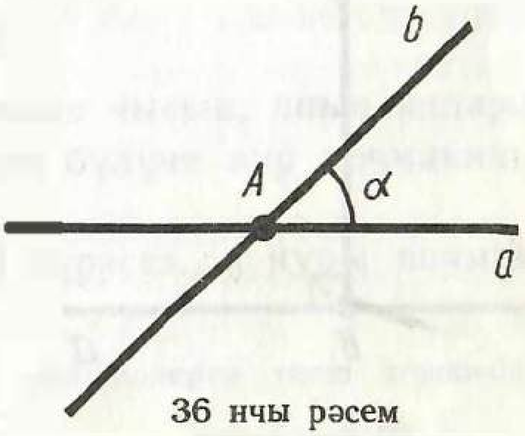
a һәм b — A ноктасында кисешүче турылар булсын (36 нчы рәсем). Бу турыларның һәркайсы A ноктасы белән ике ярымтурыга бүленә. Бер турының ярымтурылары икенче турының ярымтурылары белән дүрт почмак ясый. Бу почмакларның берсе α булсын. Бу вакытта калган өч почмакның һәркайсы α почмагына я вертикаль, я чиктәш була. Моннан почмакларның берсе туры почмак булса, калган почмаклар шулай ук туры почмаклар икәне килеп чыга. Бу очракта без турылар туры почмак ясап кисешәләр дибез.

Билгеләмә. Әгәр ике туры үзара туры почмак ясап кисешсә, андый турылар *перпендикуляр* турылар дип атала (37 нче рәсем).

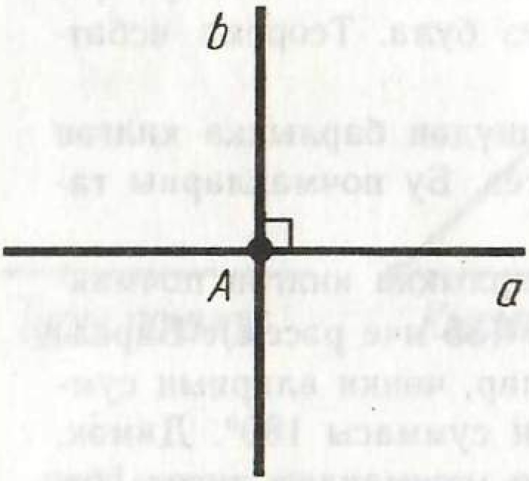
Турыларның перпендикулярлыгын $\perp$ тамгасы белән күрсәтәләр. $a \perp b$ язмасы болай укыла: «a турысы b турысына перпендикуляр».

Теорема 2.3. ***Турының һәр ноктасы аша, аңа перпендикуляр итеп, туры үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә.***

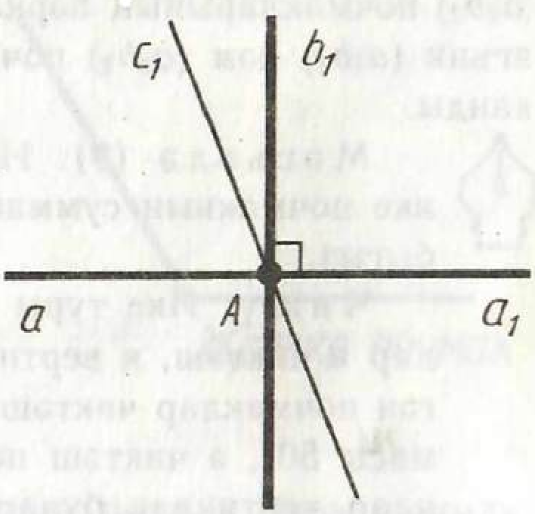
Исбатлау. a — бирелгән туры һәм A аның өстендә бирелгән нокта булсын. a турысының A ноктасыннан башланучы бер ярымтурысын



36 нчы рәсем



37 нче рәсем



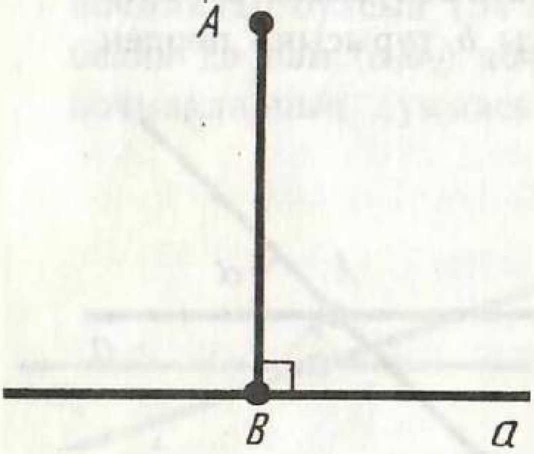
38 нче рәсем

a_1 дип тамгалыйк (38 нче рәсем). a_1 ярымтурысыннан башлап, 90° ка тигез булган (a_1b_1) почмагын салыйк. Ул вакытта b_1 нурын эченә алган туры a турысына перпендикуляр булыр.

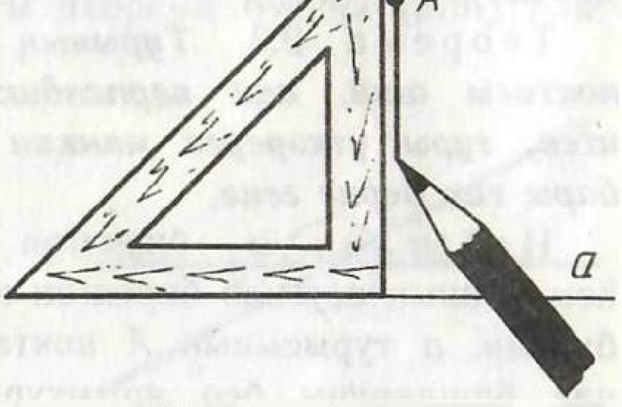
Төзелгән турыдан тыш шул ук A ноктасы аша узучы һәм a турысына перпендикуляр тагын бер туры бар дип уйлыйк. Бу турының b_1 нуры белән бер ярымъяссылыкта ятучы ярымтурысын c_1 дип тамгалыйк.

(a_1b_1) һәм (a_1c_1) почмакларының һәркайсы 90° ка тигез. Алар a_1 ярымтурысыннан башлап бер ярымъяссылыкка салынганнар. a_1 ярымтурысыннан башлап бу ярымъяссылыкка 90° ка тигез булган бер генә почмак салып була. Шуңа күрә A ноктасы аша узучы һәм a турысына перпендикуляр булган башка турының булуы мөмкин түгел. Теорема исбат ителде.

Б и л г е л ә м ә. Бирелгән турыга перпендикуляр туры кисемтәсенең бер очы аларның кисешү ноктасында ятса, ул кисемтә



39 нчы рәсем



40 нчы рәсем

бирелгән турыга *перпендикуляр* дип атала. Кисемтәнең бу очы перпендикулярның *нигезе* дип атала.

39 нчы рәсемдә AB перпендикуляры A ноктасыннан a турысына үткәрелгән. B ноктасы — перпендикулярның нигезе. Перпендикулярны сызым почмаклыгы ярдәмендә сызалар (40 нчы рәсем).

17. КАРШЫ КУЕП ИСБАТ ИТҮ

2.3 теоремасын исбат иткәндә без кулланган ысул *каршы* куеп *исбат итү* дип атала. Бу ысул белән исбат иткәндә башта теорема раслаганга капма-каршы фараз итәбез. Аннары, фикер йөртү юлы белән, аксиомаларга һәм инде исбат ителгән теоремаларга таянып, я теореманың шартына, я аксиомаларның берсенә, я элек исбат ителгән теоремага каршы булган нәтиҗәгә киләбез. Шуның нигезендә безнең фараз дөрес булмаган, димәк, теореманың раславы дөрес дигән нәтиҗәгә киләбез.

Мисал өчен без моны 2.3 теоремасын исбатлауда ачыклыйк. Теорема турының һәр ноктасы аша бу турыга перпендикуляр итеп *бары тик бер генә* туры үткәрергә мөмкин дип раслый. Шундый турыларны икене үткәрергә мөмкин дип фараз итеп, без бирелгән ярымтурыдан башлап бирелгән ярымъяссылыкка градуслы үлчәме бер үк булган (90°) ике почмак салырга мөмкин дигән нәтиҗәгә килдек. Бу почмаклар салу аксиомасына каршы килә. Әлеге аксиома буенча бирелгән ярымтурыдан башлап бирелгән ярымъяссылыкка градуслы үлчәме бирелгән *бары тик бер генә* почмак салып була.

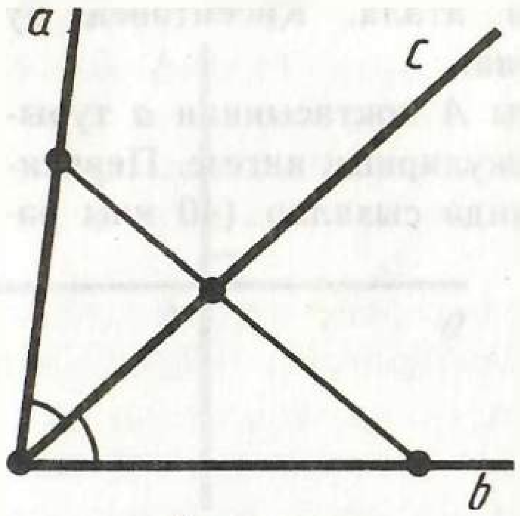
18. ПОЧМАКНЫҢ БИССЕКТРИСАСЫ

Билгеләмә[1]. Почмакның түбәсеннән чыгып, аның яклары арасыннан үтүче һәм почмакны урталай бүлүче нур почмакның биссектрисасы дип атала.

41 нче рәсемдә сез (ab) почмагын күрәсез. c нуры почмак-

---

[1] Киләчәктә «билгеләмә» сүзен язмабыз, билгеләнергә тиеш төшенчәне *курсив* белән күрсәтербез.



41 нче рәсем

ның түбәсеннән чыга, аның яклары арасыннан уза һәм почмакны урталай бүлә:

$$\angle(ac) = \angle(bc) = \frac{\angle(ab)}{2}.$$

Мәсьәлә (17). Почмакның биссектрисасы почмак яклары белән 90° тан зур булмаган почмаклар төзүен исбат итегез.

Чишү. Теләсә нинди почмакның градуслы үлчәме 180° тан зур түгел икәнен без беләбез инде. Шуңа күрә аның яртысы 90° тан зур түгел.

19. ГЕОМЕТРИЯДӘН ӨЛГЕРҮ ӨЧЕН НӘРСӘ ЭШЛӘРГӘ КИРӘК

Геометрияне өйрәнгәндә узган материалдан нәрсәне дә булса белмәү яңа материалны аңламауга сәбәп булырга мөмкин. Мисал китерик.

Әйтик, дәрестә укытучы вертикаль почмакларның тигезлеге турындагы теореманы исбат итә. Бу исбатлауда чиктәш почмакларга билгеләмә һәм чиктәш почмакларның суммасы турындагы теорема файдаланылганны сез беләсез инде. Әгәр дә сез нинди почмаклар чиктәш почмаклар дип аталганны, чиктәш почмакларның суммасы турындагы теореманы белмәсәгез, сез бу исбатлауны аңламыйсыз. Нәтиҗәдә бу дәрес сезнең өчен бушка узган вакыт кына була. Сезнең чиктәш почмакларны белмәвегезгә вертикаль почмакларның тигезлеге турындагы теореманы белмәү генә өстәләчәк.

Шуңа күрә геометриядән яхшы өлгерер өчен өйрәнелгән материалның төп нәтиҗәләрен белергә кирәк. Ә моның өчен узган материалны контроль сораулар буенча кабатларга кирәк. Контроль сораулар буенча кабатлау болай эшләнә. Сорауны укыгыз. Аны үзегез өчен ачыклагыз. Әгәр нинди дә булса фигурага билгеләмә бирергә кирәк булса, шундый билгеләмә биреп ка-

рагыз. Билгеләнә торган фигурага кулдан гына сызым сызу файдалы була. Әгәр сорауда теорема турында сүз барса, теореманы әйтегез, бу теореманың шартын һәм нәтиҗәсен ачыклагыз. Кулдан гына теореманың эчтәлеген күрсәтүче сызым сызыгыз. Һәр кабатлауда теореманы исбатлау мәҗбүри түгел.

Яңа материалны өйрәнгәндә нәрсәне булса да белмәгәнегезне аңлау белән һәрвакыт узган материалны кабатлагыз.

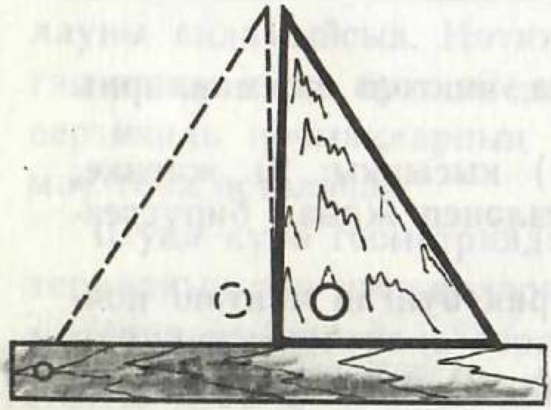
КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Нинди почмаклар чиктәш почмаклар дип атала?
2. Чиктәш почмакларның суммасы 180° ка тигез икәнен исбатлагыз.
3. Әгәр ике почмак үзара тигез булсалар, аларга чиктәш почмакларның да тигез булуын исбат итегез.
4. Нинди почмак туры (кысынкы, җәенке) почмак дип атала?
5. Туры почмакка чиктәш почмакның да туры икәнен исбат итегез.
6. Нинди почмаклар вертикаль почмаклар дип атала?
7. Вертикаль почмакларның тигез икәнен исбатлагыз.
8. Әгәр ике туры кисешкәндә ясалган почмакларның берсе туры булса, аларның калган өчесенең дә туры почмак булуын исбат итегез.
9. Нинди турылар перпендикуляр дип атала? Турыларның перпендикуляр икәнен аңлату өчен нинди тамга файдаланыла?
10. Турының теләсә кайсы ноктасы аша аңа перпендикуляр итеп бары тик бер генә туры үткәрел булуын исбатлагыз.
11. Турыга перпендикуляр нәрсә ул?
12. Каршы куеп исбат итүнең нәрсә икәнен аңлатыгыз.
13. Почмакның биссектрисасы дип нәрсә атала?

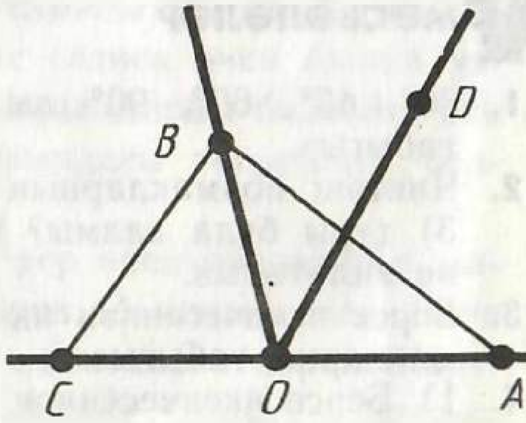
МӘСЬӘЛӘЛӘР

1. 30°, 45°, 60°, 90° лы почмакларга чиктәш почмакларны табыгыз.
2. Чиктәш почмакларның икесе дә: 1) кысынкы; 2) җәенке; 3) туры була аламы? Нәрсәгә нигезләнеп җавап бирүегезне аңлатыгыз.
3. Берсе икенчесеннән ике тапкыр зуррак булган чиктәш почмакларны табыгыз.
4. 1) Берсе икенчесеннән 30° ка зуррак; 2) аермалары 40° ка тигез; 3) берсе икенчесеннән 3 тапкыр кечерәк; 4) үзара тигез булган чиктәш почмакларны табыгыз.

5. Сәгать: 1) 6 сәг; 2) 3 сәг; 3) 4 сәг не күрсәткәндә, аның сәгатьне һәм минутны күрсәтүче телләре арасында нинди почмак ясала?
6. Градуслы үлчәмнәренең чагыштырмасы: 1) 2 : 3; 2) 3 : 7; 3) 11 : 25; 4) 22 : 23 кебек булган чиктәш почмакларны табыгыз.
7. Ике туры кисешкәндә барлыкка килгән почмакларның берсе 30° ка тигез. Калган почмаклар нинди зурлыкта?
8. Әгәр бер үк почмак белән чиктәш булган ике почмакның суммасы 100° ка тигез булса, ул почмак күпмегә тигез?
9. Ике туры кисешүдән барлыкка килгән ике почмакның суммасы 50° ка тигез. Бу почмакларны табыгыз.
10. Ике туры кисешүдән барлыкка килгән почмакларның берсе икенчесеннән 4 тапкыр зуррак. Бу почмакларны табыгыз.
11. Ике туры кисешүдән барлыкка килгән почмакларның берсе икенчесеннән 50° ка кечерәк. Бу почмакларны табыгыз.
12. Ике туры кисешкәндә барлыкка килгән почмакларның өчесенең суммасы 270° ка тигез булса, бу почмакларны табыгыз.
13. Ике туры кисешкәндә барлыкка килгән дүрт почмакның өчесе тигез булсалар, турыларның перпендикуляр икәнен исбатлагыз.
14. Сызым почмаклыгының почмагы туры почмак икәнен линейка ярдәмендә ничек тикшерергә (42 нче рәсем)?
15. 1) 30°; 2) 52°; 3) 172° ка тигез дип бирелгән почмакның ягы белән аның биссектрисасы арасындагы почмак күпмегә тигез?
16. Ягы белән биссектрисасы арасындагы почмак: 1) 60°; 2) 75°; 3) 89° ка тигез булган почмакны табыгыз.
17. Почмакның биссектрисасы почмак яклары белән 90° тан зур булмаган почмаклар төзүен исбат итегез.
18*. Әгәр почмакның түбәсеннән чыккан нур аның яклары белән үзара тигез кысынкы почмаклар ясаса, ул почмакның биссектрисасы була, шуны исбатлагыз.



42 нче рәсем



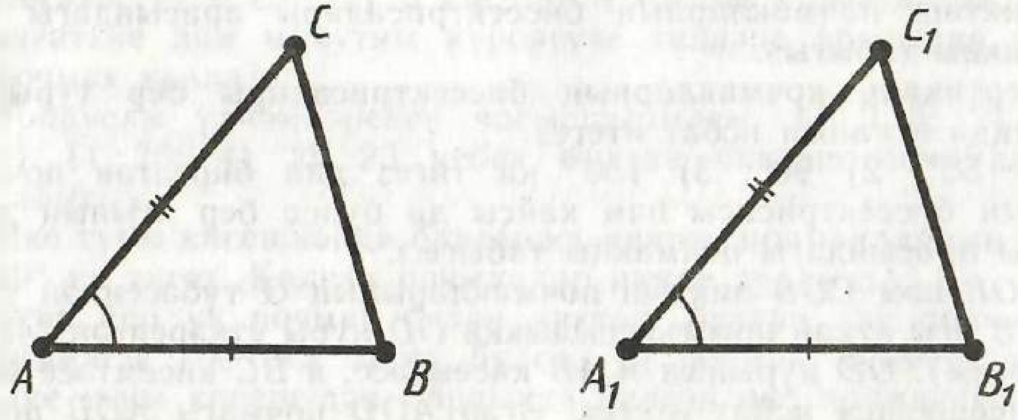
43 нче рәсем

19. Чиктәш почмакларның биссектрисалары арасындагы почмакны табыгыз.
20. Вертикаль почмакларның биссектрисалары бер туры өстендә ятканын исбат итегез.
21. 1) 50°; 2) 90°; 3) 150° ка тигез дип бирелгән почмакның биссектрисасы һәм кайсы да булса бер ягының дәвамы арасындагы почмакны табыгыз.
22. *AOB* һәм *COB* чиктәш почмакларының *O* түбәсеннән уртак *OB* ягы яткан ярымъяссылыкка *OD* нуры үткәрелгән (43 нче рәсем). *OD* нурының я *AB* кисемтәсе, я *BC* кисемтәсе белән кисешкәнен исбат итегез. Әгәр *AOD* почмагы *AOB* почмагыннан кечерәк (зуррак) булса, *OD* нуры кисемтәләрнең кайсысы белән кисешә? Җавапны аңлатыгыз.
23. (aa_1) җәелгән почмагы түбәсеннән бер үк ярымъяссылыкка b һәм c нурлары үткәрелгән. Әгәр: 1) $\angle(ab)=50°$, $\angle(ac)=70°$; 2) $\angle(a_1b)=50°$, $\angle(ac)=70°$; 3) $\angle(ab)=60°$, $\angle(a_1c)=30°$ булса, (bc) почмагы күпмегә тигез?
24. (aa_1) җәелгән почмагының түбәсеннән бер үк ярымъяссылыкка b һәм c нурлары үткәрелгән. $\angle(ab)=60°$, $\angle(ac)=30°$ икәне билгеле. (a_1b), (a_1c) һәм (bc) почмакларын табыгыз.
25. *AB* ярымтурысыннан төрле ярымъяссылыкларга *BAC* һәм *BAD* почмаклары салынган. Әгәр: 1) $\angle BAC=80°$, $\angle BAD=170°$; 2) $\angle BAC=87°$, $\angle BAD=98°$; 3) $\angle BAC=140°$, $\angle BAD=30°$; 4) $\angle BAC=60°$, $\angle BAD=70°$ булса, *CAD* почмагын табыгыз.
26*. Бер ноктадан чыгучы өч нур: a, b, c бирелгән. $\angle(ab)=\angle(ac)=\angle(bc)=120°$ икәнлеге билгеле. 1) Бу нурларның кайсы да булса берсе калган ике нур белән ясалган почмакның яклары арасыннан узамы? 2) Туры бирелгән нурларның өчесен дә кисеп үтә аламы? Җавапны аңлатыгыз.

§ 3. ӨЧПОЧМАКЛАР ТИГЕЗЛЕГЕНЕҢ БИЛГЕЛӘРЕ

20. ӨЧПОЧМАКЛАР ТИГЕЗЛЕГЕНЕҢ БЕРЕНЧЕ БИЛГЕСЕ

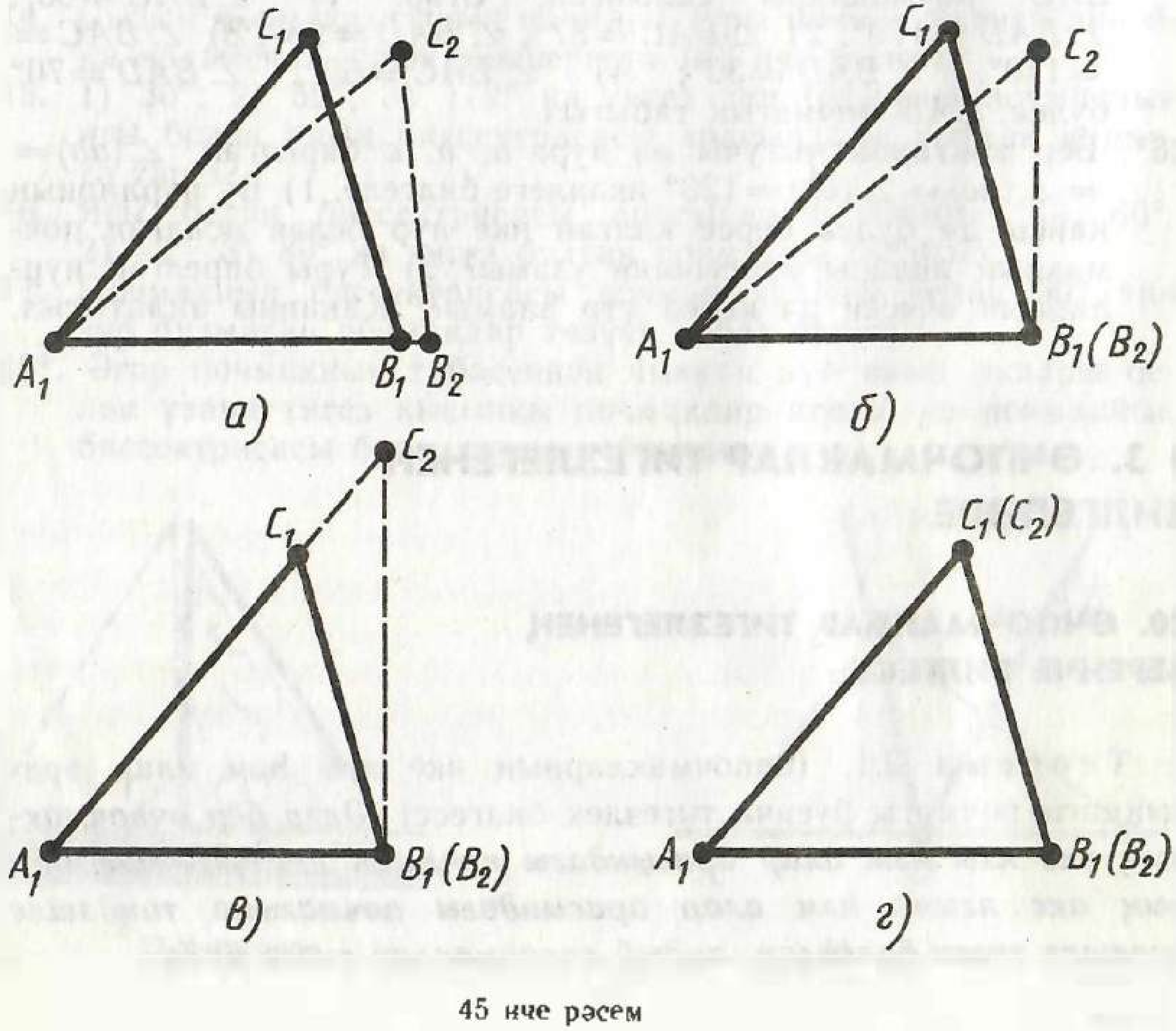
Теорема 3.1. (өчпочмакларның ике ягы һәм алар арасындагы почмагы буенча тигезлек билгесе). ***Әгәр бер өчпочмакның ике ягы һәм алар арасындагы почмагы икенче өчпочмакның ике ягына һәм алар арасындагы почмагына тиңдәшле рәвештә тигез булсалар, андый өчпочмаклар тигез була.***



44 нче рәсем

Исбатлау. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ булсын (44 нче рәсем). Өчпочмакларның тигез икәнен исбатлыйк.

$A_1B_2C_2$ — ABC өчпочмагына тигез өчпочмак булсын, аның B_2 түбәсе A_1B_1 нуры өстендә ята, ә C_2 түбәсе C_1 түбәсе белән A_1B_1 турысына карата бер ярымъяссылыкта ята (45 нче рәсем, *а*).



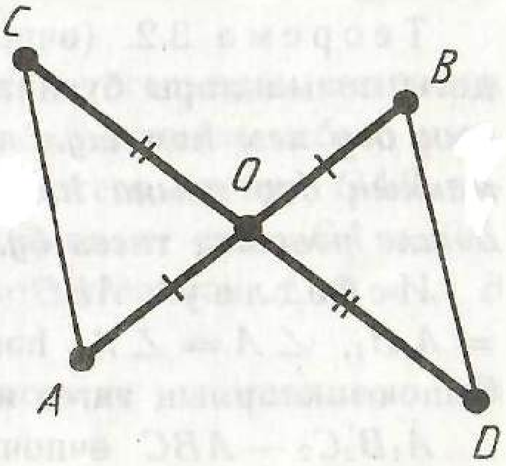
45 нче рәсем

$A_1B_1 = A_1B_2$ булганга күрә, B_2 ноктасы B_1 ноктасы белән тәңгәл килә (45 нче рәсем, *б*). $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$ булганга күрә, A_1C_2 нуры A_1C_1 нуры белән тәңгәл килә (45 нче рәсем, *в*). $A_1C_1 = A_1C_2$ булганлыктан, C_2 түбәсе C_1 түбәсе белән тәңгәл килә (45 нче рәсем, *г*).

Шулай итеп, $A_1B_1C_1$ өчпочмагы $A_1B_2C_2$ өчпочмагы белән тәңгәл килә, димәк, ABC өчпочмагына тигез була. Теорема исбат ителде.

М ә с ь ә л ә (1). AB һәм CD кисемтәләре аларның икесенең дә урталары булган O ноктасында кисешәләр. Әгәр $AC = 10$ м булса, BD кисемтәсе күпмегә тигез?

Ч и ш у. AOC һәм BOD өчпочмаклары өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесе буенча тигез булалар (46 нчы рәсем). Аларның AOC һәм BOD почмаклары вертикаль почмаклар булганга тигезләр, ә $OA = OB$ һәм $OC = OD$, чөнки O ноктасы AB һәм CD кисемтәләренең уртасы. AOC һәм BOD өчпочмаклары тигез булганлыктан, аларның AC һәм BD яклары тигез була. Мәсьәләнең шарты буенча $AC = 10$ м, шуңа күрә $BD = 10$ м.



46 нчы рәсем

21. ТЕОРЕМАЛАР ИСБАТЛАГАНДА АКСИОМАЛАР ФАЙДАЛАНУ

Теоремалар исбатлаганда аксиомалар һәм исбатланган теоремалар файдаланырга рөхсәт ителгәнен без беләбез инде. Кагыйдә буларак, исбатлаганда аксиомаларның исемлектәге номерын түгел, ә аның эчтәлеген күрсәтәләр. Өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесен исбатлаганда без шулай эшләдек тә инде (теорема 3.1). Файдаланылган аксиомаларны күрсәтеп, бу исбатлауны тагын тикшерик.

Исбатлау түбәндәге сүзләр белән башлана: «$A_1B_2C_2$ — ABC өчпочмагына тигез өчпочмак булсын, аның B_2 түбәсе A_1B_1 нуры өстендә ята, ә C_2 түбәсе C_1 түбәсе белән A_1B_1 турысына карата

бер ярымъяссылыкта ята». Билгеле булганча, VIII аксиома буенча андый өчпочмак бар.

Аннан соң $A_1B_1 = A_1B_2$ булганлыктан, B_1 һәм B_2 түбәләре тәңгәл килә дип әйтелә. Монда кисемтәләр салу аксиомасы (VI нчы аксиома) файдаланыла.

Шуннан соң $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$ булганга, A_1C_2 һәм A_1C_1 нурлары тәңгәл килә дип әйтәбез. Монда почмаклар салу аксиомасы (VII нче аксиома) файдаланыла.

Ниһаять, $A_1C_1 = A_2C_2$ булганга күрә C_1 һәм C_2 түбәләре тәңгәл килә, диелә. Монда тагын VI аксиома файдаланыла.

Без теорема 3.1 не исбатлау аксиомаларга гына нигезләнгәнен күрәбез.

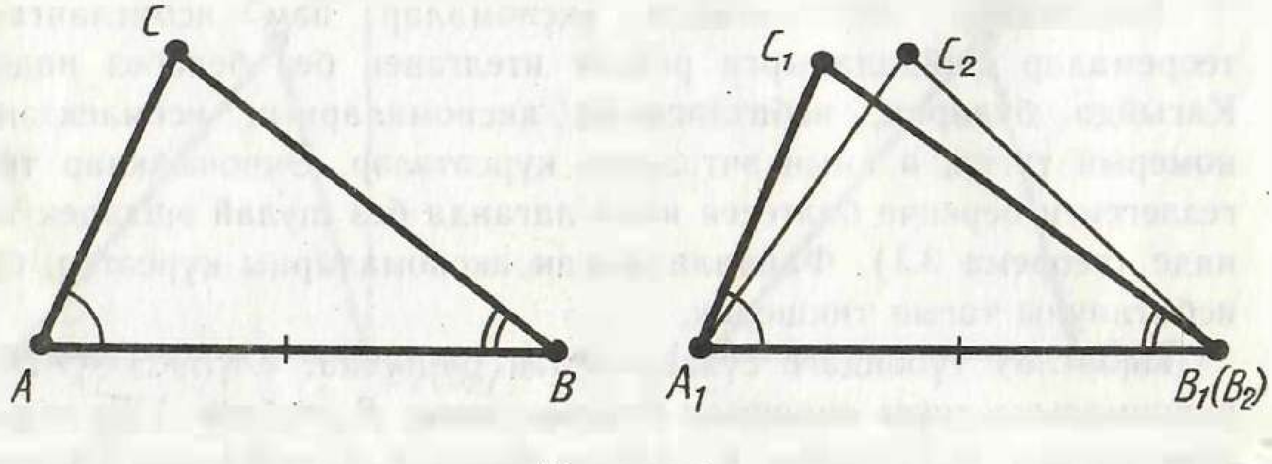
22. ӨЧПОЧМАКЛАР ТИГЕЗЛЕГЕНЕҢ ИКЕНЧЕ БИЛГЕСЕ

Теорема 3.2. (өчпочмакларның бер ягы һәм шул як янындагы почмаклары буенча тигезлек билгесе). ***Әгәр бер өчпочмакның бер ягы һәм шул як янындагы почмаклары икенче өчпочмакның бер ягына һәм шул як янындагы почмакларына тиңдәшле рәвештә тигез булсалар, андый өчпочмаклар тигез була.***

Исбатлау. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ һәм $\angle B = \angle B_1$ булсын (47 нче рәсем). Өчпочмакларның тигез икәнен исбатлыйк.

$A_1B_2C_2$ — ABC өчпочмагына тигез өчпочмак булсын, аның B_2 түбәсе A_1B_1 нуры өстендә ята, ә C_2 түбәсе C_1 түбәсе белән A_1B_1 турысына карата бер ярымъяссылыкта ята.

$A_1B_2 = A_1B_1$ булганга, B_2 түбәсе B_1 түбәсе белән тәңгәл килә. $\angle B_1A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$ һәм $\angle A_1B_1C_2 = \angle A_1B_1C_1$ булганга, A_1C_2 нуры A_1C_1 нуры белән тәңгәл килә, ә B_1C_2 нуры B_1C_1 нуры



47 нче рәсем

белән тәңгәл килә. Шуңа күрә C_2 түбәсе C_1 түбәсе белән тәңгәл килә.

Шулай итеп, $A_1B_1C_1$ өчпочмагы $A_1B_2C_2$ өчпочмагы белән тәңгәл килә, димәк, ABC өчпочмагына тигез була. Теорема исбат ителде.

23. ТИГЕЗЬЯНЛЫ ӨЧПОЧМАК

Әгәр өчпочмакның ике ягы тигез булса, ул ***тигезьянлы*** дип атала. Бу тигез яклар өчпочмакның ***ян яклары*** дип, ә өченче ягы ***нигезе*** дип атала.

48 нче рәсемдә тигезьянлы өчпочмак сурәтләнгән, аның ян яклары AC һәм BC, ә нигезе AB.

Теорема 3.3 (тигезьянлы өчпочмакның почмаклары үзлеге). ***Тигезьянлы өчпочмакның нигезе янындагы почмаклары тигез була.***

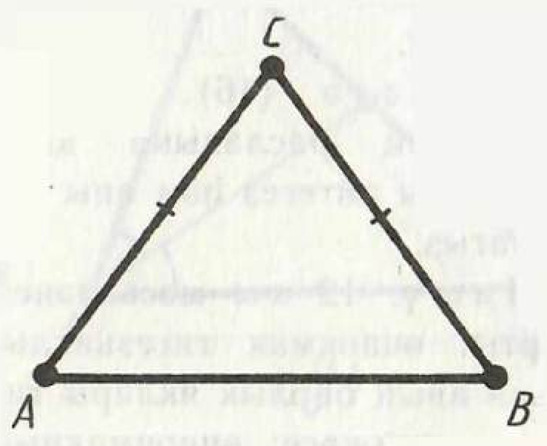
Исбатлау. ABC — нигезе AB булган тигезьянлы өчпочмак булсын (48 нче рәсем). Анда $\angle A = \angle B$ икәнен исбат итик.

Өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесе буенча CAB өчпочмагы CBA өчпочмагына тигез. Чыннан да, $CA = CB$, $CB = CA$, $\angle C = \angle C$. Өчпочмаклар тигезлегеннән $\angle A = \angle B$ килеп чыга. Теорема исбат ителде.

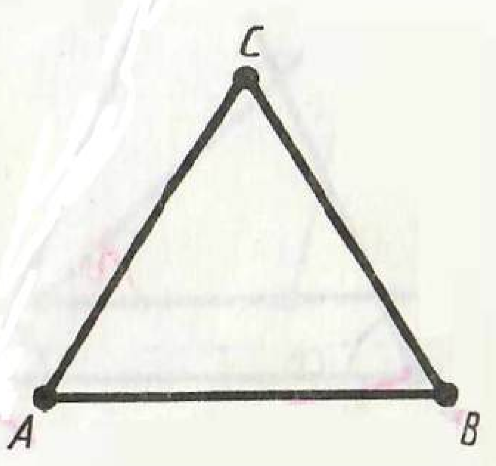
Барлык яклары тигез булган өчпочмак ***тигезьяклы*** дип атала.

Мәсьәлә (12). Тигезьяклы өчпочмакның барлык почмаклары тигез икәнен исбат итегез.

Чишү. ABC — бирелгән тигезьяклы өчпочмак булсын. $AB = BC = CA$ (49 нчы рәсем). $AB = BC$, шуңа күрә бу



48 нче рәсем



49 нчы рәсем

өчпочмак AC нигезле тигезьянлы өчпочмак була. 3.3 теоремасы буенча $\angle C = \angle A$. $BC = CA$ булганлыктан, ABC өчпочмагы тигезьянлы өчпочмак. AB аның нигезе. 3.3 теоремасы буенча $\angle A = \angle B$. Шулай итеп, $\angle C = \angle A = \angle B$, ягъни өчпочмакның барлык почмаклары тигез.

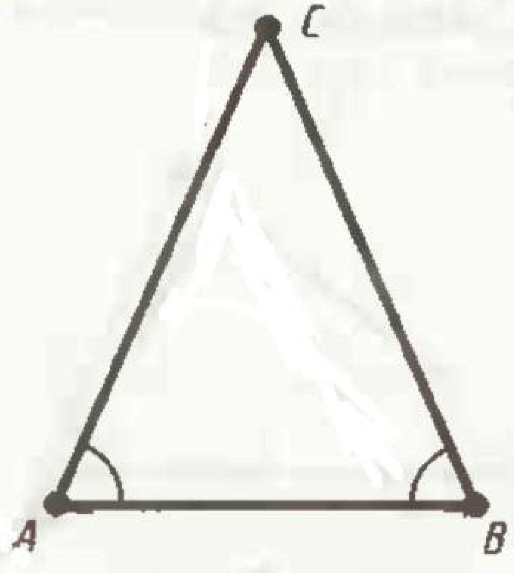
24. КИРЕ ТЕОРЕМА

Теорема 3.4 (тигезьянлы өчпочмакның билгесе). ***Әгәр өчпочмакның ике почмагы тигез икән, ул тигезьянлы була.***

Исбатлау. ABC өчпочмагында $\angle A = \angle B$ булсын (50 нче рәсем). Аның нигезе AB булган тигезьянлы өчпочмак икәнен исбат итик.

Өчпочмаклар тигезлегенең икенче билгесе буенча ABC өчпочмагы BAC өчпочмагына тигез. Чыннан да, $AB = BA$. $\angle B = \angle A$, $\angle A = \angle B$. Өчпочмаклар тигезлегеннән $AC = BC$ була. Димәк, билгеләмә буенча, ABC өчпочмагы тигезьянлы. Теорема исбат ителде.

3.4 теоремасы 3.3 теоремасына *кире теорема* була. 3.3 теоремасының нәтиҗәсе 3.4 теоремасының шарты була. 3.3 теоремасының шарты 3.4 теоремасының нәтиҗәсе була. Һәрбер теоремага да кире теорема булмый, ягъни әгәр бирелгән теорема дөрес икән, аңа кире теорема дөрес булмаска мөмкин. Моны вертикаль почмаклар турындагы теорема мисалында аңлатыйк. Бу теорема болай әйтелә: әгәр ике почмак вертикаль булса, алар тигез булалар. Аңа кире теорема болай булыр иде: әгәр ике почмак тигез булса, алар вертикаль почмаклар була. Бу инде дөрес түгел. Үзара тигез ике почмакның вертикаль почмаклар булуы мәҗбүри түгел.



50 нче рәсем

Мәсьәлә (16). 12 нче мәсьәләнеңраславына кире теореманы әйтегез һәм аны исбатлагыз.

Чишү. 12 нче мәсьәләнең шарты: өчпочмак тигезьяклы, ягъни аның барлык яклары тигез, ә нәтиҗәсе: өчпочмакның

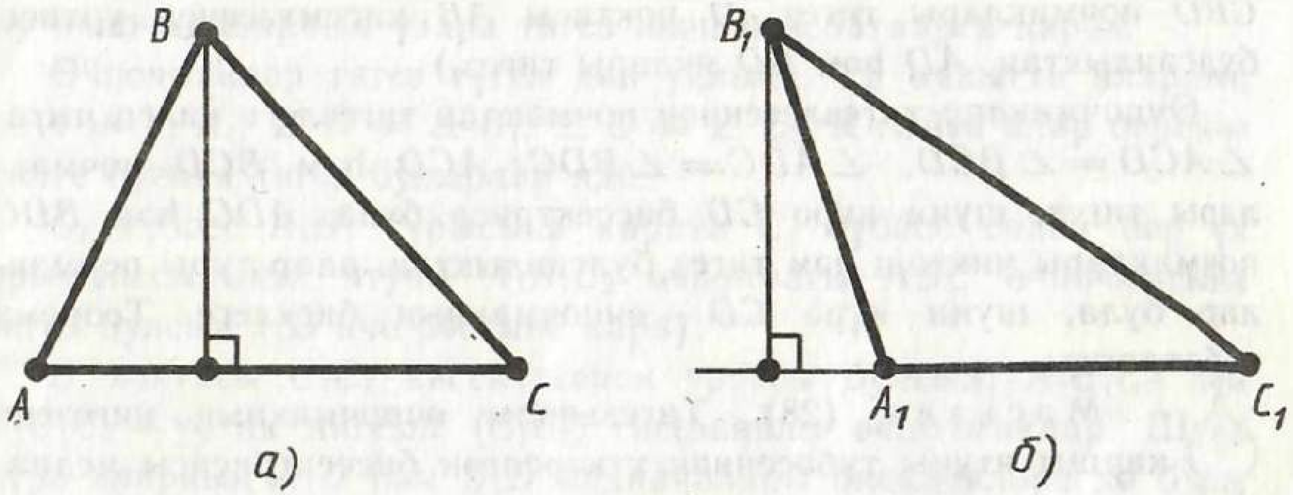
барлык почмаклары тигез. Шуңа күрә кире теорема болай әйтелергә тиеш: әгәр өчпочмакның барлык почмаклары тигез икән, ул тигезьяклы була.

Бу теореманы исбат итик. ABC почмаклары тигез булган өчпочмак булсын: $\angle A = \angle B = \angle C$. $\angle A = \angle B$ булганга күрә, 3.4 теоремасы буенча $AC = CB$. $\angle B = \angle C$ булганга, 3.4 теоремасы буенча $AC = AB$. Шулай итеп, $AB = AC = CB$, ягъни өчпочмакның барлык яклары тигез. Димәк, билгеләмә буенча, ABC өчпочмагы тигезьяклы.

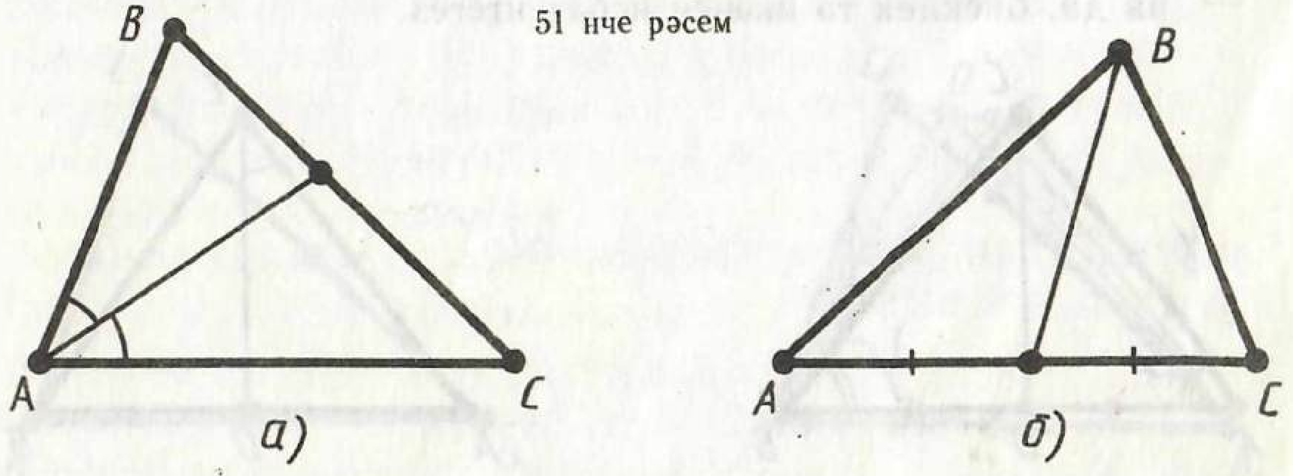
25. ӨЧПОЧМАКНЫҢ БИЕКЛЕГЕ, БИССЕКТРИСАСЫ ҺӘМ МЕДИАНАСЫ

Өчпочмакның бирелгән түбәсеннән каршы ягын эченә алган турыга төшерелгән перпендикулярны аның *биеклеге* дип атыйлар.

51 нче рәсемдә сез ике өчпочмак күрәсез, аларның B һәм B_1 түбәләреннән биеклекләр үткәрелгән. 51 нче *а* рәсемендә биеклекнең нигезе өчпочмакның ягы өстендә, 51 нче *б* рәсемендә өчпочмак ягының дәвамы өстендә ята.



51 нче рәсем



52 нче рәсем

Өчпочмакның бирелгән түбә янындагы почмак биссектрисасының шул түбә белән каршы ягын тоташтыручы кисемтәсен аның *биссектрисасы* дип атыйлар (52 нче *а* рәсем).

Өчпочмакның бирелгән түбәсе белән каршы ягының уртасын тоташтыручы кисемтәне өчпочмакның *медианасы* дип атыйлар (52 нче *б* рәсем).

26. ТИГЕЗЬЯНЛЫ ӨЧПОЧМАКНЫҢ МЕДИАНАСЫ ҮЗЛЕГЕ

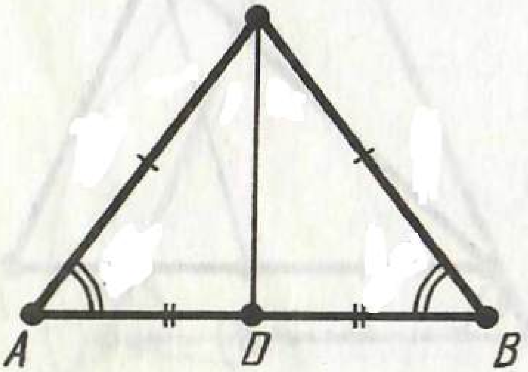
Теорема 3.5 (тигезьянлы өчпочмакның медианасы үзлеге). ***Тигезьянлы өчпочмакның нигезенә үткәрелгән медианасы биссектриса да, биеклек тә була.***

Исбатлау. ABC — нигезе AB булган бирелгән тигезьянлы өчпочмак һәм CD нигезгә үткәрелгән медиана булсын (53 нче рәсем).

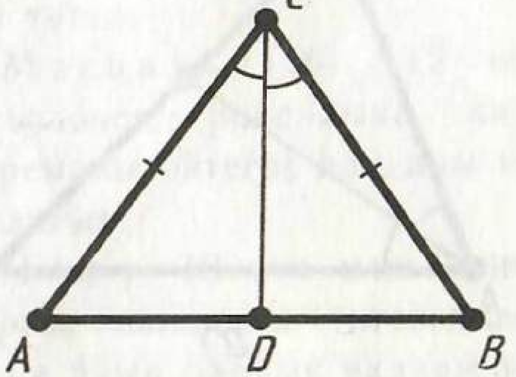
Өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесе буенча CAD һәм CBD өчпочмаклары тигез була. (ABC өчпочмагы тигезьянлы булганга, аларның AC һәм BC яклары тигез. Тигезьянлы өчпочмакның нигезе янындагы почмаклары буларак CAD һәм CBD почмаклары тигез. D ноктасы AB кисемтәсенең уртасы булганлыктан, AD һәм BD яклары тигез.)

Өчпочмаклар тигезлегеннән почмаклар тигезлеге килеп чыга: $\angle ACD = \angle BCD$, $\angle ADC = \angle BDC$. ACD һәм BCD почмаклары тигез, шуңа күрә CD биссектриса була. ADC һәм BDC почмаклары чиктәш һәм тигез булганлыктан, алар туры почмаклар була, шуңа күрә CD — өчпочмакның биеклеге. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (28). Тигезьянлы өчпочмакның нигезенә каршы ятучы түбәсеннән үткәрелгән биссектрисасы медиана да, биеклек тә икәнен исбат итегез.



53 нче рәсем



54 нче рәсем

Чишү. ABC — тигезьянлы өчпочмак, AB аның нигезе һәм CD биссектрисасы булсын (54 нче рәсем). Өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесе буенча ACD һәм BCD өчпочмаклары тигезләр. Аларның CD ягы уртак. AC һәм BC яклары тигезьянлы өчпочмакның ян яклары буларак, тигезләр; C түбәсе янындагы почмаклары тигезләр, чөнки CD — биссектриса. Өчпочмаклар тигезлегеннән AD һәм BD яклары тигез булалар. Димәк, CD — ABC өчпочмагының медианасы. Ә тигезьянлы өчпочмакның медианасы үзлеге буенча ул биеклек тә була.

27. ӨЧПОЧМАКЛАР ТИГЕЗЛЕГЕНЕҢ ӨЧЕНЧЕ БИЛГЕСЕ

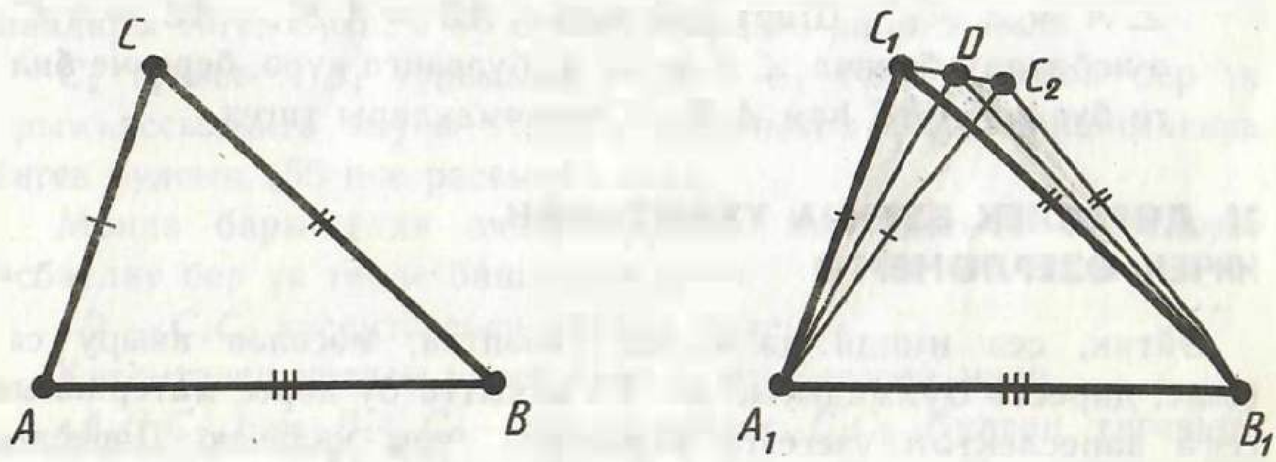
Теорема 3.6 (өчпочмакларның өч ягы буенча тигезлек билгесе). ***Әгәр бер өчпочмакның өч ягы икенче өчпочмакның өч ягына тиңдәшле рәвештә тигез булса, андый өчпочмаклар тигез була.***

Исбатлау. ABC һәм $A_1B_1C_1$ — яклары $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ булган ике өчпочмак булсын (55 нче рәсем). Бу өчпочмакларның үзара тигез икәнен исбатларга кирәк.

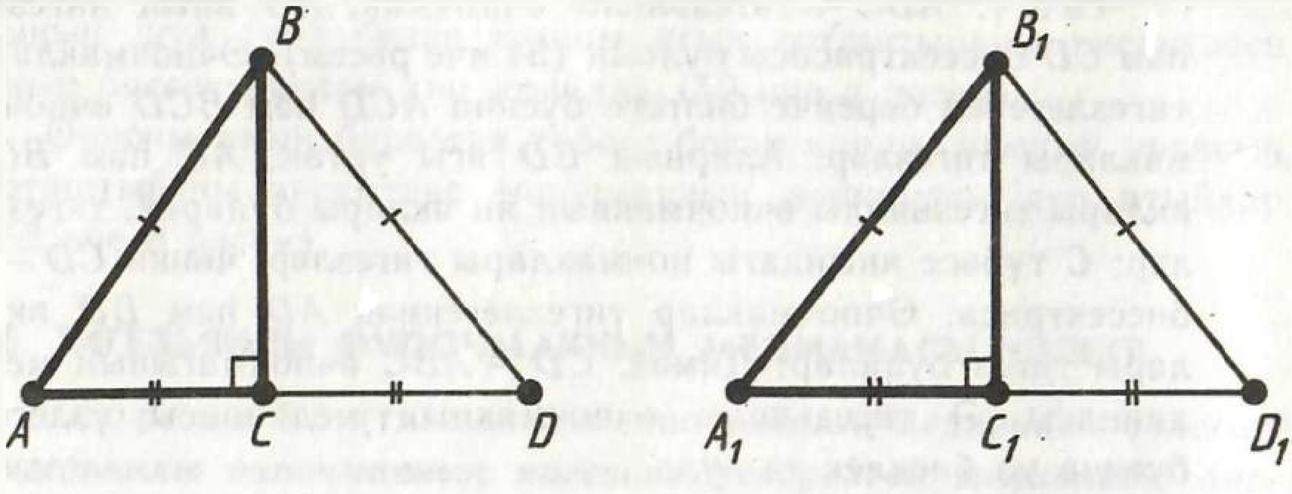
Өчпочмаклар тигез түгел дип уйлыйк. Ул вакытта аларның $\angle A \neq \angle A_1$; $\angle B \neq \angle B_1$, $\angle C \neq \angle C_1$. Югыйсә алар беренче билге буенча тигез булырлар иде.

C_2 түбәсе A_1B_1 турысына карата C_1 түбәсе белән бер үк ярымъяссылыкта ятучы $A_1B_1C_2$ өчпочмагы ABC өчпочмагына тигез булсын (55 нче рәсемне кара).

D ноктасы C_1C_2 кисемтәсенең уртасы булсын. $A_1C_1C_2$ һәм $B_1C_1C_2$ — уртак нигезле (C_1C_2) тигезьянлы өчпочмаклар. Шуңа күрә аларның A_1D һәм B_1D медианалары биеклекләре дә була.



55 нче рәсем



56 нчы рәсем

Димәк, A_1D һәм B_1D турылары C_1C_2 турысына перпендикуляр була. A_1D һәм B_1D турылары тәңгәл килми, чөнки A_1, B_1, D нокталары бер туры өстендә ятмый. Ләкин D ноктасы аша C_1C_2 турысына перпендикуляр итеп бары тик бер генә туры үткәреп була. Без каршылыкка очрадык. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (29). ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ икәнен исбат итегез.

Чишү. ABC һәм $A_1B_1C_1$ бирелгән өчпочмаклар булсын (56 нчы рәсем). CBA өчпочмагына тигез итеп CBD өчпочмагы, һәм $C_1A_1B_1$ өчпочмагына тигез булган $C_1D_1B_1$ өчпочмагы төзик.

ABD һәм $A_1B_1D_1$ өчпочмаклары өченче билге буенча тигез. Аларның шарт буенча $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$ булганга $AD = A_1D_1$; $BD = AB$, $B_1D_1 = A_1B_1$ булганга $BD = B_1D_1$. ABD һәм $A_1B_1D_1$ өчпочмакларының тигезлегеннән аларның почмакларының тигез икәнлеге килеп чыга: $\angle A = \angle A_1$. Шарт буенча $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, ә исбатлау буенча $\angle A = \angle A_1$ булганга күрә, беренче билге буенча ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары тигез.

28. ДӘРЕСЛЕК БУЕНЧА ҮЗЛЕГЕҢНӘН НИЧЕК ӘЗЕРЛӘНЕРГӘ

Әйтик, сез нинди дә булса сәбәптән, мәсәлән авыру сәбәпле, дәрестә булмадыгыз ди. Ул вакытта бу дәрес материалын сезгә дәреслектән үзегезгә өйрәнергә туры киләчәк. Дәреслек текстындагы җөмләләрне ашыкмыйча укырга кирәк, алдагы җөмләнең мәгънәсен аңламый торып, икенче җөмләгә күчмәгез. Кон-

крет мисал китерик — өчпочмаклар тигезлегенең өченче билгесен исбатлау. Шулай итеп, текстны укыйбыз:

«Әгәр бер өчпочмакның өч ягы икенче өчпочмакның өч ягына тиңдәшле рәвештә тигез булса...»

Бу җөмләнең мәгънәсен аңлар өчен өчпочмак, аның яклары һәм яклар тигезлегенең нәрсә икәнен белергә кирәк. Сез боларның барысын да беләсез инде, шуның өчен укыган җөмләнең мәгънәсе сезгә ачык аңлашыла. Укуны дәвам итәбез: «... андый өчпочмаклар тигез була».

Бу җөмләнең мәгънәсен аңлар өчен нинди өчпочмакларның тигез булганын белергә кирәк. Сез боларның барысын да беләсез инде. Шулай итеп, теореманың мәгънәсе сезгә ачык. Исбатлауны укыйбыз.

Исбатлау. «ABC һәм $A_1B_1C_1$ — яклары $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ булган ике өчпочмак булсын (55 нче рәсем). Өчпочмакларның үзара тигез икәнлеген исбатларга кирәк».

Монда барысы да ачык. Мәсьәләнең шартын канәгатьләндергән һәм үзара тигез икәнлекләре исбатланырга тиеш булган өчпочмаклар билгеләнә.

«Өчпочмаклар үзара тигез түгел дип уйлыйк».

Күргәнегезчә, теореманың нәтиҗәсенә капма-каршы фараз ителә. Димәк, моннан соңгы фикерләүдә без каршы фикергә килергә тиеш (каршы куеп исбатлау).

«Ул вакытта аларның $\angle A \neq \angle A_1$, $\angle B \neq \angle B_1$, $\angle C \neq \angle C_1$. Башкача булса, алар беренче билге буенча тигез булырлар иде».

Өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесен исегезгә төшерегез. Әгәр $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ тигезлекләренең берсе генә дөрес булса да ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары тигез була, ә бу безнең фаразга каршы килә.

C_2 түбәсе A_1B_1 турысына карата C_1 түбәсе белән бер үк ярымъяссылыкта ятучы $A_1B_1C_2$ өчпочмагы ABC өчпочмагына тигез булсын (55 нче рәсемне кара).

Монда барысы да ачык. Беренче һәм икенче билгеләрне исбатлау бер үк төрле башланып китә.

«D — C_1C_2 кисемтәсенең уртасы булсын».

Кисемтәнең уртасы нәрсә икәнен сез беләсез инде.

«$A_1C_1C_2$ һәм $B_1C_1C_2$ — уртак нигезе C_1C_2 булган тигезьянлы өчпочмаклар».

Бу раслауның мәгънәсен аңлар өчен, нинди өчпочмаклар тигезьянлы дип аталганын һәм аның кайсы ягы нигезе дип аталганын белергә кирәк.

«Шуңа күрә аларның A_1D һәм B_1D медианалары биеклекләре дә була».

Бу җөмләнең мәгънәсе сезгә ачык. Медиана һәм биеклекнең нәрсә икәнен һәм тигезьянлы өчпочмакның медианасы үзлеген сез беләсез инде.

«Димәк, A_1D һәм B_1D турылары C_1C_2 турысына перпендикуляр булалар».

Аермачык.

«A_1D һәм B_1D турылары тәңгәл килми, чөнки A_1, B_1, D нокталары бер туры өстендә ятмыйлар».

Аермачык. Әгәр D ноктасы A_1B_1 турысы өстендә ятса, C_1 һәм C_2 нокталары A_1B_1 турысына карата төрле ярымъяссылыкта булырлар иде.

«Ләкин C_1C_2 турысының D ноктасы аша аңа перпендикуляр итеп бер генә туры үткәреп була».

Аермачык. Ул теореманы сез беләсез.

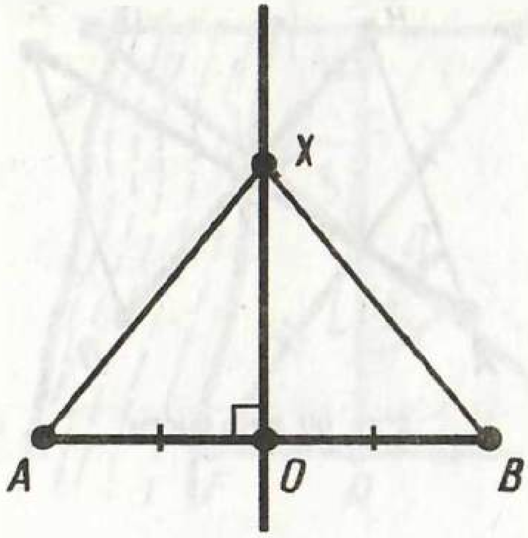
«Без каршылыкка очрадык».

Аермачык.

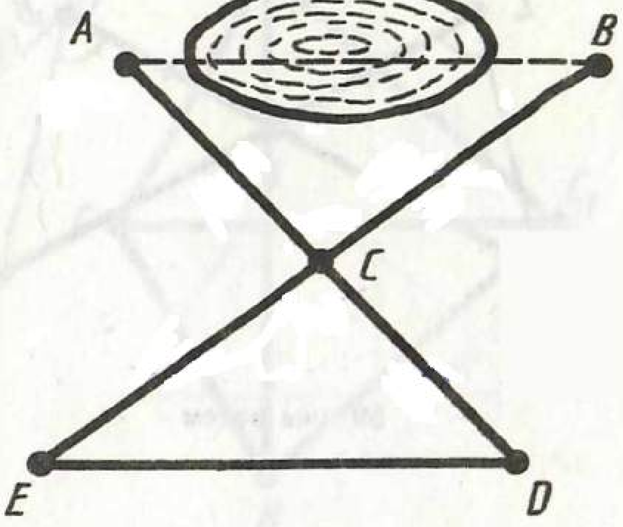
«Теорема исбатланды».

КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесен исбат итегез. Теорема 3.1 не исбатлаганда кайсы аксиомалар файдаланыла?
2. Өчпочмаклар тигезлегенең икенче билгесен әйтегез һәм аны исбат итегез.
3. Нинди өчпочмак тигезьянлы дип атала? Тигезьянлы өчпочмакның кайсы яклары ян яклары дип атала? Кайсы ягы нигезе дип атала?
4. Тигезьянлы өчпочмакның нигезе янындагы почмакларының тигез икәнен исбат итегез.
5. Нинди өчпочмак тигезьяклы дип атала?
6. Әгәр өчпочмакның ике почмагы тигез булса, аның тигезьянлы икәнен исбатлагыз.
7. Кире теореманың нәрсә икәнен аңлатыгыз. Мисал китерегез. Һәр теорема өчен дә кире теорема дөрес буламы?
8. Өчпочмакның биеклеге нәрсә ул?



57 нче рәсем

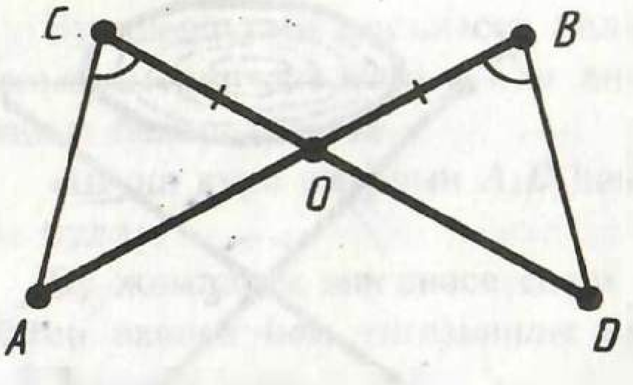


58 нче рәсем

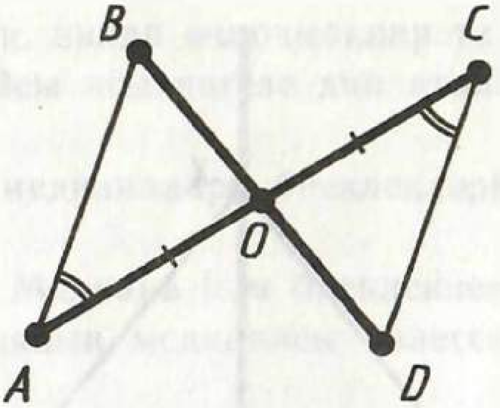
9. Өчпочмакның биссектрисасы нәрсә ул?
10. Өчпочмакның медианасы нәрсә ул?
11. Тигезьянлы өчпочмакның нигезенә үткәрелгән медианасы аның биссектрисасы да, биеклеге дә икәнен исбатлагыз.
12. Өчпочмаклар тигезлегенең өченче билгесен исбат итегез.

Мәсьәләләр

1. AB һәм CD кисемтәләре аларның икесенең дә урталары булган O ноктасында кисешәләр. Әгәр $AC = 10$ м икән, BD кисемтәсе күпмегә тигез?
2. AB кисемтәсенең уртасы O аша, AB турысына перпендикуляр итеп, туры үткәрелгән (57 нче рәсем). Бу турының һәр X ноктасы A һәм B нокталарыннан тигез ераклыкта ятканын исбат итегез.
3. ABC өчпочмагының AB ягы өстендә D ноктасы, ә $A_1B_1C_1$ өчпочмагының A_1B_1 ягы өстендә D_1 ноктасы алынган. ADC һәм $A_1D_1C_1$ өчпочмакларының һәм DB, D_1B_1 кисемтәләренең үзара тигез икәне билгеле. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларының тигез икәнен исбат итегез.
4. Җир өстендә туры буенча үтеп булмаслык A һәм B нокталары арасында ераклыкны үлчәү өчен (58 нче рәсем), A һәм B нокталарының икесенә дә барырлык һәм бу ике нокта да күренерлек итеп, C ноктасы сайлыйлар. AC һәм BC ераклыкларын маяклыйлар, аларны C ноктасыннан дәвам иттерәләр һәм $CD = AC$ һәм $EC = CB$ итеп үлчәп салалар. Ул чагында ED ераклыгы эзләнелгән ераклыкка тигез була. Ни өчен икәнен аңлатыгыз.

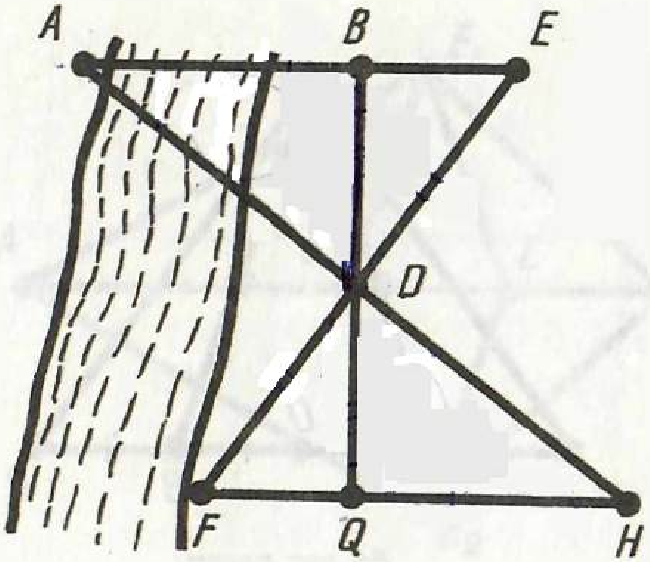


59 нчы рәсем

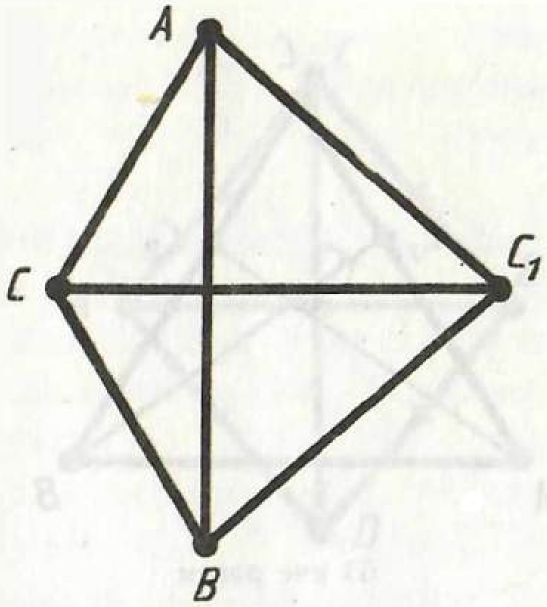


60 нчы рәсем

5. AB һәм CD кисемтәләре O ноктасында кисешәләр (59 нчы рәсем). Әгәр ACO почмагының DBO почмагына тигез һәм $BO = CO$ икәне билгеле булса, ACO һәм DBO өчпочмакларының тигез икәнен исбат итегез.
6. AC һәм BD кисемтәләре O ноктасында кисешәләр (60 нчы рәсем). Әгәр BAO почмагының DCO почмагына тигез һәм $AO = CO$ икәне билгеле булса, BAO һәм DCO өчпочмакларының тигез икәнен исбат итегез.
7*. Медианасы, өчпочмакның шул медиана белән бүленгән почмаклары буенча өчпочмакларның тигезлеген исбат итегез.
8. Җир өстендә бирелгән A һәм B нокталары (аларның берсе, мәсәлән, A ноктасы янына барып булмый) арасындагы ераклыкны үлчәү өчен, AB кисемтәсенең юнәлешен маяклыйлар (61 нче рәсем) һәм аның дәвамында ирекле озынлыктагы BE кисемтәсе салалар. A ноктасы күренерлек һәм B һәм E нокталарына барырга мөмкин булырлык итеп, җир өстендә D ноктасы сайлыйлар. BDQ һәм EDF турыларын маяклыйлар һәм $FD = DE$, $DQ = BD$ итеп үлчәп салалар. Шуннан соң, A ноктасына карап, FQ турысы буйлап AD турысы өстендә ятучы H ноктасын тапканчы баралар. Ул вакытта HQ эзләнелгән ераклыкка тигез була. Шуны исбатлагыз.
9. Тигезьянлы өчпочмакның периметры (якларының озынлыклары суммасы) 1 м га тигез, ә нигезе 0,4 м га тигез. Ян ягының озынлыгын табыгыз.
10. Тигезьянлы өчпочмакның периметры 7,5 м га, ә ян ягы 2 м га тигез. Нигезен табыгыз.
11. Тигезьянлы өчпочмакның периметры 15,6 м га тигез. Әгәр: 1) нигезе ян ягыннан 3 м га кыскарак; 2) нигезе ян ягыннан 3 м га озынрак булса, аның якларын табыгыз.
12. Тигезьяклы өчпочмакның барлык почмаклары тигез икәнен исбат итегез.
13. Нигезе AB булган ABC тигезьянлы өчпочмагының C ту-



61 нче рәсем



62 нче рәсем

бәсеннән башлап тигез кисемтәләр: CA ягы өстендә CA_1 кисемтәсе һәм CB ягы өстенә CB_1 кисемтәсе салынган. 1) CAB_1 һәм CBA_1; 2) ABB_1 һәм BAA_1 өчпочмакларының тигез икәнен исбат итегез.

14. ABC тигезьянлы өчпочмагының AB нигезендә A_1 һәм B_1 нокталары бирелгән. $AB_1 = BA_1$ икәне билгеле. AB_1C һәм BA_1C өчпочмакларының тигез икәнен исбат итегез.

15. ACC_1 һәм BCC_1 өчпочмаклары тигез. Аларның A һәм B түбәләре CC_1 турысыннан төрле якта яталар. ABC һәм ABC_1 өчпочмакларының тигезьянлы икәнен исбат итегез (62 нче рәсем).

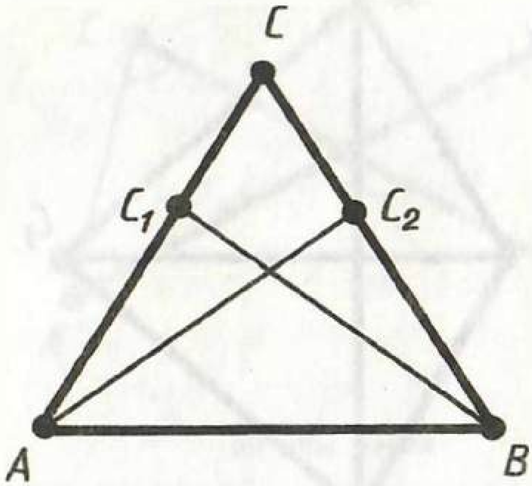
16. 12 нче мәсьәләнең раславына кире теореманы әйтегез һәм аны исбат итегез.

17. ABC өчпочмагының AC һәм BC яклары өстендә C_1 һәм C_2 нокталары алынган. Әгәр ABC_1 һәм BAC_2 өчпочмаклары тигез булсалар, ABC өчпочмагының тигезьянлы икәнен исбатлагыз (63 нче рәсем).

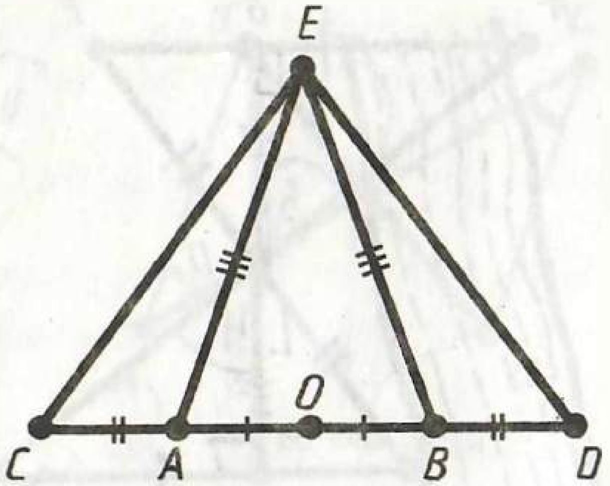
18. 1) Тигезьянлы өчпочмак якларының урталары шулай ук тигезьянлы өчпочмак түбәләре булганын исбат итегез. 2) Тигезьяклы өчпочмак якларының урталары шулай ук тигезьяклы өчпочмак түбәләре булганын исбат итегез.

19. 1) Кысынкы почмаклы өчпочмак сызыгыз. Сызым почмаклыгы һәм линейка ярдәмендә аның биеклекләрен үткәрегез. Бу күнегүне җәенке почмаклы өчпочмакта кабатлагыз.
2) Өчпочмак сызыгыз. Транспортир һәм линейка ярдәмендә аның биссектрисаларын үткәрегез.
3) Өчпочмак сызыгыз. Бүлемнәре булган линейка ярдәмендә аның медианаларын үткәрегез.

20. Тигезьянлы өчпочмакның: 1) нигезе янындагы түбәләреннән үткәрелгән биссектрисалары тигез; 2) шул ук түбә-



63 нче рәсем



64 нче рәсем

ләрдән үткәрелгән медианалары шулай ук тигез икәнен исбат итегез.

21. Тигез булган ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларының: 1) A һәм A_1 түбәләреннән үткәрелгән медианалары тигез; 2) A һәм A_1 түбәләреннән үткәрелгән биссектрисалары тигез икәнен исбат итегез.

22. A, B, C, D нокталары бер туры өстендә яталар, AB һәм CD кисемтәләренең урталары уртак. Әгәр ABE өчпочмагы AB нигезле тигезьянлы өчпочмак булса, CDE өчпочмагының да CD нигезле тигезьянлы өчпочмак икәнен исбат итегез (64 нче рәсем).

23. Почмагы, бу почмакның биссектрисасы һәм шул почмак янындагы ягы буенча өчпочмакларның тигез икәнлеген исбат итегез.

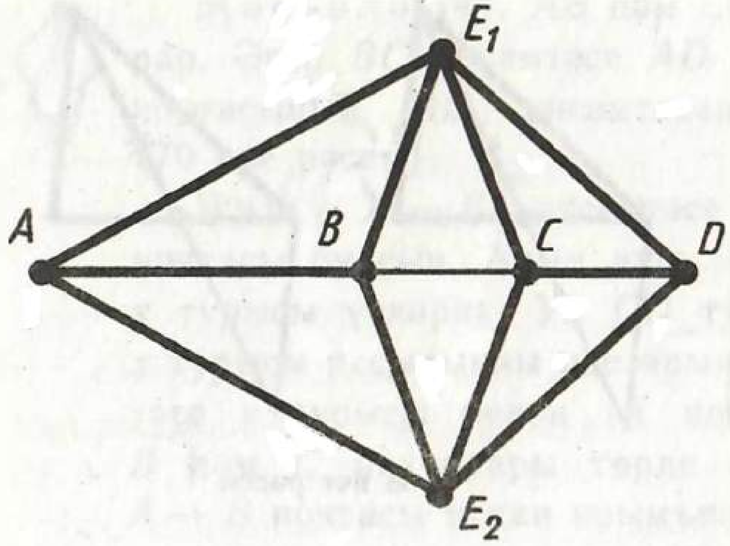
24. Нигезе AC булган ABC тигезьянлы өчпочмагында BM медианасы үткәрелгән. Аның өстендә D ноктасы билгеләнгән. 1) ABD һәм CBD; 2) AMD һәм CMD өчпочмакларының тигез икәнен исбат итегез.

25. Әгәр ABC өчпочмагының: 1) BD медианасы аның биеклеге дә; 2) BD биеклеге аның биссектрисасы да; 3) BD биссектрисасы аның медианасы да булса, бу өчпочмакның тигезьянлы икәнен исбатлагыз.

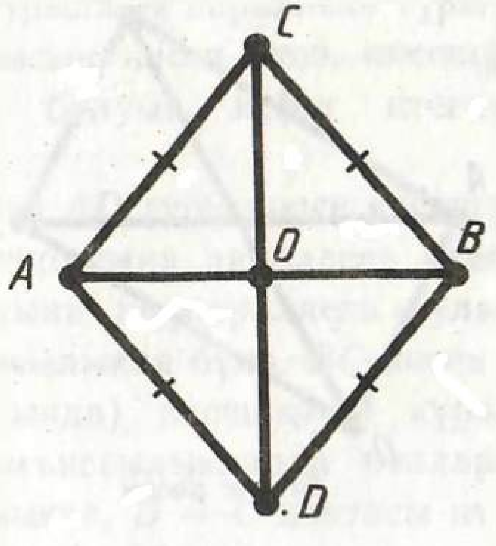
26. Нигезе уртак булган тигезьянлы ике өчпочмак бирелгән. Аларның нигезенә үткәрелгән медианаларының бер туры өстендә ятуын исбат итегез.

27. Нигезе AC булган ABC тигезьянлы өчпочмагында BD медианасы үткәрелгән. ABC өчпочмагының периметры 50 м га, ә ABD өчпочмагыныкы 40 м га тигез булса, BD медианасының озынлыгын табыгыз.

28. Тигезьянлы өчпочмакның нигезенә каршы ятучы түбәсеннән үткәрелгән биссектрисасы медиана да, биеклек тә булуын исбат итегез.



65 нче рәсем



66 нчы рәсем

29. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында: $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle C=\angle C_1=90°$. $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ икәнен исбат итегез.

30. Тигезьянлы өчпочмакның нигезенә төшерелгән биеклек медиана да, биссектриса да булуын исбат итегез.

31. ABC һәм ABC_1 — уртак нигезләре AB булган тигезьянлы өчпочмаклар. ACC_1 һәм BCC_1 өчпочмакларының тигез икәнен исбат итегез.

32*. A, B, C, D нокталары бер туры өстендә яталар. Әгәр ABE_1 һәм ABE_2 өчпочмаклары тигез булсалар, CDE_1 һәм CDE_2 өчпочмакларының да тигез икәнен исбат итегез (65 нче рәсем).

33. AB һәм CD кисемтәләре аларның икесенең дә уртасы булган O ноктасында кисешәләр. ACD һәм BDC өчпочмакларының тигез икәнен исбат итегез.

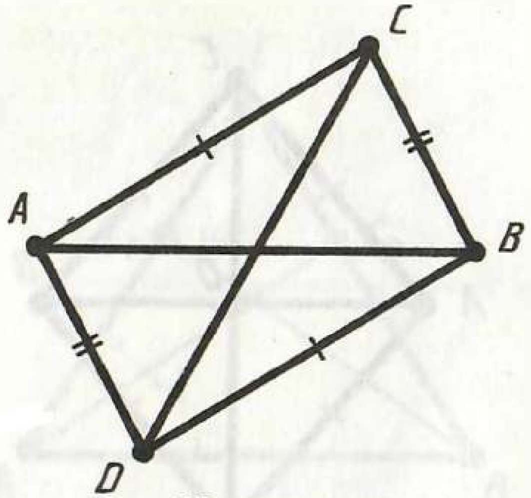
34. Ике ягы һәм аларның берсенә үткәрелгән медианә буенча өчпочмакларның тигез икәнлеген исбат итегез.

35. AB һәм CD кисемтәләре кисешәләр. Әгәр AC, CB, BD һәм AD кисемтәләре үзара тигез булсалар, ул вакытта AB нуры CAD почмагының биссектрисасы һәм CD нуры ACB почмагының биссектрисасы икәнен исбат итегез (66 нчы рәсем).

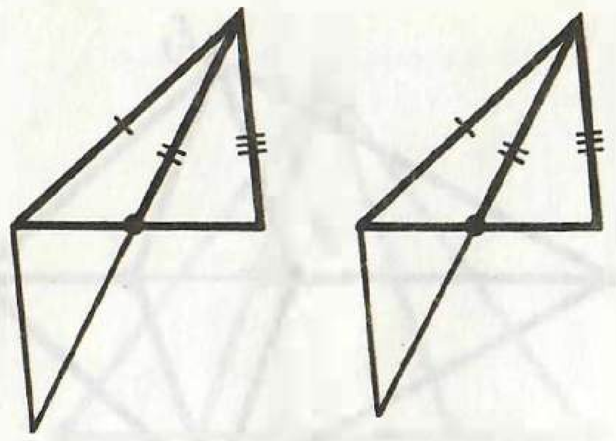
36*. 35 нче мәсьәләдәге AB һәм CD турыларының перпендикуляр икәнен исбат итегез.

37. ABC һәм BAD өчпочмаклары тигезләр, һәм шулай ук C һәм D нокталары AB турысының төрле ягында яталар (67 нче рәсем). 1) CBD һәм DAC өчпочмакларының тигез икәнен; 2) CD турысының AB кисемтәсен урталай бүлгәнен исбат итегез.

38. Бертигез озынлыктагы AB һәм CD кисемтәләре, $AO = OD$



67 нче рәсем



68 нче рәсем

булырлык итеп, O ноктасында кисешәләр. ABC һәм DCB өчпочмакларының тигез икәнен исбат итегез.

39. Бер үк түбәдән чыгучы ике ягы һәм медианасы буенча өчпочмакларның тигезлеген исбат итегез (68 нче рәсем).

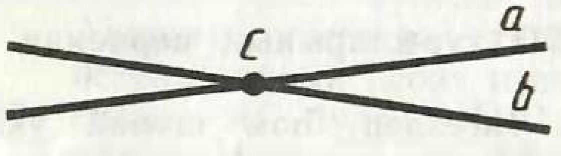
40. Ягы, шул якка үткәрелгән медианасы һәм шул як белән медиана арасындагы почмаклары буенча өчпочмакларның тигезлеген исбат итегез.

§ 4. ӨЧПОЧМАКНЫҢ ПОЧМАКЛАРЫ СУММАСЫ

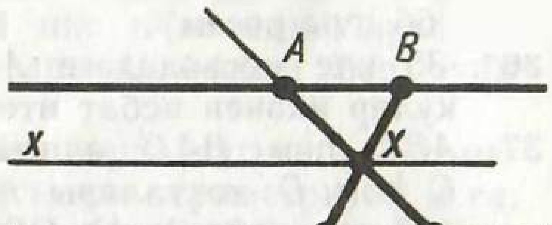
29. ТУРЫЛАРНЫҢ ПАРАЛЛЕЛЬЛЕГЕ

Теорема 4.1. ***Бер үк турыга параллель булган ике туры үзара да параллель була.***

Исбатлау. a һәм b турылары c турысына параллель булсыннар. a һәм b турылары параллель түгел дип уйлыйк (69 нчы рәсем). Ул вакытта алар ниндидер C ноктасында кисешәләр. Димәк, C ноктасы аша c турысына параллель булган ике туры уза. Моның булуы мөмкин түгел, чөнки бирелгән туры өстендә ятмаган нокта аша бу турыга параллель итеп бары тик бер генә туры үткәрергә мөмкин. Теорема исбатланды.



69 нчы рәсем



70 нче рәсем

М ә с ь ә л ә (4). *AB* һәм *CD* турылары параллель турылар. Әгәр *BC* кисемтәсе *AD* турысын кисеп үтсә, кисешү ноктасының *AD* кисемтәсенеке булуын исбат итегез (70 нче рәсем).

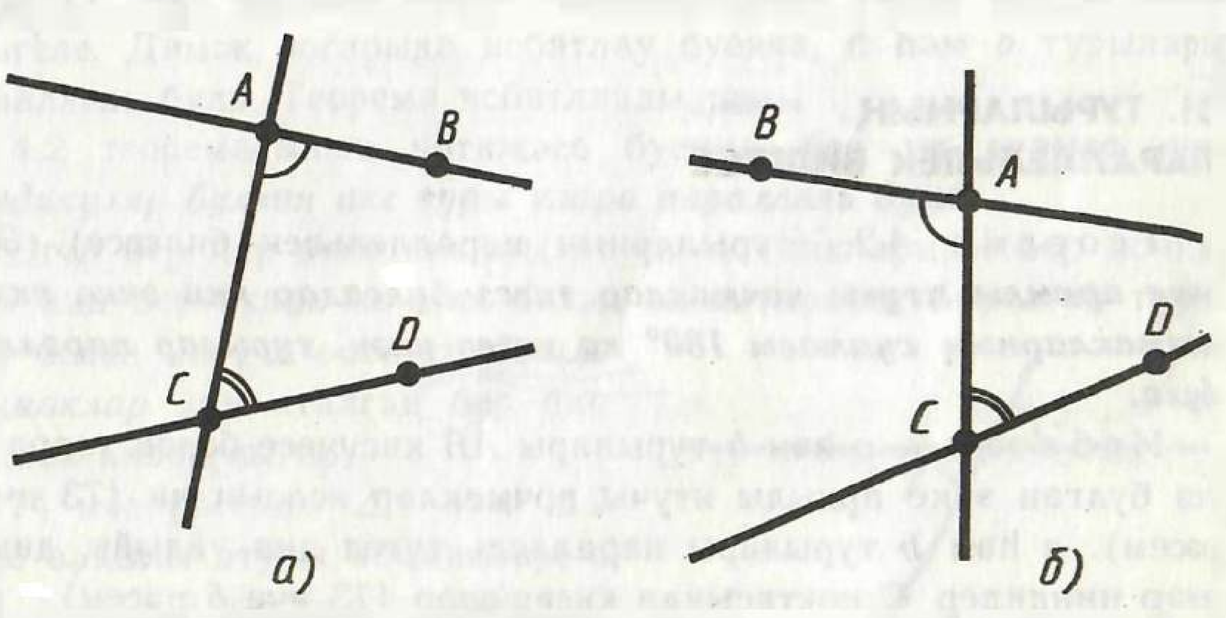
Ч и ш ү. *X* — *BC* кисемтәсе белән *AD* турысының кисешү ноктасы булсын. Аның аша *AB* турысына параллель итеп *x* турысы үткәрик. Ул *CD* турысына да параллель була. *x* турысы яссылыкны ике ярымъяссылыкка бүлә. *BC* кисемтәсе *x* турысы белән (*X* ноктасында) кисешкәнгә күрә, *B* һәм *C* нокталары төрле ярымъяссылыкларда яталар. *A* — *B* ноктасы яткан ярымъяссылыкта, *D* — *C* ноктасы яткан ярымъяссылыкта ята. Шуңа күрә *AD* кисемтәсе *x* турысы белән кисешә. Ә кисешү ноктасы *BC* кисемтәсенең *X* ноктасы була.

30. ИКЕ ТУРЫНЫ КИСҮЧЕ БЕЛӘН КИСТЕРГӘНДӘ ЯСАЛГАН ПОЧМАКЛАР

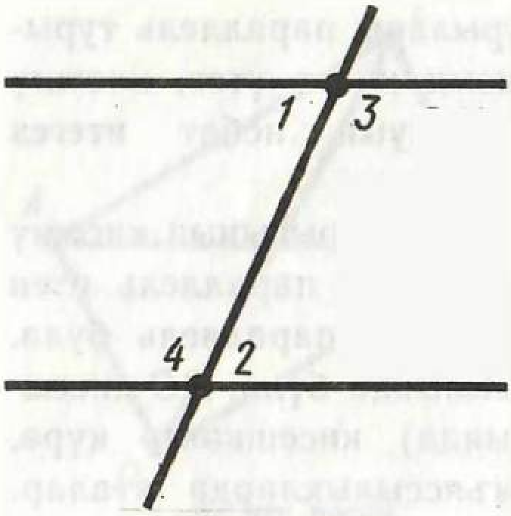
AB һәм *CD* турылары бирелсен. *AC* турысы *AB* һәм *CD* турыларын кисеп үтүче өченче туры булсын (71 нче рәсем). *AC* турысы *AB* һәм *CD* турыларына карата *кисүче* дип атала.

AB һәм *CD* турыларының *AC* кисүчесе белән кисешүләреннән ясалган парлы почмакларның махсус исемнәре бар.

Әгәр *B* һәм *D* нокталары *AC* турысына карата бер ярымъ-



71 нче рәсем



72 нче рәсем

яссылыкларда ятсалар, ул вакытта BAC һәм DCA почмаклары эчке аркылы ятучы почмаклар дип атала (71 нче б рәсеме).

AC кисүчесе AB һәм CD турылары белән ике пар эчке якташ почмаклар һәм ике пар эчке аркылы ятучы почмаклар ясый. Эчке аркылы ятучы почмакларның бер пары, мәсәлән, $\angle 1$ һәм $\angle 2$, эчке аркылы ятучы почмакларның икенче пары белән чиктәш булалар: $\angle 3$ һәм $\angle 4$ (72 нче рәсем).

Шуңа күрә эчке аркылы ятучы почмакларның бер пары тигез булса, эчке аркылы ятучы почмакларның икенче пары да тигез була.

Бер пар эчке аркылы ятучы почмаклар, мәсәлән $\angle 1$ һәм $\angle 2$, һәм бер пар эчке якташ почмаклар, мәсәлән, $\angle 2$ һәм $\angle 3$ нең бер почмагы уртак — $\angle 2$, калган ике почмагы чиктәш була: $\angle 1$ һәм $\angle 3$.

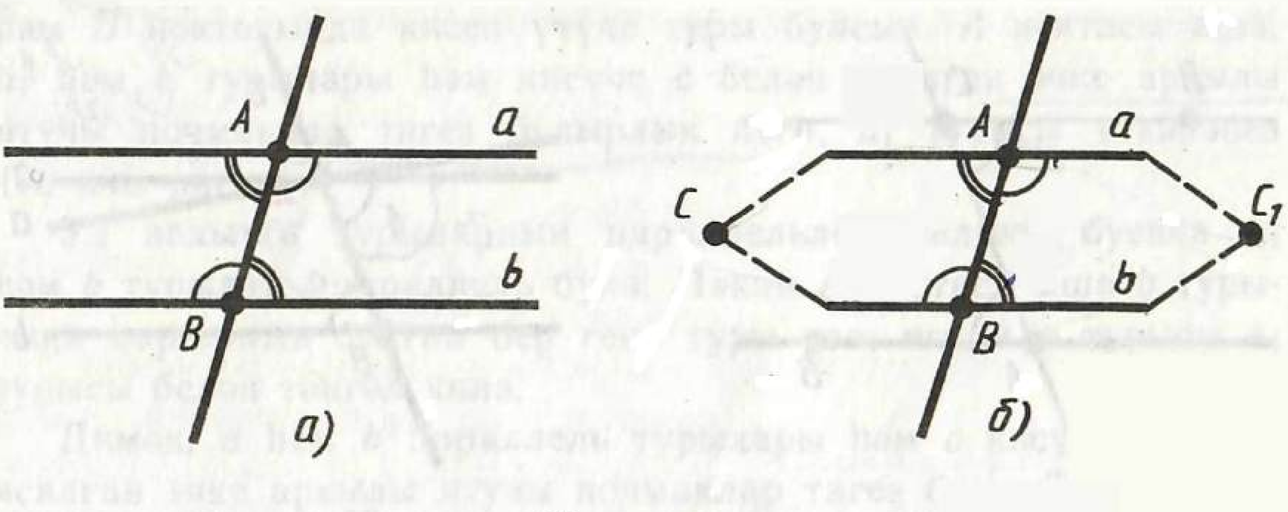
Шуңа күрә эчке аркылы ятучы почмаклар тигез булса, ул вакытта эчке якташ почмакларның суммасы 180° ка тигез була. Һәм киресенчә: әгәр эчке якташ почмакларның суммасы 180° ка тигез булса, ул вакытта эчке аркылы ятучы почмаклар тигез була.

31. ТУРЫЛАРНЫҢ ПАРАЛЛЕЛЬЛЕК БИЛГЕСЕ

Теорема 4.2. (турыларның параллельлек билгесе). ***Әгәр эчке аркылы ятучы почмаклар тигез булсалар яки эчке якташ почмакларның суммасы 180° ка тигез икән, турылар параллель була.***

Исбатлау. a һәм b турылары AB кисүчесе белән үзара тигез булган эчке аркылы ятучы почмаклар ясасын ди (73 нче а рәсем). a һәм b турылары параллель түгел дип уйлыйк, димәк, алар ниндидер C ноктасында кисешәләр (73 нче б рәсем).

Кисүче AB яссылыкны ике ярымъяссылыкка бүлә. C ноктасы



73 нче рәсем

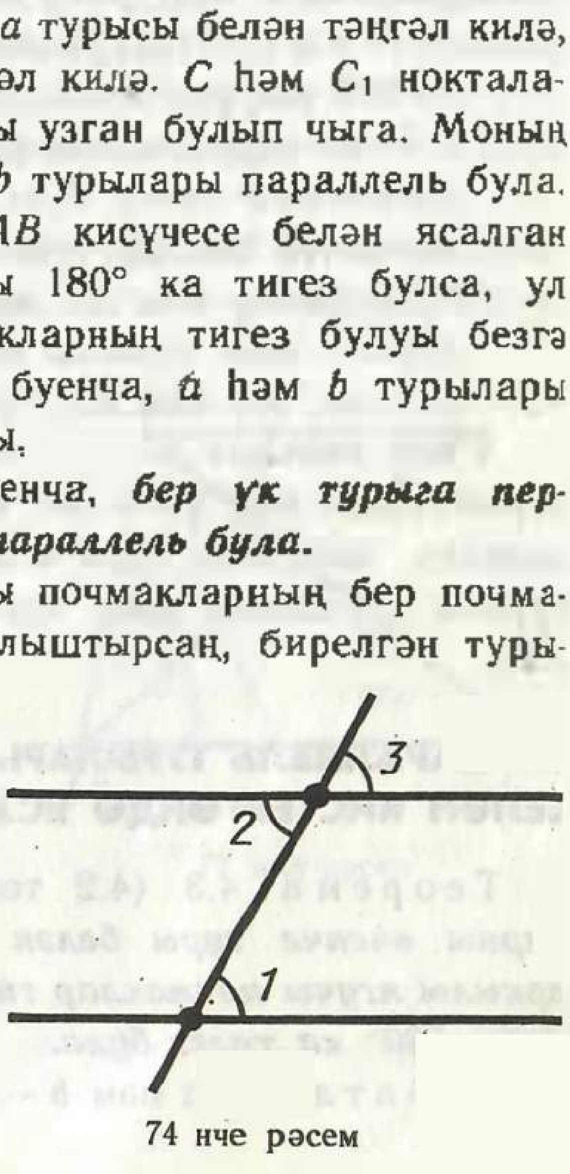
аларның берсендә ята. ABC өчпочмагына тигез итеп, C_1 түбәсе икенче ярымъяссылыкта яткан BAC_1 өчпочмагын төзик. a, b параллель турылары һәм AB кисүчесе белән ясалган эчке аркылы ятучы почмаклар, шарт буенча, үзара тигез. Түбәләре A һәм B булган ABC һәм BAC_1 өчпочмакларының тиңдәш почмаклары тигез булганга, алар эчке аркылы ятучы почмаклар белән тәңгәл киләләр. Димәк, AC_1 турысы a турысы белән тәңгәл килә, ә BC_1 турысы b турысы белән тәңгәл килә. C һәм C_1 ноктадары аша төрле ике a һәм b турылары узган булып чыга. Моның булуы мөмкин түгел. Димәк, a һәм b турылары параллель була.

Әгәр a һәм b турылары һәм AB кисүчесе белән ясалган эчке якташ почмакларның суммасы 180° ка тигез булса, ул вакытта эчке аркылы ятучы почмакларның тигез булуы безгә билгеле. Димәк, югарыда исбатлау буенча, a һәм b турылары параллель була. Теорема исбатланды.

4.2 теоремасының нәтиҗәсе буенча, ***бер үк турыга перпендикуляр булган ике туры үзара параллель була.***

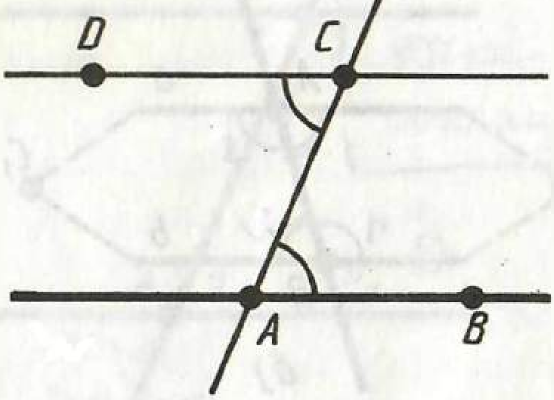
Әгәр бер пар эчке аркылы ятучы почмакларның бер почмагын аңа вертикаль почмак белән алыштырсаң, бирелгән турылар белән кисүче өчен *тиңдәшле почмаклар* дип аталган бер пар почмак килеп чыгар.

74 нче рәсемдә $\angle 1$ һәм $\angle 2$ эчке аркылы ятучы почмаклар, ә $\angle 1$ һәм $\angle 3$ тиңдәш почмаклар.

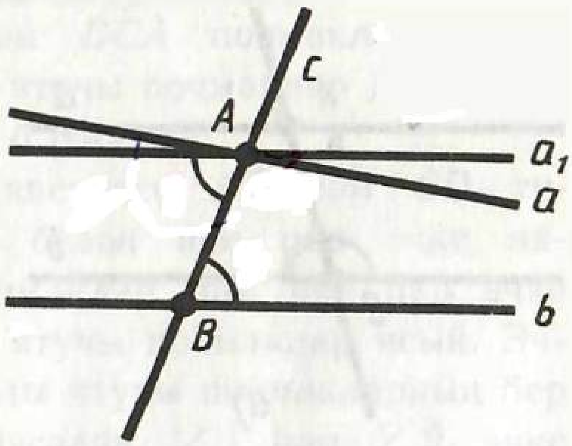


74 нче рәсем

Эчке аркылы ятучы почмакларның тигезлегеннән тиңдәш почмакларның тигезлеге килеп



75 нче рәсем



76 нчы рәсем

чыга, һәм киресенчә. Моннан тиңдәш почмаклар буенча турыларның параллельлек билгесе килеп чыга. Ягъни: ***әгәр тиңдәш почмаклар тигез булса, турылар параллель була.***

Мәсьәлә (8). *AB* турысы һәм бу туры өстендә ятмаган *C* ноктасы бирелгән. *C* ноктасы аша *AB* турысына параллель итеп туры үткәрергә мөмкин икәнен исбат итегез.

Чишү. *AC* турысы яссылыкны ике ярымъяссылыкка бүлә (75 нче рәсем). *B* ноктасы шуларның берсе өстендә ята. *CA* ярымтурысыннан башлап, икенче ярымъяссылыкка *CAB* почмагына тигез булган *ACD* почмагын салыйк. Ул вакытта *AB* һәм *CD* турылары параллель булалар. Чыннан да, бу турылар һәм *AC* кисүчесе өчен *BAC* һәм *DCA* почмаклары — эчке аркылы ятучы почмаклар. Алар тигез булганлыктан, *AB* һәм *CD* турылары параллель.

8 нче мәсьәлә һәм IX аксиоманың раслауларын (параллель турыларның төп үзлеген) чагыштырып карап, мөһим нәтиҗәгә киләбез: бирелгән туры өстендә ятмаучы нокта аша, бирелгән турыга параллель итеп, туры үткәреп була һәм бары тик берне генә.

32. ПАРАЛЛЕЛЬ ТУРЫЛАРНЫ КИСҮЧЕ БЕЛӘН КИСТЕРГӘНДӘ ЯСАЛГАН ПОЧМАКЛАРНЫҢ ҮЗЛЕГЕ

Теорема 4.3 (4.2 теоремасына кире). ***Параллель турыларны өченче туры белән кистергәндә барлыкка килгән эчке аркылы ятучы почмаклар тигез, ә эчке якташ почмакларның суммасы 180° ка тигез була.***

Исбатлау. *a* һәм *b* — параллель турылар, ә *c* — аларны *A*

һәм B ноктасында кисеп үтүче туры булсын. A ноктасы аша, a_1 һәм b турылары һәм кисүче c белән ясалган эчке аркылы ятучы почмаклар тигез булырлык итеп, a_1 турысы үткәрәбез (76 нчы рәсем).

Ул вакытта турыларның параллельлек билгесе буенча a_1 һәм b турылары параллель була. Ләкин A ноктасы аша b турысына параллель булган бер генә туры уза, ягъни a турысы a_1 турысы белән тәңгәл килә.

Димәк, a һәм b параллель турылары һәм c кисүчесе белән ясалган эчке аркылы ятучы почмаклар тигез була. Теорема исбатланды.

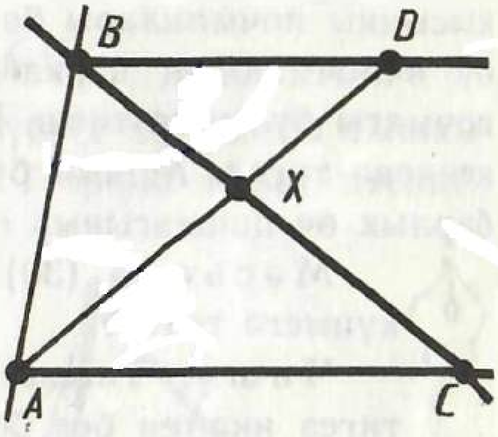
Параллель турыларны кисүче белән кистергәндә ясалган почмакларның үзлеге буенча, ***әгәр туры параллель турыларның берсенә перпендикуляр икән, ул аларның икенчесенә дә перпендикуляр була.***

Мәсьәлә (13). AC һәм BD параллель турылар, A һәм D нокталары BC кисүчесеннән төрле якта яталар (77 нче рәсем). 1) BC кисүчесенә карата DBC һәм ACB почмакларының эчке аркылы ятучы почмаклар; 2) BC нурының ABD почмагының яклары арасыннан үтүен; 3) AB кисүчесенә карата CAB һәм DBA почмакларының эчке якташ почмаклар икәнен исбатлагыз.

Чишү. 1) DBC һәм ACB эчке аркылы ятучы почмаклар, чөнки A һәм D нокталары BC кисүчесеннән төрле якта яталар.

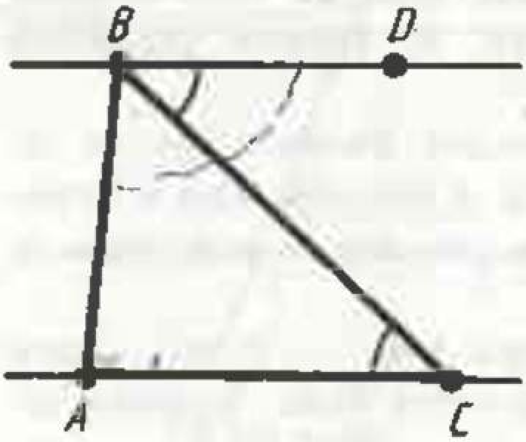
2) BC нуры ABD почмагының яклары арасыннан үтә, чөнки ул очлары почмакның яклары өстендә яткан AD кисемтәсен кисеп үтә (4 нче мәсьәлә).

3) CAB һәм DBA эчке якташ почмаклар, чөнки C һәм D нокталары AB кисүчесеннән бер якта, ягъни BC һәм AD кисемтәләренең кисешү ноктасы X яткан ярымъяссылыкта яталар.



77 нче рәсем

33. ӨЧПОЧМАКНЫҢ ПОЧМАКЛАРЫ СУММАСЫ



78 нче рәсем

Теорема 4.4. ***Өчпочмакның почмаклары суммасы 180° ка тигез була.***

Исбатлау. *ABC* — бирелгән өчпочмак булсын.

B түбәсе аша *AC* турысына параллель итеп туры үткәрәбез.

Аның өстендә, *A* һәм *D* нокталары *BC* турысының төрле ягында ятарлык итеп, *D* ноктасы билгелибез (78 нче рәсем).

AC һәм *BD* параллель турылары һәм *BC* кисүчесе белән ясалган эчке аркылы ятучы почмаклар буларак, *DBC* һәм *ACB* почмаклары тигез. Шуңа күрә өчпочмакның *B* һәм *C* түбәләре янындагы почмакларының суммасы *ABD* почмагына тигез.

Ә өчпочмакның барлык өч почмагының суммасы *ABD* һәм *BAC* почмакларының суммасына тигез. Бу почмаклар *AC* һәм *BD* параллель турылары һәм *AB* кисүчесе өчен эчке якташ почмаклар булганга күрә, аларның суммасы 180° ка тигез була. Теорема исбатланды.

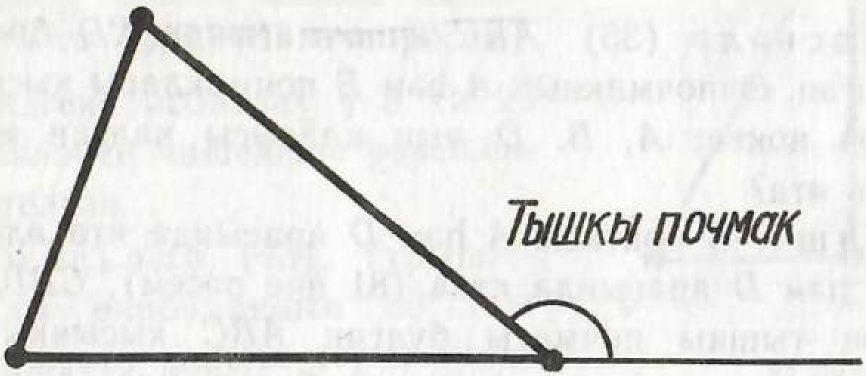
4.4 теоремасының нәтиҗәсе буенча, ***теләсә нинди өчпочмакның һич югында ике почмагы кысынкы була.***

Чыннан да, өчпочмакның бер почмагы гына кысынкы яки кысынкы почмаклары бөтенләй юк дип фараз итик. Ул вакытта бу өчпочмакның һәркайсы 90° тан да кечкенә булмаган ике почмагы булырга тиеш. Бу ике почмакның суммасы 180° тан да кечкенә түгел. Моның булуы мөмкин түгел, чөнки өчпочмакның барлык өч почмагының суммасы 180° ка тигез.

Мәсьәлә (30). Тигезьяклы өчпочмакның почмаклары күпмегә тигез?

Чишү. Тигезьяклы өчпочмакның барлык почмаклары тигез икәнен без беләбез инде. Аларның суммасы 180° ка тигез булганга күрә, һәр почмагы 60° ка тигез була.

34. ӨЧПОЧМАКНЫҢ ТЫШКЫ ПОЧМАКЛАРЫ



79 нчы рәсем

Өчпочмакның бирелгән түбәсе янындагы почмагы белән чиктәш почмак өчпочмакның бу түбәсе янындагы *тышкы почмагы* дип атала (79 нчы рәсем).

Өчпочмакның бирелгән түбәсе янындагы почмагын, шул түбә янындагы тышкы почмак белән бутамас өчен, аны *эчке почмак* дип атыйлар.

Теорема 4.5. ***Өчпочмакның тышкы почмагы үзенә чиктәш булмаган ике эчке почмакның суммасына тигез була.***

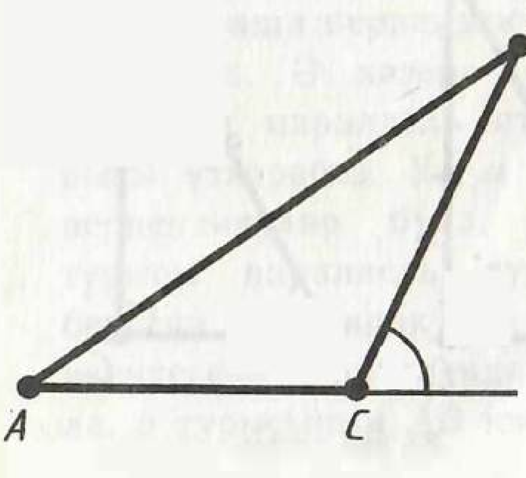
Исбатлау. *ABC* — бирелгән өчпочмак булсын (80 нче рәсем). Өчпочмакның почмаклары суммасы теоремасы буенча

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

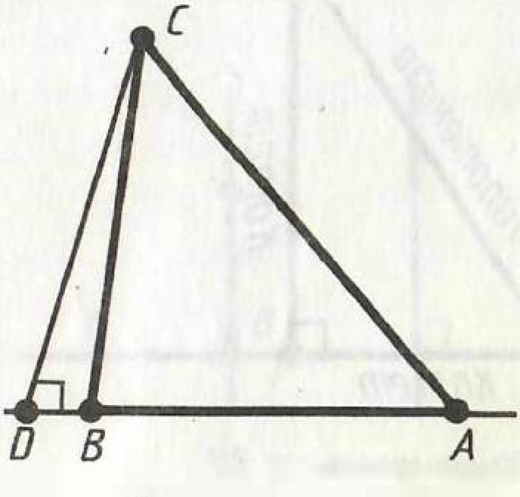
Моннан

$$\angle A + \angle B = 180° - \angle C.$$

Бу тигезлекнең уң ягы өчпочмакның *C* түбәсе янындагы тышкы почмагының градуслы үлчәмен күрсәтә. Теорема исбат ителде.



80 нче рәсем



81 нче рәсем

4.5 теоремасының нәтиҗәсе буенча, ***өчпочмакның тышкы почмагы үзенә чиктәш булмаган теләсә кайсы эчке почмактан зуррак була.***

Мәсьәлә (35). ABC өчпочмагында CD биеклеге үткәрелгән. Өчпочмакның A һәм B почмаклары кысынкы булса, өч нокта: A, B, D ның кайсысы калган икесе арасында ята?

Чишү. B ноктасы A һәм D арасында ята алмый. Әгәр ул A һәм D арасында ятса (81 нче рәсем), CBD өчпочмагының тышкы почмагы булган ABC кысынкы почмагы CDB туры почмагыннан зуррак булыр иде. A ноктасының B һәм D арасында ятмавы нәкъ шулай ук исбат ителә. Димәк, D ноктасы A һәм B арасында ята.

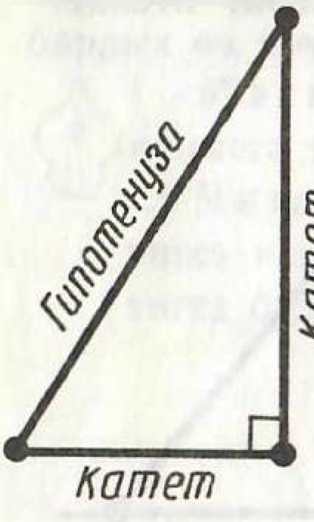
35. ТУРЫПОЧМАКЛЫ ӨЧПОЧМАК

Әгәр өчпочмакның туры почмагы булса, ул *турыпочмаклы* дип атала. Өчпочмакның почмаклары суммасы 180° ка тигез, шуңа күрә турыпочмаклы өчпочмакның бер генә почмагы туры почмак була. Турыпочмаклы өчпочмакның калган ике почмагы кысынкы була. Турыпочмаклы өчпочмакның кысынкы почмаклары суммасы $180° - 90° = 90°$ ка тигез.

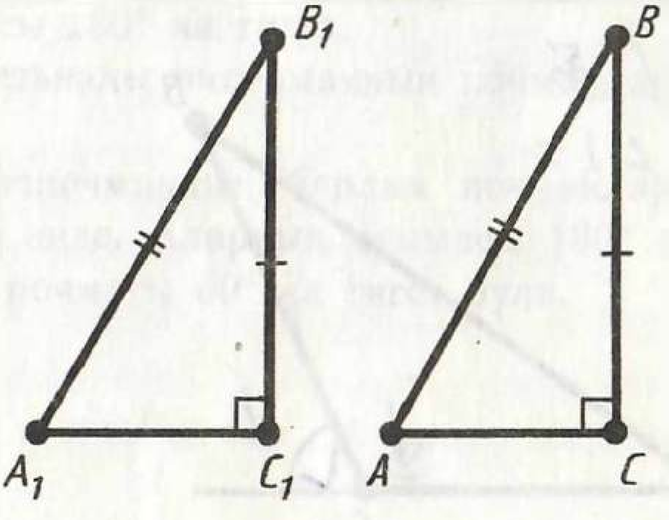
Турыпочмаклы өчпочмакның туры почмагына каршы ятучы ягы *гипотенуза* дип атала, калган ике ягы *катетлар* дип атала (82 нче рәсем).

Турыпочмаклы өчпочмакларның гипотенузасы һәм катеты буенча тигезлек билгесен әйтеп үтик:

Әгәр бер турыпочмаклы өчпочмакның гипотенузасы һәм ка-



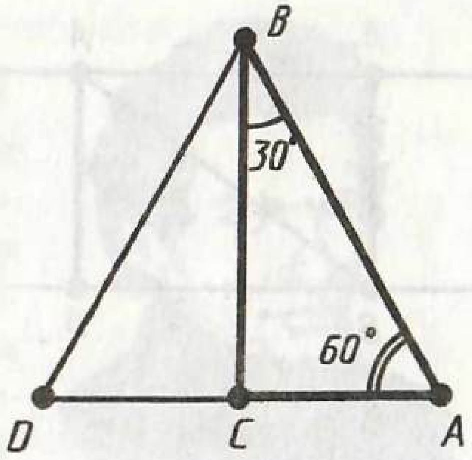
82 нче рәсем



83 нче рәсем

теты икенче өчпочмакның гипотенузасына һәм катетына тиңдәшле рәвештә тигез булса, андый өчпочмаклар тигез була (83 нче рәсем).

Бу билгене исбатлау § 3 тә 29 нчы мәсьәләнең чишелеше рәвешендә күрсәтелгән.



84 нче рәсем

Мәсьәлә (43). Турыпочмаклы өчпочмакның 30° лы почмагына каршы ятучы катеты гипотенузаның яртысына тигез икәнен исбат итегез.

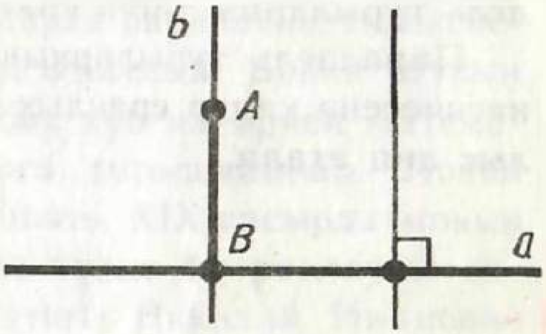
Чишү. ABC — туры почмагы C һәм кысынкы почмагы B 30° ка тигез булган турыпочмаклы өчпочмак булсын (84 нче рәсем). 84 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, ABC өчпочмагына тигез итеп, DBC өчпочмагын төзик.

ABD өчпочмагының барлык почмаклары үзара тигез (60°), шуңа күрә ул тигезьяклы. $AC = \frac{1}{2}AD$, ә $AD = AB$ булганга, $AC = \frac{1}{2}AB$. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

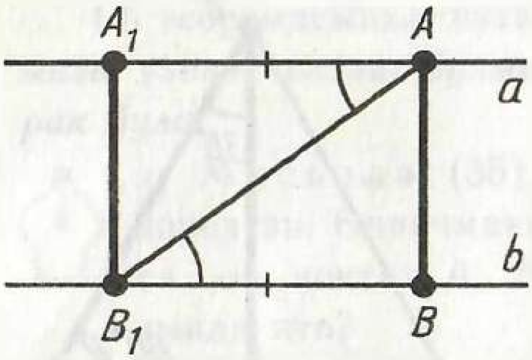
36. ТУРЫГА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫҢ БУЛУЫ һӘМ АНЫҢ БЕРДӘНБЕРЛЕГЕ

Теорема 4.6. ***Бирелгән туры өстендә ятмаган теләсә нинди ноктадан бу турыга перпендикуляр төшерергә мөмкин һәм бары тик берне генә.***

Исбатлау. a — бирелгән туры, A — аның өстендә ятмаган нокта булсын (85 нче рәсем). a турысының нинди дә булса ноктасы аша перпендикуляр туры үткәрәбез. Ә хәзер A ноктасы аша аңа параллель итеп b турысы үткәрәбез. Ул a турысына перпендикуляр була, чөнки a турысы параллель турыларның берсенә перпендикуляр буларак, икенчесенә дә перпендикуляр була. b турысының AB кисемтәсе A



85 нче рәсем



86 нчы рәсем

ноктасыннан a турысына төшерелгән перпендикуляр була.

AB перпендикулярының берәнбер икәнен исбатлыйк. Нинди дә булса башка AC перпендикуляры бар дип уйлыйк. Ул вакытта ABC өчпочмагының ике туры почмагы булыр иде. Белгәнебезчә, моның булуы мөмкин түгел. Теорема исбатланды.

Бирелгән ноктадан турыга төшерелгән перпендикулярның озынлыгы *ноктадан турыга кадәр ераклык* дип атала.

Мәсьәлә (50). Турының теләсә кайсы ике ноктасыннан аңа параллель турыга кадәр ераклыкларның тигез икәнен исбатлагыз.

Чишү. a һәм b — параллель турылар һәм A, A_1 — a турысының теләсә нинди нокталары булсын (86 нчы рәсем). A_1 ноктасыннан b турысына A_1B_1 перпендикуляры төшерик. B_1 ноктасыннан b турысына AA_1 кисемтәсенә тигез булган һәм A_1, B нокталары AB_1 турысының төрле ягында ятарлык, итеп, B_1B кисемтәсе салабыз.

Ул вакытта AB_1A_1 һәм B_1AB өчпочмаклары беренче билге буенча тигез була. Аларның AB_1 ягы уртак, $AA_1 = BB_1$ төзү буенча, ә B_1AA_1 һәм AB_1B почмаклары a һәм b параллель турылары һәм AB_1 кисүчесе белән ясалган эчке аркылы ятучы почмаклар буларак тигез.

Өчпочмаклар тигезлегеннән AB ның b турысына перпендикуляр һәм $AB = A_1B_1$ икәнлеге килеп чыга, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Без турының барлык нокталарыннан параллель турыларга кадәр ераклыкларның тигез икәнен күрәбез. Шуңа күрә параллель турыларны тигез ераклыкта торучылар диләр.

Параллель турыларның берсенең теләсә кайсы ноктасыннан икенчесенә кадәр ераклык *параллель турылар арасындагы ераклык* дип атала.

37. ГЕОМЕТРИЯ БАРЛЫККА КИЛҮ ТАРИХЫННАН

Н. И. Лобачевский
рус математигы
(1792—1856)

Геометрик фигураларның үзлекләре турындагы башлангыч мәгълүматны кешеләр тирә-якны күзәтү һәм көндәлек хезмәт нәтиҗәсендә алган. Еллар үтү белән галимнәр геометрик фигураларның кайбер үзлекләрен фикер йөртү юлы белән башка үзлекләрдән чыгарырга мөмкин икәнлеген күргәннәр. Теорема һәм исбатлаулар шулай килеп чыккан.

Геометрик фигураларның турыдан-туры тәҗрибәдән алынган кайбер үзлекләренең санын мөмкин кадәр кыскартырга табигый теләк туган. Үзлекләре исбат ителмичә калган җөмләләр аксиома булып калган. Шулай итеп, аксиомалар тәҗрибәдән килеп чыкканнар.

Геометрия үзе үсешенең башлангыч чорында бик югары дәрәҗәгә Мисырда ирешкән. Безнең эрага кадәр беренче мең еллыкта геометрия мәгълүматлары мисырлылардан грекларга күчкән. Безнең эрага кадәр VII дән III гасырлар чорында грек геометрлары геометрияне үзләренең күп санлы теоремалары белән баетып кына калмадылар, ә аны нигезләүне тәртипкә салуда җитди адымнар ясадылар. Грек геометрларының бу чордагы күп гасырлык хезмәтләре Евклид (безнең эрага кадәр 330—275 еллар) тарафыннан аның «Башлангычлар» дигән атаклы хезмәтендә йомгакланган.

Евклидның «Башлангычлар»ында геометрияне язу аксиомалар тәртибенә корылган. Бу аксиомалар тәртибе, әлеге дәреслектә китерелгән аксиомалар тәртибеннән аерыла. Ләкин анда да параллельлек аксиомасы бар.

Башка аксиомалардан аермалы буларак параллельлек аксиомасы күзаллап фикерләүләр белән ныгытылмый. Бәлки шуның өчен дә Евклид заманыннан башлап бик күп илләрнең математиклары аны теорема итеп исбатларга тырышканнар. Ләкин моны беркем дә булдыра алмаган. Ниһаять, XIX гасырда моның мөмкин түгеллеге исбатланган. Беренче булып бу раслауны нигезләп әйтеп бирүче бөек рус математигы Николай Иванович Лобачевский булган.

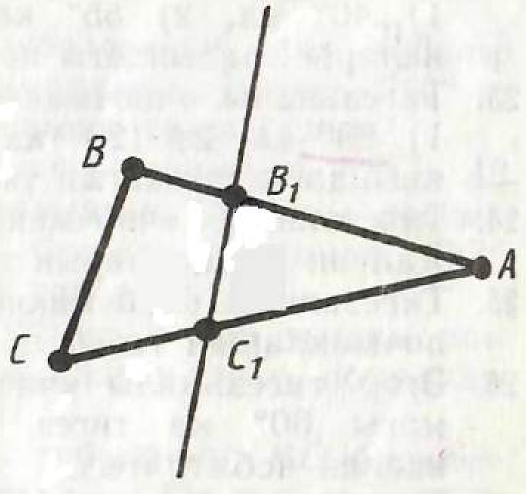
КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Өченче турыга параллель булган ике туры үзара да параллель була. Шуны исбатлагыз.
2. Нинди почмакларның эчке якташ почмаклар дип аталуын аңлатыгыз. Нинди почмаклар эчке аркылы ятучы почмаклар дип атала?
3. Әгәр эчке аркылы ятучы почмакларның бер пары тигез икән, аларның икенче пары да тигез була, ә эчке якташ почмакларның һәр парының суммасы 180° ка тигез була. Шуны исбатлагыз.
4. Турыларның параллельлек билгесен исбат итегез.
5. Нинди почмакларның тиңдәш почмаклар дип аталганын аңлатыгыз. Әгәр эчке аркылы ятучы почмаклар тигез икән, ул вакытта тиңдәш почмаклар да тигез була, һәм киресенчә. Шуны исбатлагыз.
6. Бирелгән туры өстендә ятмаган нокта аша, бу турыга параллель итеп, туры үткәрергә мөмкин. Шуны исбатлагыз. Бирелгән туры өстендә ятмаган нокта аша бу турыга параллель итеп ничә туры үткәрергә мөмкин?
7. Әгәр ике параллель туры өченче туры белән кисешсә, эчке аркылы ятучы почмаклар тигез, ә эчке якташ почмакларның суммасы 180° ка тигез була. Шуны исбатлагыз.
8. Бер үк турыга перпендикуляр булган ике турының үзара параллель икәнен исбатлагыз. Әгәр туры ике параллель турының берсенә перпендикуляр икән, ул аның икенчесенә дә перпендикуляр була. Исбатлагыз.
9. Өчпочмакның почмаклары суммасы 180° ка тигез икәнен исбатлагыз.
10. Теләсә нинди өчпочмакның ике почмагы кысынкы була икәнен исбатлагыз.
11. Өчпочмакның тышкы почмагы нәрсә ул?
12. Өчпочмакның тышкы почмагы үзенә чиктәш булмаган ике эчке почмакның суммасына тигез була. Шуны исбатлагыз.
13. Өчпочмакның тышкы почмагы үзенә чиктәш булмаган теләсә кайсы эчке почмактан зуррак икәнен исбатлагыз.
14. Нинди өчпочмак турыпочмаклы өчпочмак дип атала?
15. Турыпочмаклы өчпочмакның кысынкы почмаклары суммасы күпмегә тигез?
16. Турыпочмаклы өчпочмакның кайсы ягы гипотенуза дип атала? Кайсы яклары катетлар дип атала?
17. Турыпочмаклы өчпочмакларның гипотенузасы һәм катеты буенча тигезлек билгесен әйтеп күрсәтегез.
18. Туры өстендә ятмаган теләсә нинди ноктадан бу турыга перпендикуляр төшерергә мөмкин һәм бары тик берне генә. Исбатлагыз.

19. Ноктадан турыга кадәр ераклык дип нәрсәгә әйтәбез?
20. Параллель турылар арасындагы ераклыкның нәрсә икәнен аңлатыгыз.

Мәсьәләләр

1. Әгәр туры параллель турыларның берсен киссә; ул аларның икенчесен дә кискәнен исбат итегез.
2. Әгәр ике туры үзара кисешсәләр, ул вакытта теләсә нинди өченче туры бу турыларның һич югында берсен кисеп үтә. Шуны исбат итегез.
3. $a \parallel b \parallel c \parallel d$ икәнлеге бирелгән. $a \parallel d$ икәнен исбатлагыз.
4. AB һәм CD турылары параллель. Әгәр BC кисемтәсе AD турысы белән кисешсә, кисешү ноктасы AD кисемтәсенеке булуын исбатлагыз (70 нче рәсемне кара).
5. ABC өчпочмагы бирелгән. AB ягы өстендә B_1 ноктасы, ә AC ягы өстендә C_1 ноктасы билгеләнгән (87 нче рәсем). AB, AC турылары белән B_1C_1 кисүчесе янындагы эчке якташ һәм эчке аркылы ятучы почмакларны әйтегез.
6. 72 нче рәсемдәге эчке аркылы ятучы һәм эчке якташ почмакларны әйтегез.
7. AD һәм BC кисемтәләре кисешәләр. AC һәм BD турылары һәм BC кисүчесе өчен бер пар эчке аркылы ятучы почмакларны әйтегез. Шул ук турылар һәм AB кисүчесе өчен бер пар эчке якташ почмакларны әйтегез. Җавапны аңлатыгыз.
8. AB турысы һәм бу туры өстендә ятмаган C ноктасы бирелгән. C ноктасы аша AB турысына параллель итеп туры үткәрергә мөмкин икәнен исбат итегез.
9. Параллель турылар һәм кисүче белән ясалган эчке аркылы ятучы почмакларның биссектрисалары параллель икәнен, ягъни параллель турылар өстендә ятканын исбат итегез.
10. AB һәм CD кисемтәләре E ноктасында кисешәләр һәм шул нокта белән урталай бүленәләр. AC һәм BD турыларының параллель икәнен исбат итегез.
11. ABC һәм BAD өчпочмаклары тигез. C һәм D нокталары AB турысыннан төрле якта ята. AC һәм BD турыларының параллель икәнен исбат итегез.
12. ABC почмагы 80° ка, ә BCD почмагы 120° ка тигез. AB һәм CD турылары параллель буламы? Җавапны аңлатыгыз.
13. AC һәм BD турылары параллель, A һәм D нокталары



87 нче рәсем

BC кисүчесеннән төрле якта яталар (77 нче рәсем). 1) BC кисүчесенә карата DBC һәм ACB почмакларының эчке аркылы ятучы почмаклар; 2) BC нурының ABD почмагының яклары арасыннан узганын; 3) AB кисүчесенә карата CAB һәм DBA почмакларының эчке якташ почмаклар икәнен исбатлагыз.

14. 1) Ике параллель туры белән кисүче янындагы ике эчке якташ почмакның аермасы 30° ка тигез. Бу почмакларны табыгыз.
2) Ике параллель туры белән кисүче янындагы аркылы ятучы ике почмакның суммасы 150° ка тигез. Бу почмаклар күпмегә тигез?

15. Ике параллель турыны кисүче белән кистергәндә барлыкка килгән почмакларның берсе 72° ка тигез. Калган җиде почмакны табыгыз.

16. Ике параллель турыны кисүче белән кистергәндә барлыкка килгән почмакларның берсе 30° ка тигез. Калган җиде почмакның берсе 70° ка тигез була аламы? Җавапны аңлатыгыз.

17. Перпендикуляр турыларга параллель булган ике турының үзара перпендикуляр икәнен исбат итегез.

18. Әгәр өчпочмакның ике почмагы: 1) 50° һәм 30° ка; 2) 40° һәм 75° ка; 3) 65° һәм 80° ка; 4) 25° һәм 120° ка тигез булса, аның билгесез почмагын табыгыз.

19. Өчпочмакның почмаклары: 1) 1, 2, 3; 2) 2, 3, 4; 3) 3, 4, 5; 4) 4, 5, 6; 5) 5, 6, 7 саннарына пропорциональ булсалар, аның почмакларын табыгыз.

20. Өчпочмакның: 1) ике җәенке почмагы; 2) җәенке һәм туры почмагы; 3) ике туры почмагы булырга мөмкинме?

21. Тигезьянлы өчпочмакның нигезе янындагы почмагы җәенке була аламы?

22. Тигезьянлы өчпочмакның нигезе янындагы почмак: 1) 40° ка, 2) 55° ка, 3) 72° ка тигез булса, аның ян яклары арасындагы почмагын табыгыз.

23. Тигезьянлы өчпочмакның ян яклары арасындагы почмагы: 1) 80° ка, 2) 120° ка, 3) 30° ка тигез булса, аның нигез янындагы почмагын табыгыз.

24. Тигезьянлы өчпочмакның бер почмагы 100° ка тигез. Калган почмакларын табыгыз.

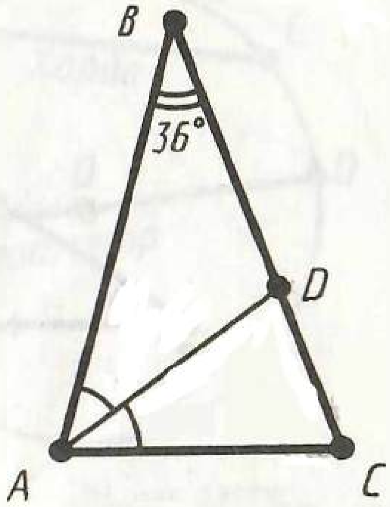
25. Тигезьянлы өчпочмакның бер почмагы 70° ка тигез. Калган почмакларын табыгыз. Мәсьәләнең ничә чишелеше бар?

26. Әгәр тигезьянлы өчпочмакның кайсы да булса бер почмагы 60° ка тигез булса, бу өчпочмакның тигезьяклы икәнен исбатлагыз.

27. Нигезе AC булган ABC тигезьянлы өчпочмагында CD биссектрисасы үткәрелгән. Әгәр ADC почмагы 1) 60° ка,

2) 75° ка, 3) α га тигез булса, өчпочмакның почмакларын табыгыз.

28. Нигезе AC һәм B түбәсе янындагы почмагы 36° ка тигез булган ABC тигезьянлы өчпочмагында AD биссектрисасы үткәрелгән. CDA һәм ADB өчпочмакларының тигезьянлы икәнен исбат итегез (88 нче рәсем).



88 нче рәсем

29. ABC өчпочмагының A һәм B түбәләреннән биссектрисалар үткәрелгән. Аларның кисешү ноктасы D дип тамгаланган. Әгәр: 1) $\angle A = 50°$, $\angle B = 100°$; 2) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$; 3) $\angle C = 130°$; 4) $\angle C = \gamma$ икәне билгеле булса, ABD почмагын табыгыз.

30. Тигезьяклы өчпочмакның почмаклары күпмегә тигез?

31. Параллель турылар янындагы ике эчке якташ почмакның биссектрисалары нинди почмак ясап кисешәләр?

32. Тигезьянлы өчпочмакның тышкы почмакларының берсе 70° ка тигез. Өчпочмакның почмакларын табыгыз.

33. Өчпочмакның ике түбәсе янындагы тышкы почмакларының 120° һәм 150° ка тигез икәне билгеле. Өчпочмакның почмакларын табыгыз.

34. Өчпочмакның ике тышкы почмагы 100° һәм 150° ка тигез. Өченче тышкы почмагын табыгыз.

35. ABC өчпочмагында CD биеклеге үткәрелгән. Әгәр өчпочмакның A һәм B почмаклары кысынкы булса, A, B, D нокталарының кайсысы калган икесе арасында ята?

36. ABC өчпочмагында CD биеклеге үткәрелгән. Әгәр A почмагы җәенке булса, A, B, D нокталарының кайсысы калган икесе арасында ята? Җавапны нигезләп аңлатыгыз.

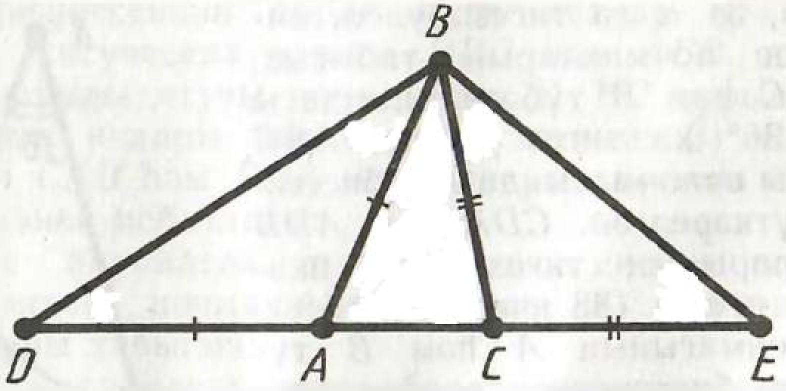
37. Тигезьянлы өчпочмакның түбәсе янындагы тышкы почмагының биссектрисасы нигезенә параллель икәнен исбат итегез.

38. ABC өчпочмагында A һәм B түбәләренең шул түбәләр өчен берәрләп алынган тышкы почмаклары суммасы 240° ка тигез. Өчпочмакның C почмагы күпмегә тигез булыр?

39. ABC өчпочмагы бирелгән. AC ягының дәвамына $AD = AB$ һәм $CE = CB$ итеп кисемтәләр салынган (89 нчы рәсем). ABC өчпочмагының почмаклары билгеле булганда, DBE өчпочмагының почмакларын ничек табарга?

40. Өчпочмакның бер эчке почмагы 30° ка, ә бер тышкы почмагы 40° ка тигез. Өчпочмакның калган эчке почмакларын табыгыз.

41. ABC өчпочмагының туры почмагы түбәсеннән BD биеклеге үткәрелгән. 1) $\angle A = 20°$; 2) $\angle A = 65°$; 3) $\angle A = \alpha$ икәнлеге билгеле булганда, CBD почмагын табыгыз.



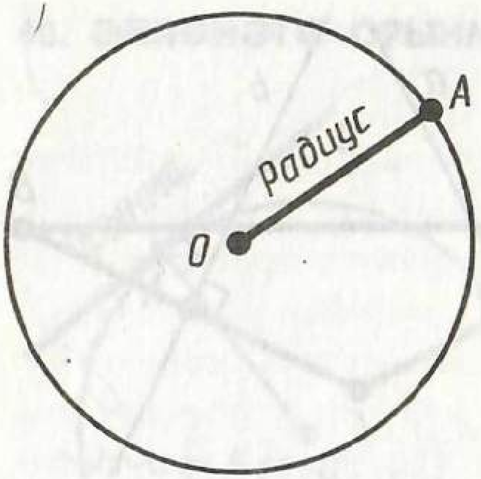
89 нчы рәсем

42. ABC өчпочмагының җәенке почмагы түбәсеннән BD биеклеге үткәрелгән. $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$ икәне билгеле булганда, ABD һәм CBD өчпочмакларының почмакларын табыгыз.
43. Турыпочмаклы өчпочмакның 30° лы почмагына каршы ятучы катеты гипотенузаның яртысына тигез икәнен исбат итегез.
44. Турыпочмаклы тигезьянлы өчпочмакның почмакларын табыгыз.
45. ABC тигезьяклы өчпочмагында AD медианасы үткәрелгән. ABD өчпочмагының почмакларын табыгыз.
46. ABC өчпочмагының A һәм C түбәләреннән үткәрелгән биеклекләре M ноктасында кисешәләр. Әгәр $\angle A=70°$, $\angle C=80°$ ка тигез булса, $\angle AMC$ ны табыгыз.
47*. ABC өчпочмагында BD медианасы AC ягының яртысына тигез. Өчпочмакның B почмагын табыгыз.
48. a турысы BC кисемтәсенең уртасы аша уза. B һәм C нокталарының a турысыннан тигез ераклыкта ятканын исбат итегез.
49. BC кисемтәсе a турысын O ноктасында кисеп үтә. B һәм C нокталары a турысыннан тигез ераклыкта яталар. O ноктасы BC кисемтәсенең уртасы икәнен исбат итегез.
50. Турының теләсә кайсы ике ноктасыннан параллель турыга кадәр ераклыкларның тигез икәнен исбат итегез.
51. Тигезьяклы өчпочмакның түбәләреннән, аларга каршы ятучы якларын эченә алган турыларга кадәр ераклыкларның үзара тигез икәнен исбат итегез.

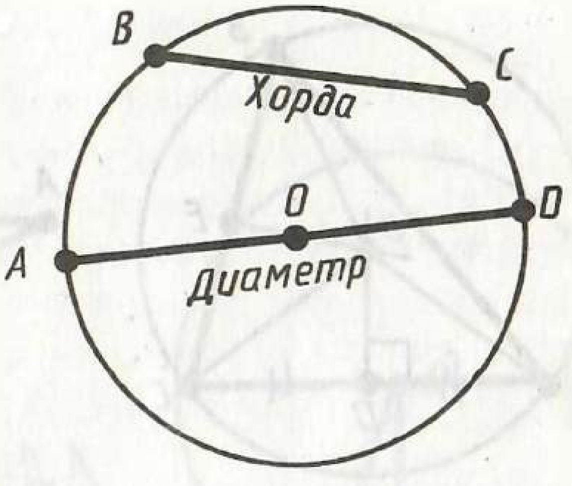
§ 5. ГЕОМЕТРИК ТӨЗҮЛӘР

38. Әйләнә

Яссылыкның бирелгән ноктасыннан тигез ераклыкта яткан барлык нокталарыннан торган фигура *әйләнә* дип атала. Бу нокта әйләнәнең *үзәге* дип атала.



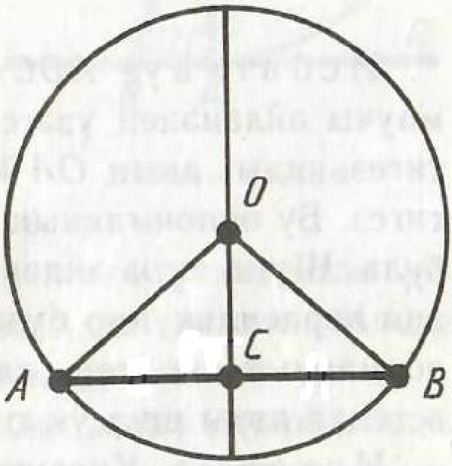
90 нчы рәсем



91 нче рәсем

Әйләнә ноктасыннан аның үзәгенә кадәр ераклык *әйләнәнең радиусы* дип атала. Әйләнә ноктасын аның үзәге белән тоташтыручы теләсә нинди кисемтә шулай ук радиус дип атала (90 нчы рәсем).

Әйләнәнең ике ноктасын тоташтыручы кисемтә *хорда* дип атала. Үзәк аша узучы хорда *диаметр* дип атала. 91 нче рәсемдә BC — хорда, AD—диаметр.



92 нче рәсем

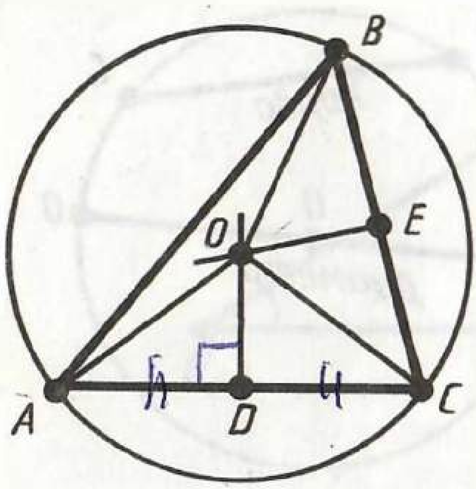
Мәсьәлә (3). Әйләнә хордасының уртасы аша узган диаметрның хордага перпендикуляр икәнен исбат итегез.

Чишү. AB — әйләнәнең хордасы һәм C — аның уртасы булсын (92 нче рәсем). AOB нигезе AB булган тигезьянлы өчпочмак. Аның OA һәм OB яклары әйләнәнең радиусы буларак үзара тигез. Тигезьянлы өчпочмакның нигезенә үткәрелгән медианасының үзлеге буенча, OC кисемтәсе биеклек була. Шуңа күрә, әйләнә хордасының уртасы аша үткәрелгән диаметр хордага перпендикуляр була.

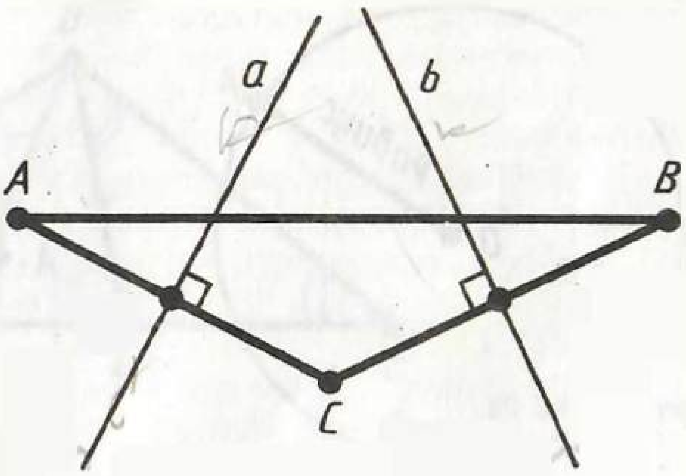
39. ӨЧПОЧМАКНЫ КАМАУЧЫ ӘЙЛӘНӘ

Әгәр әйләнә өчпочмакның бөтен түбәләре аша узса, ул өчпочмакны *камаучы* әйләнә дип атала.

Теорема 5.1. ***Өчпочмакны камаучы әйләнәнең үзәге бу өчпочмак якларының урталарыннан үткәрелгән перпендикулярларның кисешү ноктасы була.***



93 нче рәсем



94 нче рәсем

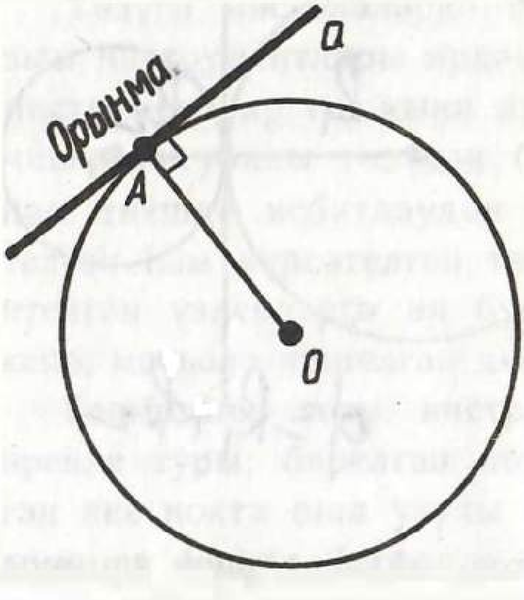
Исбатлау. *ABC* — бирелгән өчпочмак һәм *O* — аны камаучы әйләнәнең үзәге булсын (93 нче рәсем). *AOC* өчпочмагы тигезьянлы: аның *OA* һәм *OC* яклары радиуслар буларак үзара тигез. Бу өчпочмакның *OD* медианасы бер үк вакытта биеклек тә була. Шуңа күрә әйләнә үзәге *AC* ягының уртасы аша узучы һәм аңа перпендикуляр булган туры өстендә ята. Әйләнә үзәгенең өчпочмакның калган ике ягына үткәрелгән перпендикулярлар өстендә ятуы шул ук юл белән исбат ителә. Теорема исбатланды.

Искәрмә. Кисемтәнең уртасы аша узган һәм аңа перпендикуляр булган турыны еш кына *урта перпендикуляр* дип атыйлар. Шуңа күрә кайвакытта өчпочмакны камаучы әйләнәнең үзәге өчпочмакның якларына урта перпендикулярларның кисешү ноктасында ята, диләр.

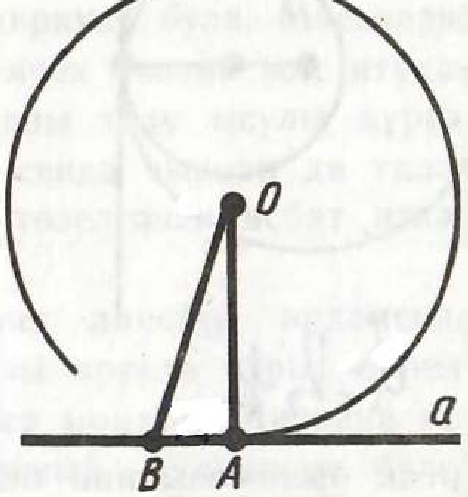
Мәсьәлә (6). Өчпочмакның ике ягының урта перпендикулярлары кисешкәнен исбат итегез.

Чишү. *ABC* — өчпочмак һәм *a*, *b* — аның *AC* һәм *BC* якларына үткәрелгән урта перпендикулярлар булсын (94 нче рәсем). *a* һәм *b* турылары кисешмиләр дип уйлыйк, димәк, алар параллель була. *AC* турысы *a* турысына перпендикуляр. *BC* турысы *b* турысына, димәк, *a* турысына да перпендикуляр, чөнки *a* һәм *b* турылары параллель. Шулай итеп, *AC* һәм *BC* турылары икесе дә *a* турысына перпендикуляр, димәк, алар параллель булалар. Ләкин бу дөрес түгел. *AC* һәм *BC* турылары *C* ноктасында кисешаләр. Без каршылыкка очрадык. Бу раслау исбатланды.

40. Әйләнәгә орынма



95 нче рәсем



96 нчы рәсем

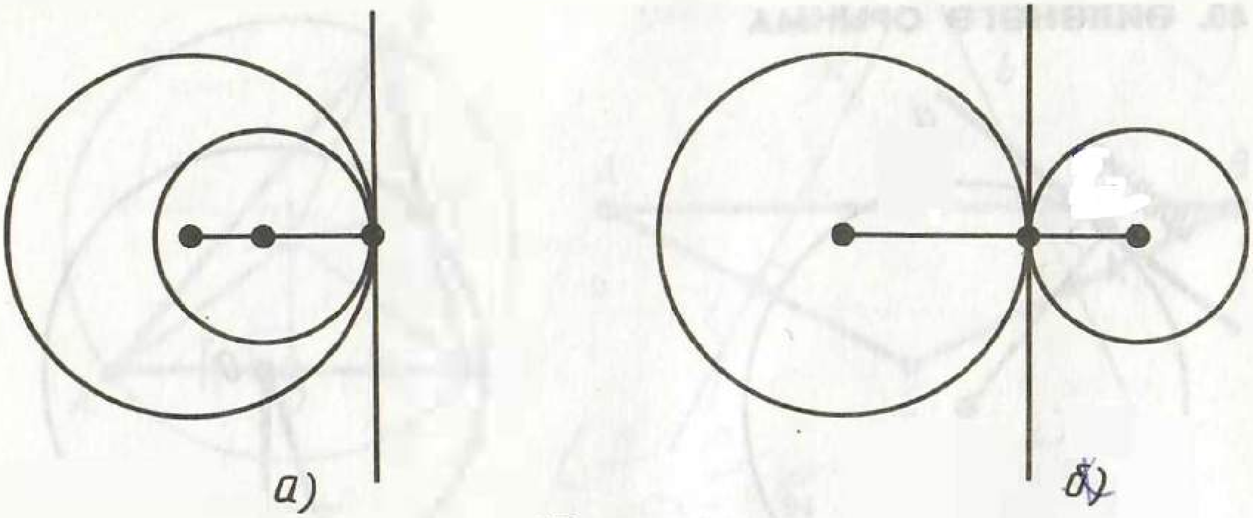
Әйләнә ноктасы аша узучы һәм бу ноктага үткәрелгән радиуска перпендикуляр булган туры *орынма* дип атала. Монда әйләнәнең бирелгән ноктасы *орыну ноктасы* дип атала.

95 нче рәсемдә әйләнәнең A ноктасы аша үткәрелгән a турысы OA радиусына перпендикуляр. a турысы әйләнәгә орынма була. A ноктасы орыну ноктасы була. Шулай ук әйләнә a турысына A ноктасында орына дип тә әйтергә мөмкин.

Мәсьәлә (8). Әйләнә белән аңа орынманың орыну ноктасыннан башка уртак нокталары юк икәнен исбат итегез.

Чишү. a — әйләнәгә A ноктасында орынучы орынма булсын (96 нчы рәсем). Әйләнә һәм орынманың, A ноктасыннан башка, A дан үзгә булган, уртак B ноктасы бар дип уйлыйк. AOB — AB нигезле тигезьянлы өчпочмак. Аның ян яклары OA һәм OB — әйләнәнең радиуслары. Тигезьянлы өчпочмакның нигезе янындагы почмаклары тигез, ә A түбәсе янындагы почмак туры почмак булганга күрә, бу өчпочмакның ике туры почмагы була. Моның булуы мөмкин түгел. Без каршылыкка очрадык. Бу раслау исбатланды.

Әгәр уртак нокталары булган ике әйләнәнең шул ноктада уртак орынмалары булса, ул ике әйләнә бу ноктада *орына* диләр (97 нче рәсем). Орынучы ике әйләнәнең үзәкләре аларның



97 нче рәсем

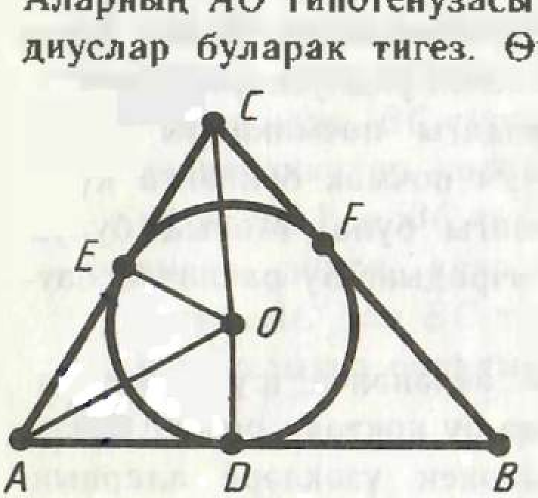
уртак орынмасыннан бер үк якта ятса, әйләнәләрнең орынуы *эчке* дип атала (97 нче рәсем, *а*). Әгәр әйләнәләрнең үзәкләре уртак орынмадан төрле якта ятсалар, әйләнәләрнең орынуы *тышкы* дип атала (97 нче рәсем, *б*).

41. ӨЧПОЧМАККА КАМАУЛЫ ӘЙЛӘНӘ

Әгәр әйләнә өчпочмакның барлык якларына орынса, ул өчпочмакка *камаулы* әйләнә дип атала.

Теорема 5.2. ***Өчпочмакка камаулы әйләнәнең үзәге шул өчпочмакның биссектрисалары кисешкән ноктасы була.***

Исбатлау. *ABC* — бирелгән өчпочмак, *O* — аңа камаулы әйләнәнең үзәге, *D*, *E* һәм *F* — әйләнәнең өчпочмак якларына орыну нокталары булсын (98 нче рәсем). *AOD* һәм *AOE* турыпочмаклы өчпочмаклары гипотенуза һәм катет буенча тигезләр. Аларның *AO* гипотенузасы уртак, ә *OD* һәм *OE* катетлары радиуслар буларак тигез. Өчпочмаклар тигезлегеннән *OAD* һәм *OAE* почмакларының тигезлеге килеп чыга. Димәк, *O* ноктасы өчпочмакның *A* түбәсеннән үткәрелгән биссектрисасы өстендә ята. *O* ноктасының өчпочмакның калган ике биссектрисасы өстендә ятканлыгы шул ук юл белән исбат ителә. Теорема исбатланды.



98 нче рәсем

42. ТӨЗҮГӘ МӘСЬӘЛӘЛӘР НӘРСӘ УЛ

Төзүгә мәсьәләләрдә геометрик фигураларны бирелгән сызым инструментлары ярдәмендә төзү турында сөйләнә. Шундый инструментлар еш кына линейка һәм циркуль була. Мәсьәләне чишү фигураны төзүдән бигрәк аны ничек төзүне хәл итүдән һәм тиешле исбатлаудан тора. Фигураны төзү ысулы күрсәтелгәч һәм күрсәтелгән төзүләр нәтиҗәсендә чыннан да таләп ителгән үзлекләргә ия булган фигура төзелгәнен исбат иткәч кенә, мәсьәлә чишелгән дип исәпләнә.

Геометрик төзү инструменты булган линейка ярдәмендә ирекле туры; бирелгән нокта аша узучы ирекле туры; бирелгән ике нокта аша узучы туры үткәрергә мөмкин. Линейка ярдәмендә башка бернәрсә дә эшләп булмый. Бүлемнәре булса да, линейка ярдәмендә кисемтә дә салып булмый.

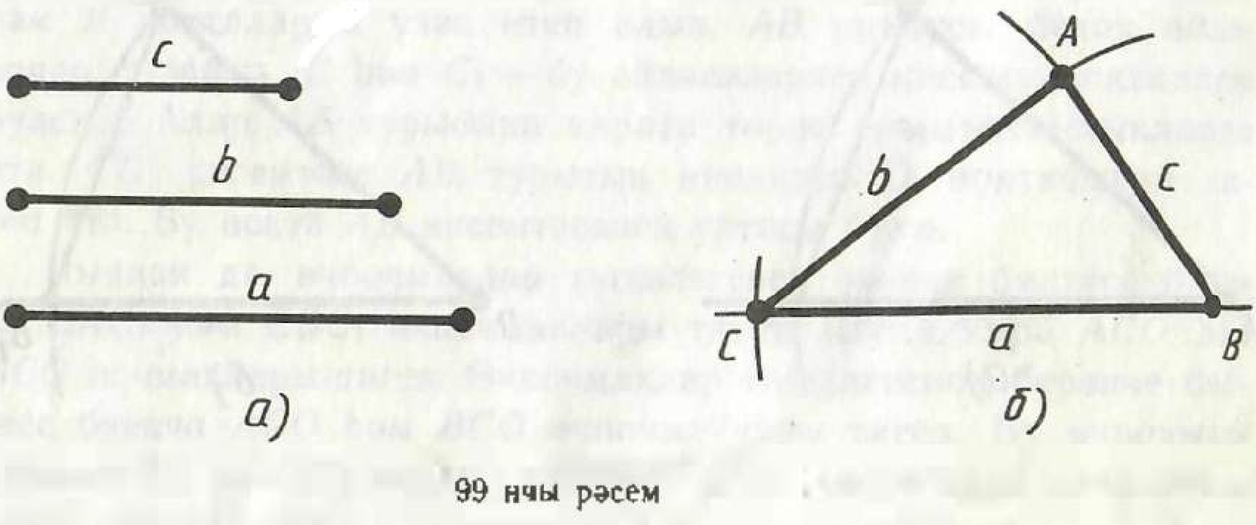
Геометрик төзү инструменты булган циркуль ярдәмендә бирелгән үзәктән бирелгән радиуслы әйләнә үткәреп була. Бирелгән туры өстендә, бирелгән ноктадан башлап, циркуль ярдәмендә бирелгән кисемтәне салырга мөмкин.

Төзүгә иң гади мәсьәләләрне карап китик.

43. БИРЕЛГӘН ЯКЛАРЫ БУЕНЧА ӨЧПОЧМАК ТӨЗҮ

Мәсьәлә 5.1. ***Бирелгән яклары: a, b, c буенча өчпочмак төзергә*** (99 нчы рәсем, *a*).

Чишү. Линейка ярдәмендә ирекле туры үткәрәбез һәм аның өстендә ирекле *B* ноктасы билгелибез (99 нчы рәсем, *б*). Циркульне *a* га тигез итеп ачып, *B* үзәге һәм *a* радиусы белән



99 нчы рәсем

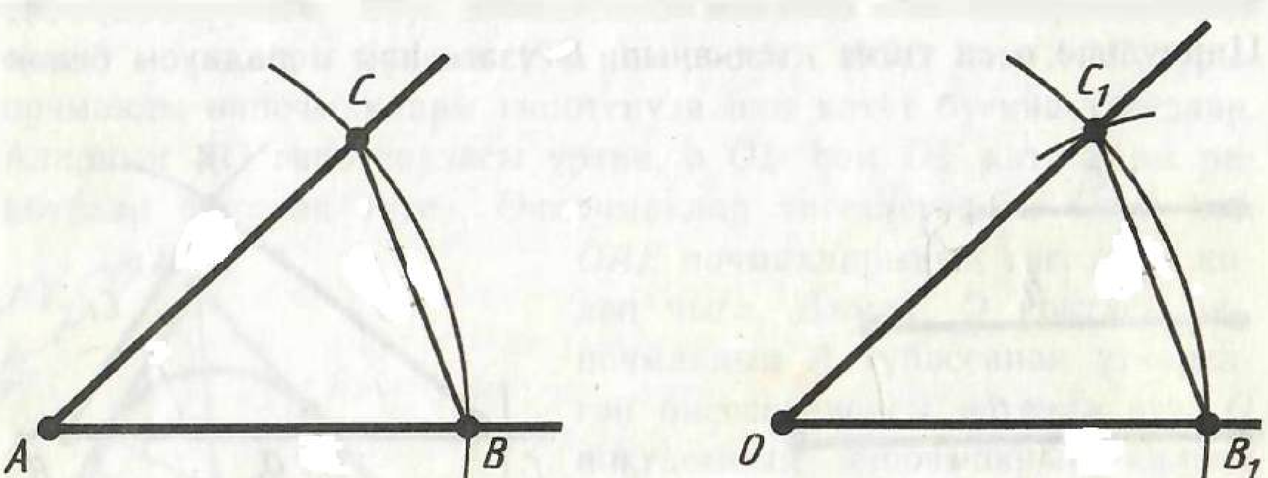
әйләнә сызабыз. C — аның туры белән кисешү ноктасы булсын. Аннан соң, B һәм C нокталарын үзәк итеп алып, берсенең радиусын c га, икенчесенекен b га тигез итеп, ике әйләнә сызабыз. A — бу әйләнәләрнең кисешү ноктасы булсын. AB һәм AC кисемтәләре үткәрәбез. ABC — яклары a, b, c га тигез булган өчпочмак.

44. БИРЕЛГӘН ПОЧМАККА ТИГЕЗ ПОЧМАК ТӨЗҮ

Мәсьәлә 5.2. ***Бирелгән ярымъяссылыкка бирелгән ярымтурыдан башлап бирелгән почмакка тигез булган почмак салырга.***

Чишү. Бирелгән почмакның A түбәсен үзәк итеп алып, ирекле әйләнә сызабыз (100 нче рәсем, *а*). B һәм C — әйләнәнең почмак яклары белән кисешү нокталары булсын. Бирелгән ярымтурының башлангыч ноктасы O ны үзәк итеп алып, AB радиусы белән әйләнә үткәрәбез (100 нче рәсем, *б*). Бу әйләнә белән бирелгән ярымтурының кисешү ноктасын B_1 дип тамгалыйк. B_1 үзәге һәм BC радиусы белән әйләнә сызабыз. Күрсәтелгән ярымъяссылыкта төзелгән әйләнәләрнең кисешү ноктасы C_1 эзләнелә торган почмакның ягы өстендә ята.

Исбат итү өчен тиңдәшле якларының тигезлеге буенча ABC һәм OB_1C_1 өчпочмакларының тигез икәнен күрсәтү җитә. A һәм O почмаклары бу өчпочмакларның тиңдәш почмаклары була.



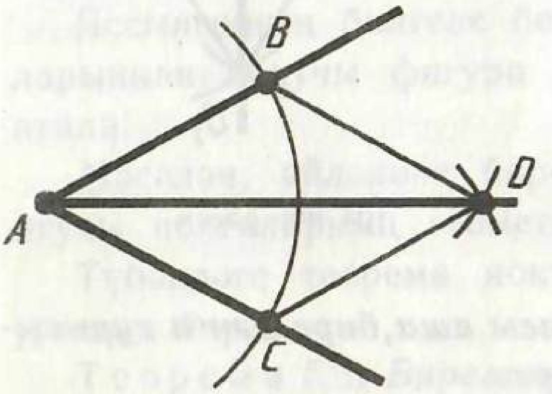
100 нче рәсем

45. ПОЧМАКНЫҢ БИССЕКТРИСАСЫН ТӨЗҮ

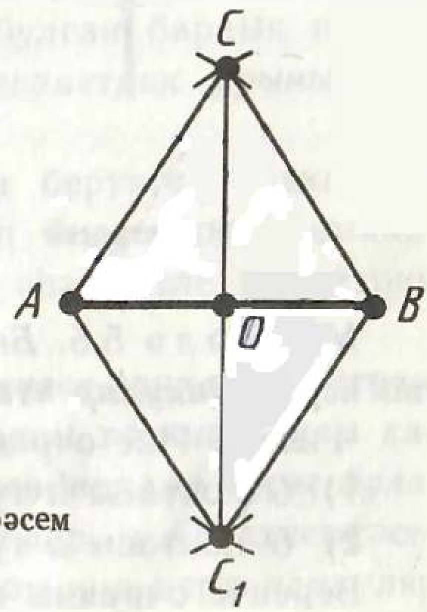
Мәсьәлә 5.3. ***Бирелгән почмакның биссектрисасын төзергә.***

Чишү. Бирелгән почмакның A түбәсен үзәк итеп алып, ирекле радиус белән әйләнә үткәрәбез (101 нче рәсем). Аның почмак яклары белән кисешү нокталары B һәм C булсын. B һәм C нокталарын үзәк итеп алып, шул ук радиус белән әйләнәләр сызабыз. D ноктасы аларның A ноктасыннан үзгә кисешү ноктасы булсын. AD ярымтурысы үткәрәбез.

AD нуры биссектриса була, чөнки BAC почмагын урталай бүлә. Бу DAB һәм DAC почмаклары тиңдәш почмаклар булган ABD һәм ACD өчпочмакларының тигезлегеннән килеп чыга.



101 нче рәсем



102 нче рәсем

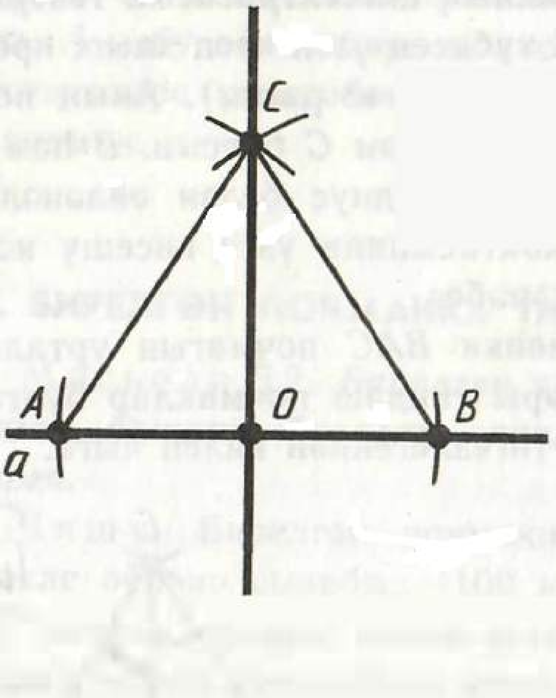
46. КИСЕМТӘНЕ УРТАЛАЙ БҮЛҮ

Мәсьәлә 5.4. ***Кисемтәне урталай бүләргә.***

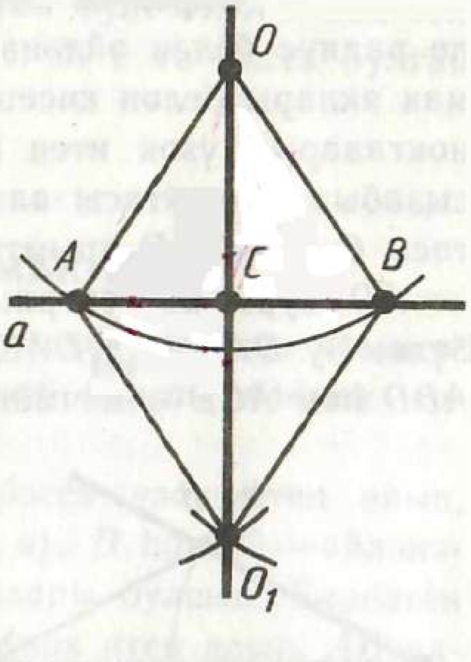
Чишү. AB — бирелгән кисемтә булсын (102 нче рәсем). A һәм B нокталарын үзәк итеп алып, AB радиусы белән әйләнәләр сызабыз. C һәм C_1 — бу әйләнәләрнең кисешү нокталары булсын. Алар AB турысына карата төрле ярымъяссылыкларда ята. CC_1 кисемтәсе AB турысын ниндидер O ноктасында кисеп үтә. Бу нокта AB кисемтәсенең уртасы була.

Чыннан да, өчпочмаклар тигезлегенең өченче билгесе буенча CAC_1 һәм CBC_1 өчпочмаклары тигез. Шуңа күрә ACO һәм BCO почмаклары тигез. Өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесе буенча ACO һәм BCO өчпочмаклары тигез. Бу өчпочмакларның AO һәм BO яклары тиңдәш яклар, шуңа күрә алар үзара тигез. Шулай итеп, O ноктасы AB кисемтәсенең уртасы була.

47. ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТУРЫ ТӨЗҮ



103 нче рәсем



104 нче рәсем

Мәсьәлә 5.5. ***Бирелгән O ноктасы аша, бирелгән a турысына перпендикуляр итеп, туры үткәрергә.***

Чишү. Ике очрак булуы мөмкин:

1) O ноктасы a турысы өстендә ята.

2) O ноктасы a турысы өстендә ятмый.

Беренче очракны карыйк (103 нче рәсем).

O ноктасын үзәк итеп алып, ирекле радиус белән әйләнә үткәрәбез. Ул a турысын ике нокта: A һәм B нокталарында кисеп үтә. A һәм B нокталарыннан AB радиусы белән әйләнәләр үткәрәбез. C — аларның кисешү ноктасы булсын. Эзләнелгән туры O һәм C нокталары аша уза.

ACO һәм BCO өчпочмакларының O түбәсе янындагы почмаклары тигез булганлыктан, OC һәм AB турылары перпендикуляр булалар. Бу өчпочмаклар тигезлегенең өченче билгесе буенча тигез.

Икенче очракны карыйк (104 нче рәсем).

O ноктасын үзәк итеп алып, a турысын кисеп узучы әйләнә үткәрәбез. A һәм B — әйләнәнең a турысы белән кисешү нокталары булсын. Шул ук радиус белән A һәм B нокталарыннан әйләнәләр үткәрәбез. O_1 — әйләнәләрнең кисешү ноктасы булсын, ул O ноктасы яткан ярымъяссылыкта түгел, ә башка ярымъяссылыкта ята. Эзләнелгән туры O һәм O_1 нокталары аша уза. Моны исбат итик.

AB һәм OO_1 турыларының кисешү ноктасын C дип тамгалыйк. Өченче билге буенча AOB һәм AO_1B өчпочмаклары үзара тигез. Шуңа күрә OAC почмагы O_1AC почмагына тигез. Ул чакта OAC һәм O_1AC өчпочмаклары беренче билге буенча тигез була. Димәк, аларның ACO һәм ACO_1 почмаклары тигез. Алар чиктәш почмаклар булганлыктан, туры почмаклар була. Шулай итеп, OC турысы O ноктасыннан a турысына төшерелгән перпендикуляр була.

48. НОКТАЛАРНЫҢ ГЕОМЕТРИК УРЫНЫ

Геометрик урыннар методы төзүгә мәсьәләләр чишү методларының берсе булып тора.

Яссылыкның билгеле бер үзлеккә ия булган барлык ноктaларыннан торучы фигура ***нокталарның геометрик урыны*** дип атала.

Мәсәлән, әйләнәне бирелгән ноктадан бертигез ераклыкта ятучы нокталарның геометрик урыны дип билгеләргә мөмкин.

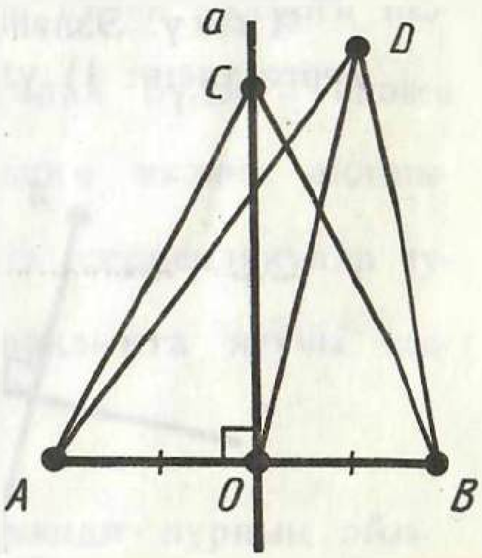
Түбәндәге теорема нокталарның бик әһәмиятле геометрик урынын бирә.

Т е о р е м а 5.3. ***Бирелгән ике ноктадан тигез ераклыкта ятучы нокталарның геометрик урыны бу нокталарны тоташтыручы кисемтәнең уртасы аша үтүче һәм аңа перпендикуляр туры була.***

И с б а т л а у. A һәм B — бирелгән нокталар, a AB кисемтәсенең уртасы булган O ноктасы аша узучы һәм аңа перпендикуляр туры булсын (105 нче рәсем). Без:

1) a турысының һәр ноктасы A һәм B нокталарыннан тигез ераклыкта ятканын;

2) яссылыкның A һәм B нокталарыннан тигез ераклыкта ятучы һәр D ноктасының a турысы өстендә ятканын исбатларга тиешбез.



105 нче рәсем

AOC һәм BOC өчпочмакларының тигезлегеннән a турысындагы һәр C ноктасының A һәм B нокталарыннан тигез ераклыкта ятканлыгы килеп чыга. Бу өчпочмакларның O түбәсе янындагы почмаклары туры, OC ягы

уртак, ә O ноктасы AB кисемтәсенең уртасы булганлыктан, $AO = OB$.

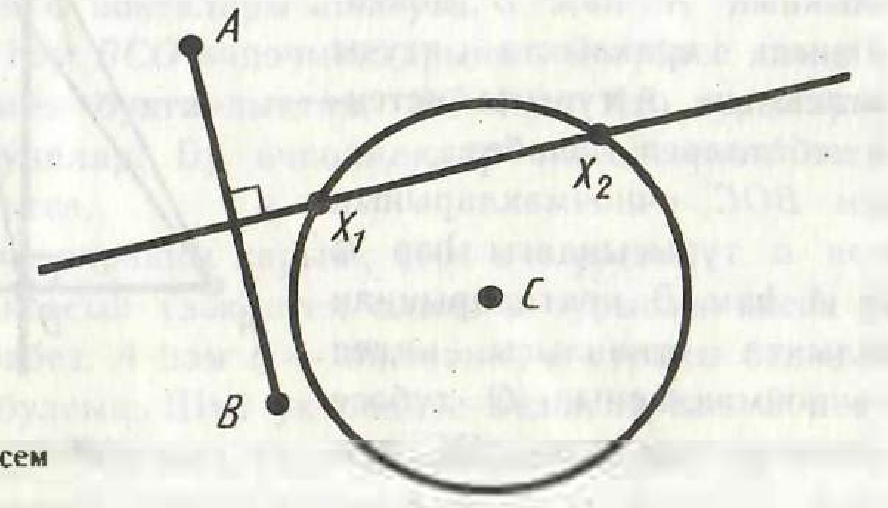
Хәзер инде яссылыкны A һәм B нокталарыннан тигез ераклыкта ятучы һәр D ноктасының a турысы өстендә ятканын исбатлыйк. ADB өчпочмагын карыйк. Ул тигезьянлы, чөнки $AD = BD$. DO — аның медианасы. Тигезьянлы өчпочмакның нигезенә үткәрелгән медианасы аның биеклеге дә була. Димәк, D ноктасы a турысы өстендә ята. Теорема исбатланды.

49. ГЕОМЕТРИК УРЫННАР МЕТОДЫ

Төзүгә мәсьәләләр чишүдә кулланыла торган геометрик урыннар методының асылы түбәндәгедән тора. Безгә төзүгә мәсьәлә чишкәндә ике шартны канәгатьләндерерлек X ноктасы табарга кирәк булсын. Беренче шартны канәгатьләндергән нокталарның геометрик урыны — ниндидер F_1 фигурасы, ә икенче шартны канәгатьләндергән нокталарның геометрик урыны — ниндидер F_2 фигурасы. Эзләнелә торган X ноктасы F_1 һәм F_2 фигураларыныкы, ягъни аларның кисешү ноктасы була. Әгәр бу геометрик урыннар гади булса (мәсәлән, әйләнәләр һәм турылардан торса), ул вакытта без аларны төзеп, безне кызыксындырган X ноктасын таба алабыз. Мисал китерик.

Мәсьәлә (43). Өч нокта: A, B, C бирелгән. A һәм B нокталарыннан бертигез ераклыкта һәм C ноктасыннан бирелгән ераклыкта ятучы X ноктасын төзегез.

Чишү. Эзләнелә торган X ноктасы өчен ике шарт үтәлергә тиеш: 1) ул A һәм B нокталарыннан бертигез ерак-



106 нчы рәсем

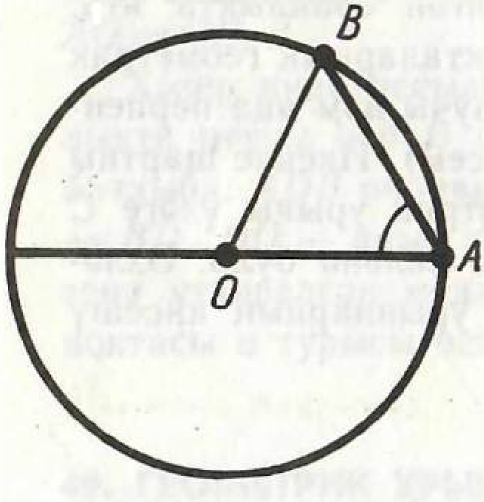
лашкан; 2) ул C ноктасыннан бирелгән ераклыкта ята. Беренче шартны канәгатьләндерүче нокталарның геометрик урыны AB кисемтәсенең уртасы аша узучы һәм аңа перпендикуляр булган туры була (106 нчы рәсем). Икенче шартны канәгатьләндерүче нокталарның геометрик урыны үзәге C ноктасында булган бирелгән радиуслы әйләнә була. Эзләнелә торган X ноктасы бу геометрик урыннарның кисешү ноктасына ята.

КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Әйләнә, әйләнәнең үзәге, радиус нәрсә ул?
2. Әйләнәнең хордасы нәрсә ул? Нинди хорда диаметр дип атала?
3. Өчпочмакны камаучы дип нинди әйләнә атала?
4. Өчпочмакны камаучы әйләнәнең үзәге өчпочмакның якларына үткәрелгән урта перпендикулярларның кисешү ноктасында ятканын исбат итегез.
5. Нинди туры әйләнәгә орынма дип атала?
6. Әйләнәләр бирелгән ноктада орыналар дип әйтү нәрсәне аңлата?
7. Әйләнәләрнең орынуы кайсы очракта тышкы, ә кайсы очракта эчке дип атала?
8. Нинди әйләнә өчпочмакка камаулы дип атала?
9. Өчпочмакка камаулы әйләнәнең үзәге өчпочмакның биссектрисалары кисешү ноктасында ятканын исбат итегез.
10. Өч ягы буенча ничек итеп өчпочмак төзергә мөмкин икәнен аңлатыгыз.
11. Бирелгән почмакка тигез почмакны бирелгән ярымъяссылыкка бирелгән ярымтурыдан башлап ничек салырга икәнен аңлатыгыз.
12. Бирелгән почмакны ничек итеп урталай бүләргә икәнен аңлатыгыз.
13. Кисемтәне ничек итеп урталай бүләргә икәнен аңлатыгыз.
14. Бирелгән нокта аша бирелгән турыга перпендикуляр турыны ничек үткәрергә?
15. Бирелгән ике ноктадан бертигез ераклыкта ятучы нокталарның геометрик урыны нәрсә була?

МӘСЬӘЛӘЛӘР

1. Әйләнәнең үзәгеннән чыккан теләсә нинди нурның әйләнәне бер ноктада кисеп үтүен исбатлагыз.
2. Әйләнәнең үзәге аша узган туры әйләнәне ике ноктада кисеп үтә, шуны исбатлагыз.



107 нче рәсем

3. Әйләнә хордасының уртасы аша узган диаметрның хордага перпендикуляр икәнен исбат итегез.

4. 3 нче мәсьәләнең раславына кире теореманы әйтегез һәм аны исбат итегез.

5. 1) Бирелгән әйләнәнең ноктасыннан диаметр һәм радиуска тигез булган хорда уздырылган. Алар арасындагы почмакны табыгыз (107 нче рәсем).

2) Бирелгән әйләнәнең ноктасыннан радиуска тигез булган ике хорда үткәрелгән. Алар арасындагы почмакны табыгыз.

6. Өчпочмакның ике ягының урта перпендикулярлары үзара кисешәләр икәнен исбатлагыз.

7. Әйләнә турыга ике ноктада орына аламы? Җавапны аңлатыгыз.

8. Әйләнә белән аңа орынманың орыну ноктасыннан башка уртак нокталары юк икәнен исбат итегез.

9. Әйләнәнең радиусына тигез булган AB хордасы әйләнәгә A ноктасында орынучы орынма белән нинди почмаклар ясый?

10. Әйләнәгә радиуска тигез булган хорданың очларында орынган турылар нинди почмак ясап кисешәләр?

11. Радиуслары 30 см һәм 40 см булган әйләнәләр орыналар. Әйләнәләрнең орынуы эчке һәм тышкы булган очраклар өчен аларның үзәкләре арасындагы ераклыкны табыгыз.

12. Радиуслары 25 см һәм 50 см га тигез булган әйләнәләр үзәкләре арасындагы ераклык 60 см булганда бер-беренә орыналармы?

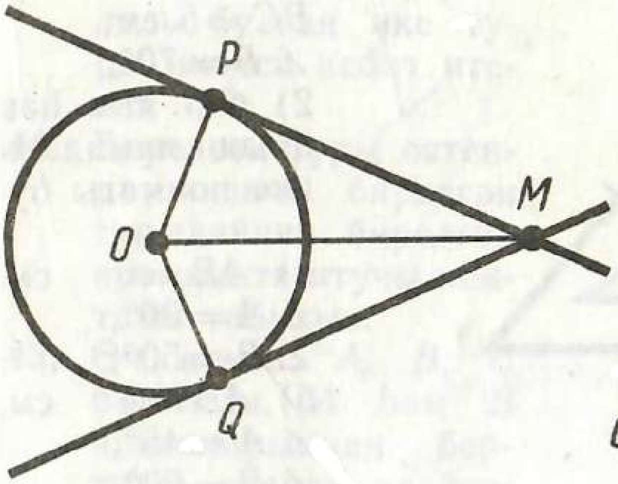
13*. 1) A, B, C нокталары туры өстендә яталар, ә O ноктасы аның өстендә ятмый. AOB һәм BOC өчпочмаклары AB һәм BC нигезле тигезьянлы өчпочмаклар була алалармы? Җавапны аңлатыгыз.

2) Әйләнә белән турының кисешү нокталары икедән дә артык була аламы?

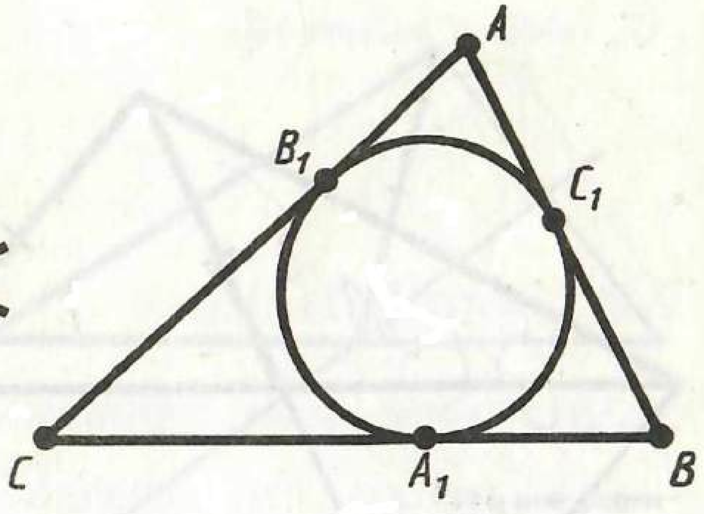
14*. 1) O һәм O_1 үзәкле әйләнәләр A һәм B нокталарында кисешәләр. AB турысының OO_1 турысына перпендикуляр икәнен исбат итегез.

2) Ике әйләнәнең бары тик ике генә ноктада кисешкәнен исбат итегез.

15*. 1) O үзәкле әйләнәнең A ноктасы аша әйләнәгә орынмаучы туры үткәрелгән. OB — турыга төшерелгән перпен-



108 нче рәсем



109 нчы рәсем

дикуляр. AB кисемтәсенең дәвамына $AB = BC$ кисемтәсе салынган. C ноктасының әйләнә өстендә ятканын исбат итегез.

2) Әгәр турының әйләнә белән бер генә уртак ноктасы булса, ул вакытта бу туры әйләнәгә шул ноктадагы орынма була. Шуны исбатлагыз.

3) Әгәр ике әйләнәнең бер генә уртак ноктасы булса, ул чагында алар бу ноктада орыналар. Шуны исбатлагыз.

16*. 1) Әйләнәгә бер ноктадан ике орынма үткәрелгән (108 нче рәсем). Орынмаларның MP һәм MQ кисемтәләре тигез икәнен исбат итегез.

2) Әйләнәгә бер ноктадан икедән артык орынма үткәреп булмавын исбат итегез.

17. Тигезьяклы өчпочмак бер әйләнә белән камалган, ә икенче әйләнә ул өчпочмакка камаулы. Бу әйләнәләрнең үзәкләре тәңгәл килгәнен исбат итегез.

18. ABC өчпочмагына камалган әйләнә аның якларына A_1, B_1, C_1 нокталарында орына (109 нчы рәсем). $AC_1 = \frac{AB + AC - BC}{2}$ икәнен исбат итегез.

19. Әгәр: 1) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см; 2) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см; 3) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 6$ см га тигез булса, бирелгән өч ягы: a, b һәм c буенча өчпочмак төзегез.

20. ABC өчпочмагы бирелгән. Аңа тигез булган икенче ABD өчпочмагы төзегез.

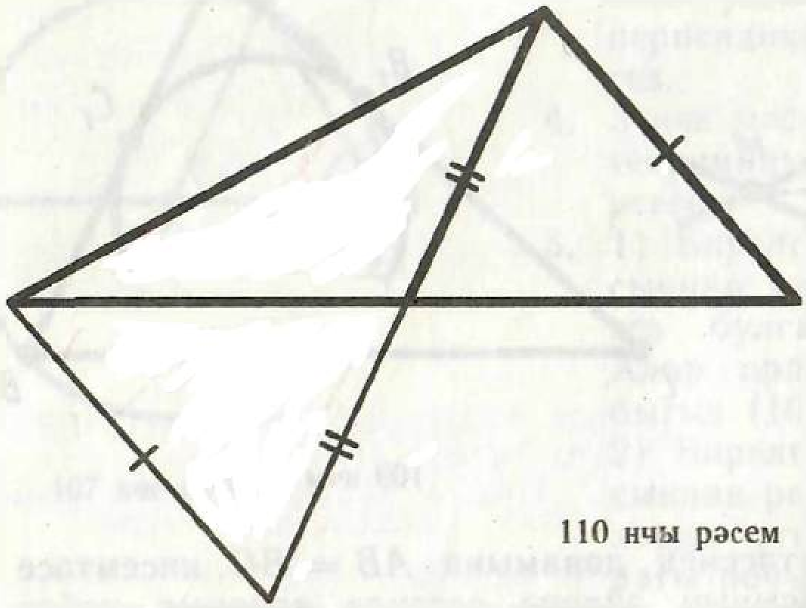
21. Бирелгән радиусы буенча бирелгән ике нокта аша узучы әйләнә төзегез.

22. Ике ягы һәм камаучы әйләнәнең радиусы буенча өчпочмак төзегез.

23. Түбәндәге бирелгәннәр буенча ABC өчпочмагы төзегез:

1) Ике ягы һәм алар арасындагы почмагы буенча:

а) $AB = 5$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 40°$;



110 нчы рәсем

б) $AB=3$ см, $BC=5$ см, $\angle B=70°$;

2) бер ягы һәм аның янындагы ике почмагы буенча:

а) $AB=6$ см, $\angle A=30°$, $\angle B=50°$;

б) $AB=4$ см, $\angle A=45°$, $\angle B=60°$.

24. Ике ягы һәм озынрак ягына каршы ятучы почмагы буенча өчпочмак төзегез:

1) $a=6$ см, $b=4$ см, $\alpha=70°$;
2) $a=4$ см, $b=6$ см, $\beta=100°$.

25. Ян ягы һәм нигезе янындагы почмагы буенча тигезьянлы өчпочмак төзегез.

26. Бирелгән өчпочмакка камаулы әйләнә төзегез.

27. Почмакны дүрт тигез өлешкә бүлегез.

28. 60° һәм 30° лы почмаклар төзегез.

29. Өчпочмак бирелгән. Аның медианаларын төзегез.

30. Ике ягы һәм шул якларның берсенә үткәрелгән медианасы буенча өчпочмак төзегез.

31. Бер ягы, шул ягына үткәрелгән медианасы һәм камаучы әйләнәнең радиусы буенча өчпочмак төзегез.

32. Ике ягы һәм өченче ягына үткәрелгән медианасы буенча өчпочмак төзегез (110 нчы рәсем).

33. Өчпочмак бирелгән. Аның биеклекләрен төзегез.

34. Бирелгән өчпочмакны камаучы әйләнә төзегез.

35. Гипотенузасы һәм катеты буенча турыпочмаклы өчпочмак төзегез.

36. Ян ягы һәм нигезенә төшерелгән биеклеге буенча тигезьянлы өчпочмак төзегез.

37. Ике ягы һәм өченче ягына төшерелгән биеклеге буенча өчпочмак төзегез.

38. Ике ягы һәм аларның берсенә төшерелгән биеклеге буенча өчпочмак төзегез.

39. Бер ягы һәм шул ягына үткәрелгән медиана һәм биеклеге буенча өчпочмак төзегез.

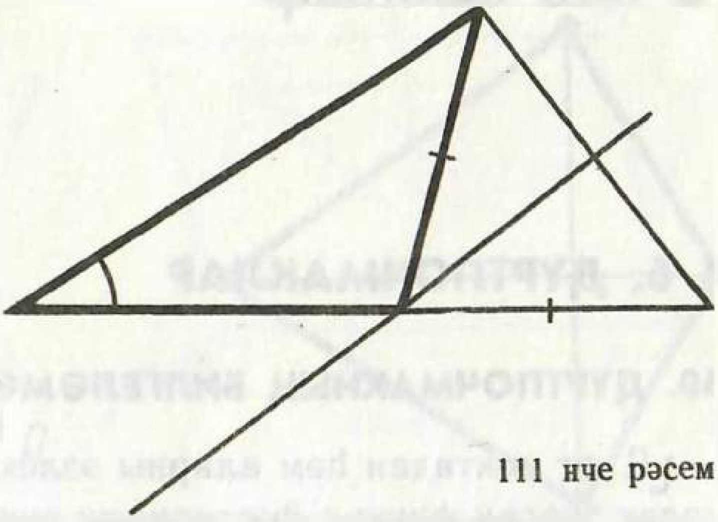
40. Нигезе һәм камаучы әйләнәнең радиусы буенча тигезьянлы өчпочмак төзегез.

41. Бирелгән турыдан h ераклыгында торучы нокталарның геометрик урыны бирелгән турыдан h ераклыгында тору-

чы һәм аңа параллель булган ике туры икәнен исбат итегез.

42. Бирелгән туры өстендә икенче бирелгән турыдан бирелгән ераклыкта ятучы ноктаны табыгыз.

43. Өч нокта: *A*, *B*, *C* бирелгән. *A* һәм *B* нокталарыннан бертигез ераклыкта һәм *C* ноктасыннан бирелгән ераклыкта ятучы *X* ноктасын төзегез.



111 нче рәсем

44. Бирелгән туры өстендә бирелгән ике ноктадан бертигез ераклыктагы ноктаны табыгыз.

45. Дүрт нокта: *A*, *B*, *C*, *D* бирелгән. *A* һәм *B* нокталарыннан бертигез ераклыкта һәм *C* һәм *D* нокталарыннан бертигез ераклыкта ятучы *X* ноктасын табыгыз.

46*. Бер ягы, аның янындагы почмагы һәм калган ике ягының суммасы буенча өчпочмак төзегез (111 нче рәсем).

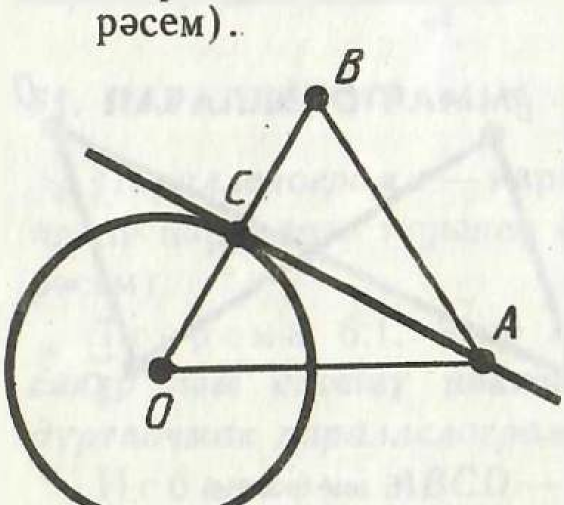
47*. Бер ягы, аның янындагы почмагы һәм калган ике ягының аермасы буенча өчпочмак төзегез.

48*. Катеты һәм икенче катеты белән гипотенузасының суммасы буенча турыпочмаклы өчпочмак төзегез.

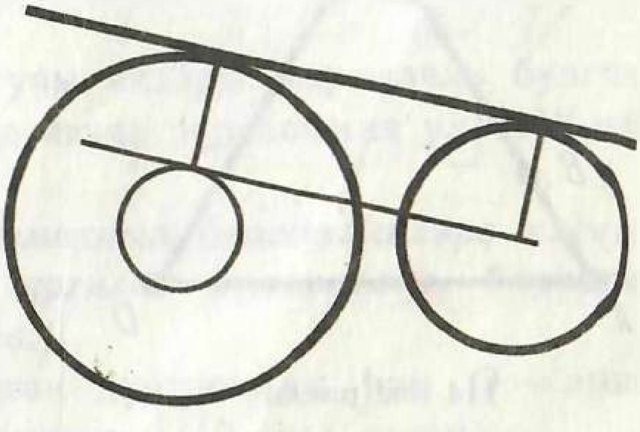
49*. 1) Үзәге *O* ноктасында һәм радиусы *R* булган әйләнәгә *A* ноктасы аша орынма үткәрелгән (112 нче рәсем). Орыну ноктасы *C* ның $OA = AB$, $OB = 2R$ булган тигезьянлы OAB өчпочмагының нигезе өстендә ятканын исбат итегез.

2) Әйләнәгә, әйләнә тышында бирелгән нокта аша үтүче, орынма үткәрегез.

50*. Бирелгән ике әйләнәгә уртак орынма үткәрегез (113 нче рәсем).



112 нче рәсем



113 нче рәсем

8 нче сыйныф

§ 6. ДҮРТПОЧМАКЛАР

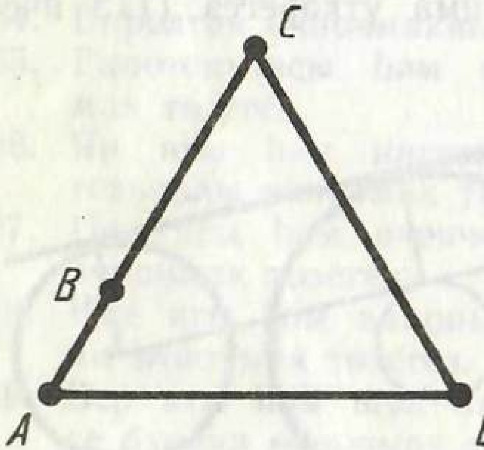
50. ДҮРТПОЧМАКНЫҢ БИЛГЕЛӘМӘСЕ

Дүрт ноктадан һәм аларны эзлекле тоташтыручы дүрт кисемтәдән торган фигура *дүртпочмак* дип атала. Монда бирелгән нокталарның теләсә кайсы өчесе бер туры өстендә ятмаска һәм аларны тоташтыручы кисемтәләр кисешмәскә тиеш. Бирелгән нокталар — дүртпочмакның *түбәләре*, ә аларны тоташтыручы кисемтәләр дүртпочмакның *яклары* дип атала.

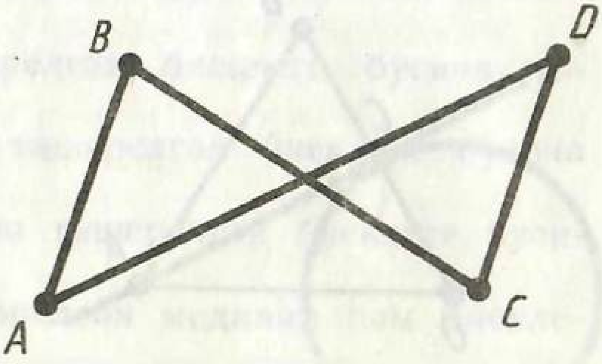
Мәсьәлә (1). 114—116 нчы рәсемнәрдә һәркайсы дүрт ноктадан һәм аларны эзлекле тоташтыручы дүрт кисемтәдән торган өч фигура күрсәтелгән. Бу фигураларның кайсы дүртпочмак булып тора?

Чишү. 116 нчы рәсемдәге фигура гына дүртпочмак булып тора, чөнки 114 нче рәсемдәге фигураның A, B, C нокталары бер туры өстендә яталар, ә 115 нче рәсемдәге фигураның BC һәм AD кисемтәләре кисешәләр.

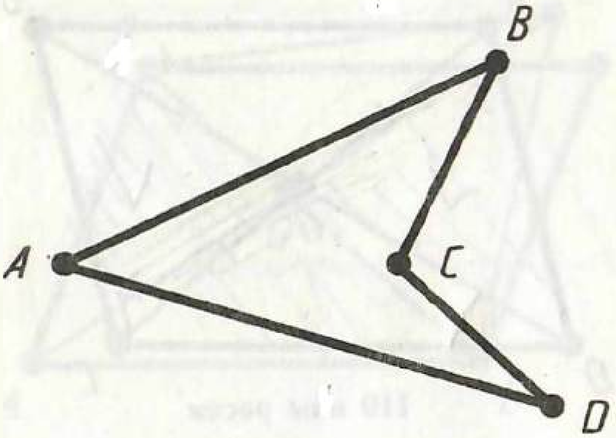
Дүртпочмакта бер ягының очлары булып торган түбәләре *күрше түбәләр* дип атала. Күрше булмаган түбәләр *каршы ятучы түбәләр* дип атала. Каршы ятучы түбәләрне тоташтыручы кисемтәләр *диагональләр* дип атала.



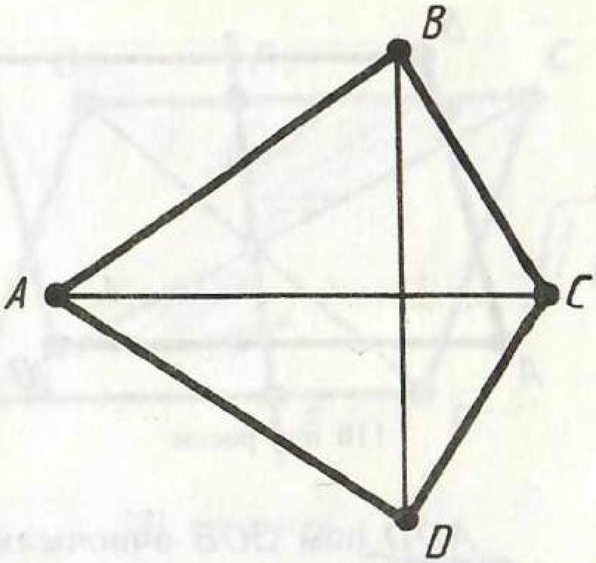
114 нче рәсем



115 нче рәсем



116 нчы рәсем



117 нче рәсем

117 нче рәсемдәге дүртпочмакның диагональләре булып *AC* һәм *BD* кисемтәләре тора.

Дүртпочмакның бер түбәдән чыгучы яклары *күрше яклар* дип атала. Уртак очлары булмаган яклар *каршы ятучы яклар* дип атала.

117 нче рәсемдәге дүртпочмакның *AB* һәм *CD*, *BC* һәм *AD* яклары каршы ятучы яклар булып торалар.

Дүртпочмак үзенең түбәләрен күрсәтеп тамгалана. Мәсәлән, 117 нче рәсемдәге дүртпочмак *ABCD* дип тамгалана. Дүртпочмакның тамгаланышында рәттән торган түбәләр күрше булырга тиеш. 117 нче рәсемдәге *ABCD* дүртпочмагын *BCDA* яки *DCBA* дип тә тамгаларга мөмкин. Ләкин *ABDC* дип тамгаларга ярамый (*B* һәм *D* күрше түбәләр түгел).

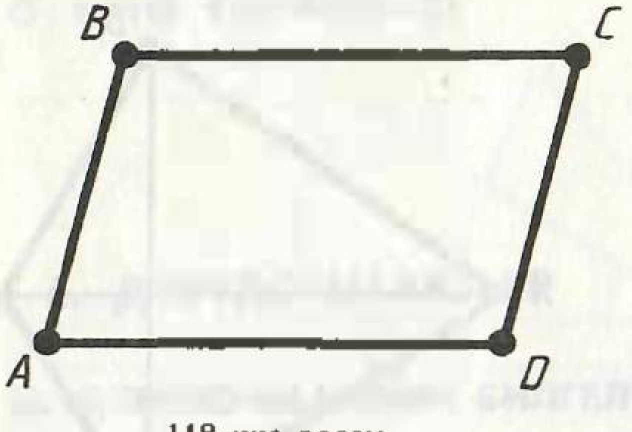
Дүртпочмакның барлык якларының озынлыклары суммасы *периметр* дип атала.

51. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

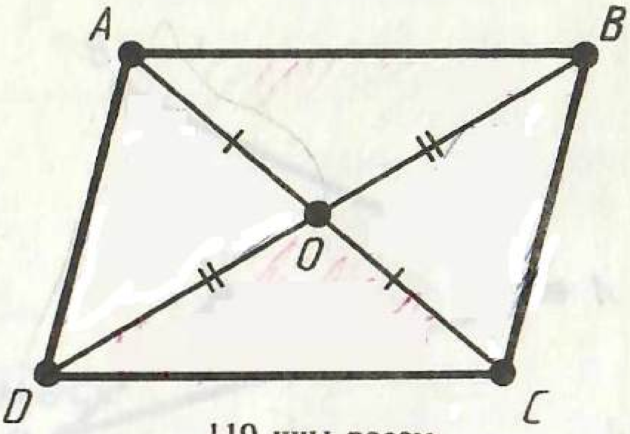
Параллелограмм — каршы ятучы яклары параллель булган, ягъни параллель турылар өстендә яткан дүртпочмак ул (118 нче рәсем).

Теорема 6.1. ***Әгәр дүртпочмакның диагональләре кисешсәләр һәм кисешү ноктасында урталай бүленсәләр, бирелгән дүртпочмак параллелограмм була.***

Исбатлау. *ABCD* — бирелгән дүртпочмак һәм *O* — аның диагональләре кисешү ноктасы булсын (119 нчы рәсем).



118 нче рәсем



119 нчы рәсем

AOD һәм *COB* өчпочмаклары тигез. Аларның *O* түбәсе янындагы почмаклары вертикаль почмаклар буларак тигез, ә $OD = OB$ һәм $OA = OC$ — теореманың шарты буенча.

Димәк, *OBC* һәм *ODA* почмаклары тигез. Ә алар *AD* һәм *BC* турылары һәм *BD* кисүчесе янындагы эчке аркылы ятучы почмаклар булып торалар. Турыларның параллельлек билгесе буенча *AD* һәм *BC* турылары параллель. *AB* һәм *CD* турыларының параллельлеге *AOB* һәм *COD* өчпочмакларының тигезлеге ярдәмендә шулай ук исбатлана.

Дүртпочмакның каршы ятучы яклары параллель булганлыктан, билгеләмә буенча бу дүртпочмак — параллелограмм. Теорема исбатланды.

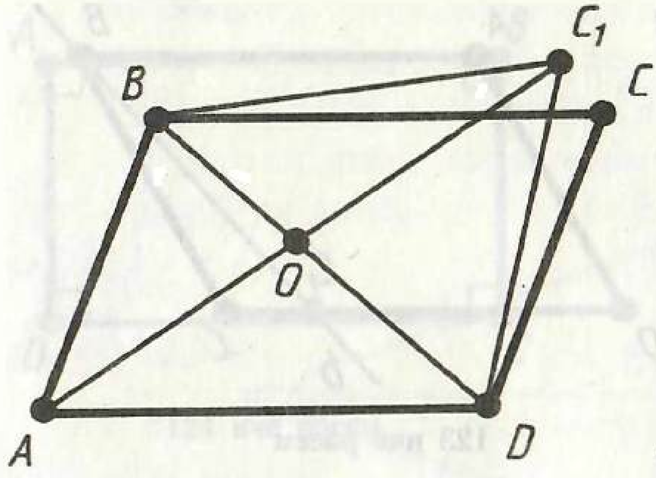
52. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ДИАГОНАЛЬЛӘРЕНЕҢ ҮЗЛЕГЕ

Теорема 6.2 (6.1 теоремасына кире). ***Параллелограммның диагональләре кисешә һәм кисешү ноктасында урталай бүленә.***

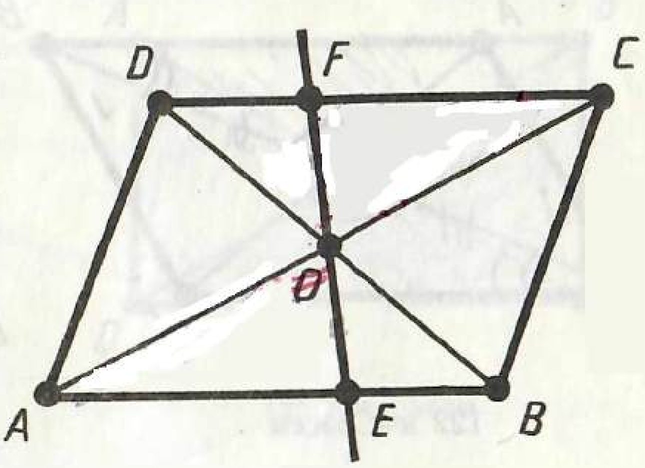
Исбатлау. *ABCD* — бирелгән параллелограмм булсын (120 нче рәсем). Аның *BD* диагонален үткәрик. Анда *O* уртасын билгелик һәм *AO* кисемтәсенең дәвамында *AO* га тигез булган OC_1 кисемтәсе салыйк.

6.1 теоремасы буенча ABC_1D дүртпочмагы параллелограмм була. Димәк, BC_1 турысы *AD* турысына параллель. Ләкин *B* ноктасы аша *AD* турысына бер генә параллель туры үткәреп була. Димәк, BC_1 турысы *BC* белән тәңгәл килә.

DC_1 турысының *DC* турысы белән тәңгәл килүе дә шулай ук исбатлана. Димәк, C_1 ноктасы *C* ноктасы белән тәңгәл килә. *ABCD* параллелограммы ABC_1D белән тәңгәл килә. Шуңа күрә



120 нче рәсем



121 нче рәсем

аның диагональләре кисешәләр һәм кисешү ноктасында урталай бүленәләр. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (6). Параллелограммның диагональләре кисешү ноктасы аша туры үткәрелгән. Аның параллель яклар арасындагы кисемтәсенең бу ноктада урталай бүленүен исбатлагыз.

Чишү. $ABCD$ — бирелгән параллелограмм һәм EF — параллель AB һәм CD якларын кисүче туры булсын (121 нче рәсем). OAE һәм OCF өчпочмаклары икенче билге буенча тигез. O ноктасы AC диагоналенең уртасы булганлыктан, аларның OA һәм OC яклары тигез. O түбәсе янындагы почмаклары вертикаль почмаклар буларак тигез, ә EAO һәм FCO почмаклары AB, CD параллельләре һәм AC кисүчесе янындагы эчке аркылы ятучы почмаклар буларак тигез.

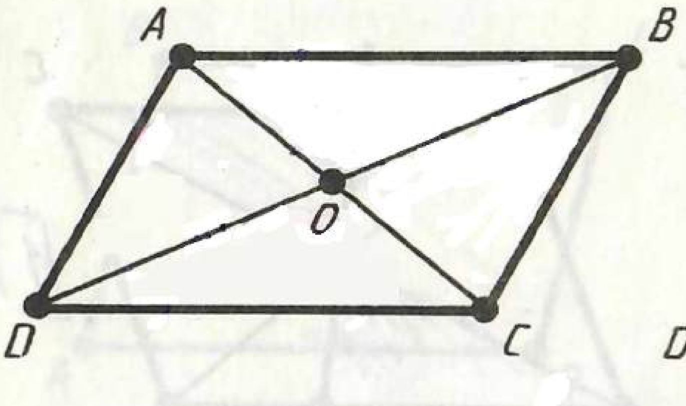
Өчпочмакларның тигезлегеннән $OE = OF$ якларының тигезлеге килеп чыга. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

53. ПАРАЛЛЕЛОГРАММНЫҢ КАРШЫ ЯТУЧЫ ЯКЛАРЫ ҺӘМ ПОЧМАКЛАРЫНЫҢ ҮЗЛЕГЕ

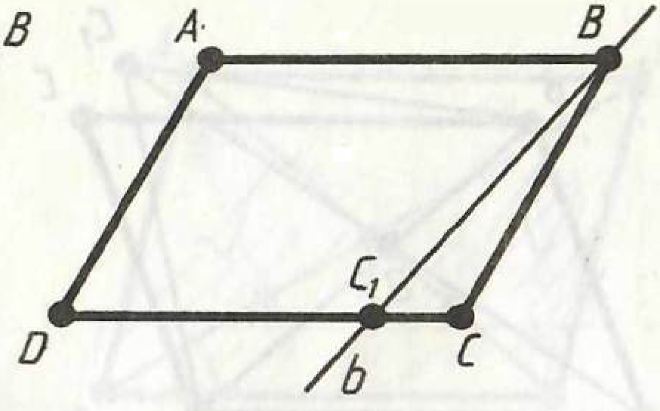
Теорема 6.3. ***Параллелограммның каршы ятучы яклары тигез, каршы ятучы почмаклары тигез.***

Исбатлау. $ABCD$ — бирелгән параллелограмм булсын (122 нче рәсем). Параллелограммның диагональләрен үткәрәбез. O — аларның кисешү ноктасы булсын.

Каршы ятучы AB һәм CD якларының тигезлеге AOB һәм COD өчпочмакларының тигезлегеннән килеп чыга. Аларның



122 нче рәсем



123 нче рәсем

O түбәсе янындагы почмаклары вертикаль почмаклар буларак тигез, ә параллелограммның диагональләре үзлеге буенча $OA = OC$ һәм $OB = OD$. Нәкъ шулай ук AOD һәм COB өчпочмакларының тигезлегеннән каршы ятучы икенче пар — AD һәм BC якларының тигезлеге килеп чыга.

Каршы ятучы ABC һәм CDA почмакларының тигезлеге ABC һәм CDA өчпочмакларының тигезлегеннән килеп чыга (өч ягы буенча). Аларда исбатлау буенча $AB = CD$ һәм $BC = DA$, ә AC ягы уртак. Каршы ятучы BCD һәм DAB почмакларының тигезлеге нәкъ шулай ук BCD һәм DAB өчпочмакларының тигезлегеннән килеп чыга. Теорема тулысынча исбатланды.

Мәсьәлә (18). Әгәр дүртпочмакның ике ягы параллель һәм тигез булса, аның параллелограмм икәнен исбатлагыз.

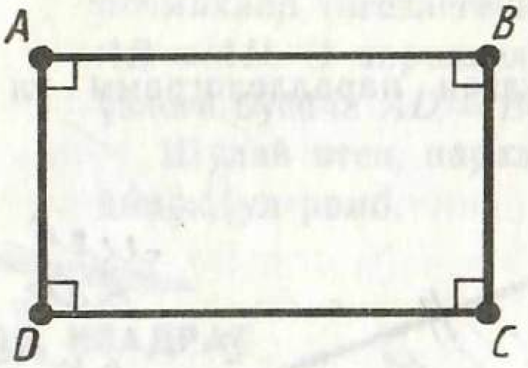
Чишү. $ABCD$ — яклары AB һәм CD параллель һәм тигез дип бирелгән дүртпочмак булсын (123 нче рәсем). B түбәсе аша, AD ягына параллель итеп, b турысы үткәрик. Бу туры DC нурын ниндидер C_1 ноктасында кисеп үтә. ABC_1D дүртпочмагы параллелограмм була. Параллелограммның каршы ятучы яклары тигез булганлыктан, $C_1D = AB$. Ә шарт буенча $AB = CD$. Димәк, $DC = DC_1$. Моннан C һәм C_1 нокталары тәңгәл килә дигән нәтиҗә чыга.

Шулай итеп, $ABCD$ дүртпочмагы ABC_1D параллелограммы белән тәңгәл килә, димәк, ул параллелограмм була.

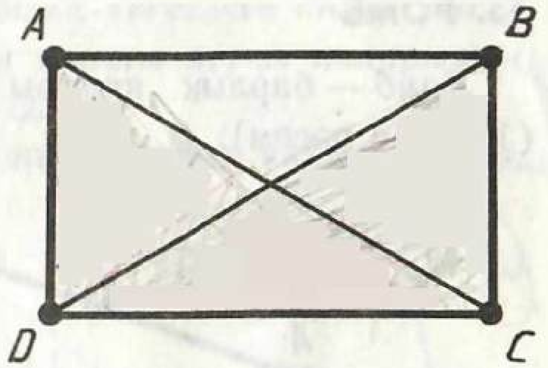
54. ТУРЫПОЧМАКЛЫК

Турыпочмаклык — барлык почмаклары да туры булган параллелограмм ул (124 нче рәсем).

Теорема 6.4. ***Турыпочмаклыкның диагональләре тигез.***



124 нче рәсем



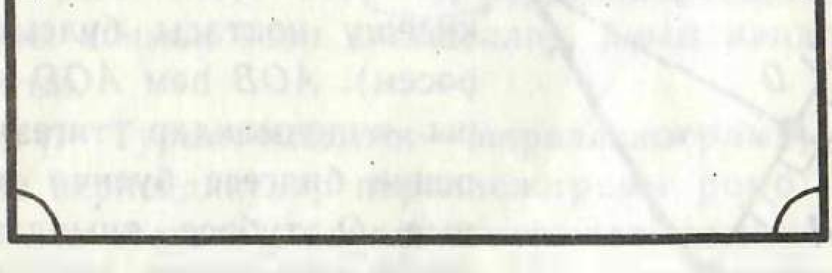
125 нче рәсем

Исбатлау. $ABCD$ — бирелгән турыпочмаклык булсын (125 нче рәсем).

Теореманың раславы BAD һәм CDA турыпочмаклы өчпочмакларының тигезлегеннән килеп чыга. Аларда BAD һәм CDA почмаклары туры, AD катеты уртак, ә AB һәм CD катетлары параллелограммның каршы ятучы яклары буларак тигез. Өчпочмакларның тигезлегеннән аларның гипотенузалары тигез икәнлеге килеп чыга. Ә гипотенузалар турыпочмаклыкның диагональләре булып торалар. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (24). Әгәр параллелограммның барлык почмаклары тигез булса, аның турыпочмаклык икәнен исбатлагыз.

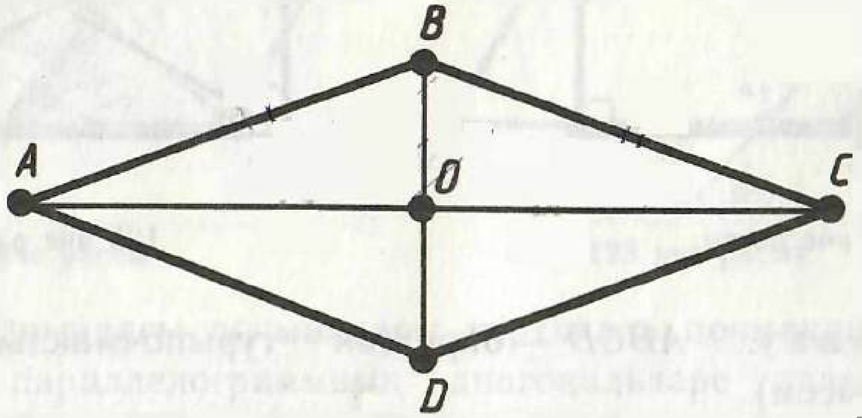
Чишү. Параллелограммның бер ягы янындагы почмаклары параллель турылар янындагы эчке якташ почмаклар булалар (126 нчы рәсем), шуңа күрә аларның суммасы 180°. Мәсьәләнең шарты буенча бу почмаклар тигез булганлыктан, аларның һәркайсы туры почмак. Ә барлык почмаклары да туры булган параллелограмм турыпочмаклык була.



126 нчы рәсем

55. РОМБ

Ромб — барлык яклары тигез булган параллелограмм ул (127 нче рәсем).



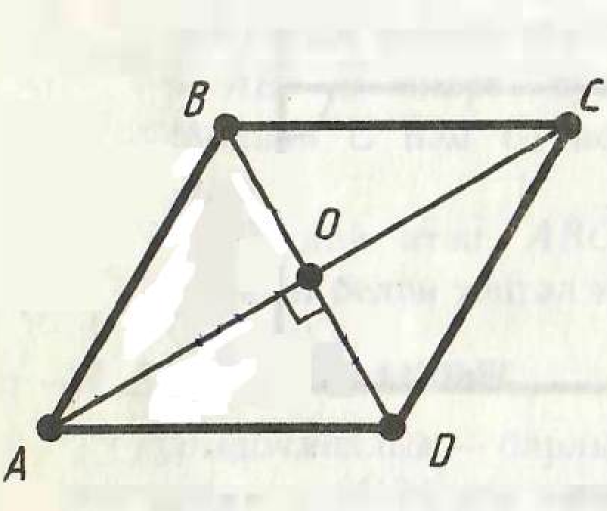
127 нче рәсем

Теорема 6.5. ***Ромбның диагональләре туры почмак ясап кисешәләр. Ромбның диагональләре аның почмакларының биссектрисалары булып торалар.***

Исбатлау. $ABCD$ — бирелгән ромб (127 нче рәсемне кара). O — диагональләрнең кисешү ноктасы булсын. Параллелограммның үзлеге буенча $AO = OC$. Димәк, ABC өчпочмагында BO кисемтәсе медиана булып тора. $ABCD$ — ромб, шуңа күрә $AB = BC$ һәм ABC өчпочмагы тигезьянлы була. Тигезьянлы өчпочмакның үзлеге буенча аның нигезенә үткәрелгән медиана биссектрисасы һәм биеклеге булып тора. Ә бу BD диагонале B почмагының биссектрисасы һәм аның AC диагоналенә перпендикуляр икәнен аңлата. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (33). Әгәр параллелограммның диагональләре перпендикуляр булсалар, аның ромб икәнен исбатлагыз.

Чишү. $ABCD$ — диагональләре перпендикуляр булган параллелограмм һәм O — диагональләрнең кисешү ноктасы булсын (128 нче рәсем). AOB һәм AOD өчпочмаклары өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесе буенча тигез. Аларның O түбәсе янындагы почмаклары мәсьәләнең шарты буенча туры почмаклар, AO ягы уртак, ә $OB = OD$ — параллелограммның диагональләре үзлеге буенча. Өч-



128 нче рәсем

почмаклар тигезлегеннән якларының тигезлеге килеп чыга: $AB = AD$. Ә параллелограммның каршы ятучы якларының үзлеге буенча $AD = BC$, $AB = CD$.

Шулай итеп, параллелограммның барлык яклары тигез, димәк, ул ромб.

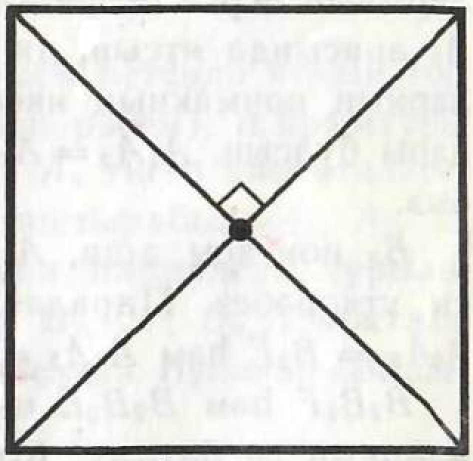
56. КВАДРАТ

Квадрат — ул барлык яклары тигез булган турыпочмаклык (129 нчы рәсем).

Квадратның яклары тигез булганлыктан, ул шулай ук ромб та була. Шуңа күрә квадрат турыпочмаклыкның һәм ромбның үзлекләренә ия:

1. ***Квадратның барлык почмаклары туры.***
2. ***Квадратның диагональләре тигез.***
3. ***Квадратның диагональләре туры почмак ясап кисешәләр һәм аның почмакларының биссектрисалары булып торалар.***

129 нчы рәсем



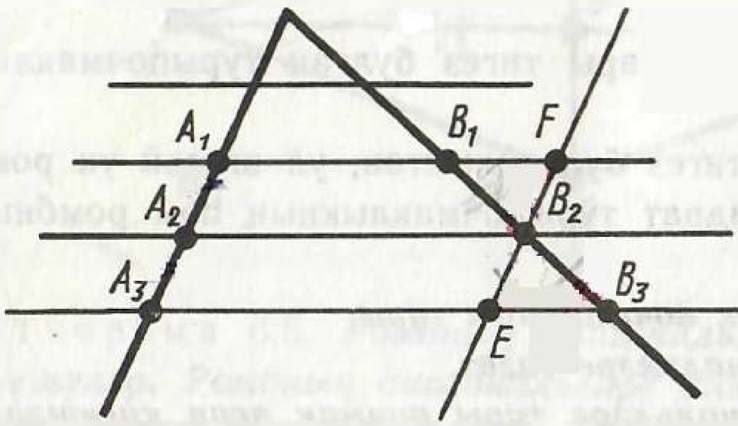
130 нчы рәсем

Мәсьәлә (40). Әгәр турыпочмаклыкның диагональләре туры почмак ясап кисешсәләр, аның квадрат икәнен исбатлагыз.

Чишү. Турыпочмаклык — параллелограмм, ә диагональләре перпендикуляр параллелограмм ромб булганлыктан (33 нче мәсьәлә), бирелгән турыпочмаклыкның барлык яклары тигез (130 нчы рәсем). Билгеләмә буенча андый турыпочмаклык квадрат була.

57. ФАЛЕС ТЕОРЕМАСЫ

Теорема 6.6. (Фалес теоремасы). ***Әгәр почмакның якларын кисүче параллель турылар аның бер ягында тигез кисемтәләр кисеп алса, бу турылар аның икенче ягында да тигез кисемтәләр кисеп ала*** (131 нче рәсем).

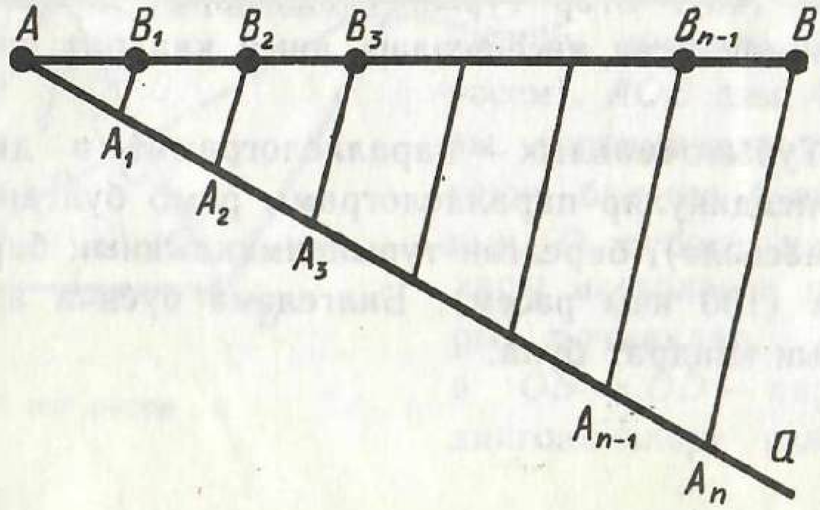


131 нче рәсем

Исбатлау. A_1, A_2, A_3 — параллель турыларның почмак якларының берсе белән кисешү нокталары һәм A_2 ноктасы A_1 һәм A_3 арасында ятсын, ди (131 нче рәсем). B_1, B_2, B_3 — бу турыларның почмакның икенче ягы белән тиңдәшле кисешү нокталары булсын. $A_1A_2 = A_2A_3$ булса, $B_1B_2 = B_2B_3$ икәнен исбатлыйбыз.

B_2 ноктасы аша, A_1A_3 турысына параллель итеп, EF турысы үткәрәбез. Параллелограммның үзлеге буенча $A_1A_2 = FB_2$, $A_2A_3 = B_2E$ һәм $A_1A_2 = A_2A_3$ булганлыктан, $FB_2 = B_2E$.

B_2B_1F һәм B_2B_3E өчпочмаклары икенче билге буенча тигез. Аларның исбатлау буенча $B_2F = B_2E$. B_2 түбәсе янындагы почмаклары вертикаль почмаклар буларак тигез, ә B_2FB_1 һәм



132 нче рәсем

B_2EB_3 почмаклары A_1B_1 һәм A_3B_3 параллельләре һәм EF кисүчесе янындагы эчке аркылы ятучы почмаклар буларак тигез.

Өчпочмакларның тигезлегеннән якларының тигезлеге: $B_1B_2 = B_2B_3$ килеп чыга. Теорема исбатланды.

Искәрмә. Фалес теоремасының шартында почмак яклары урынына теләсә нинди ике туры алырга мөмкин, бу вакытта теореманың нәтиҗәсе шул ук булыр:

бирелгән ике туры кисүче һәм аларның берсендә тигез кисемтәләр кисеп алучы параллель турылар, икенче турыда да тигез кисемтәләр кисеп ала.

Кайчакта Фалес теоремасы шушы формада да кулланылыр.

Фалес Милетский — безнең эрага кадәр VI гасырда яшәгән борынгы грек галиме

Мәсьәлә (48). Бирелгән AB кисемтәсен n тигез кисәккә бүлегез.

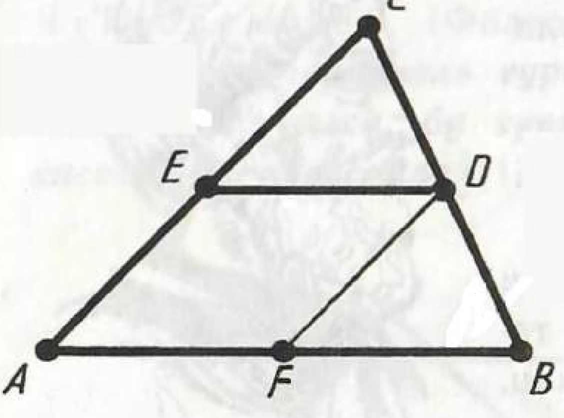
Чишү. A ноктасы аша AB турысы өстендә ятмый торган a ярымтурысы үткәрәбез (132 нче рәсем). a ярымтурысы өстендә AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ тигез кисемтәләрен салабыз. A_n һәм B нокталарын тоташтырабыз. A_1, A_2, ..., A_{n-1} нокталары аша A_nB турысына параллель турылар үткәрәбез. Алар AB кисемтәсен B_1, B_2, ..., B_{n-1} нокталарында кисәләр һәм аны n тигез кисәккә бүләләр (Фалес теоремасы буенча).

58. ӨЧПОЧМАКНЫҢ УРТА СЫЗЫГЫ

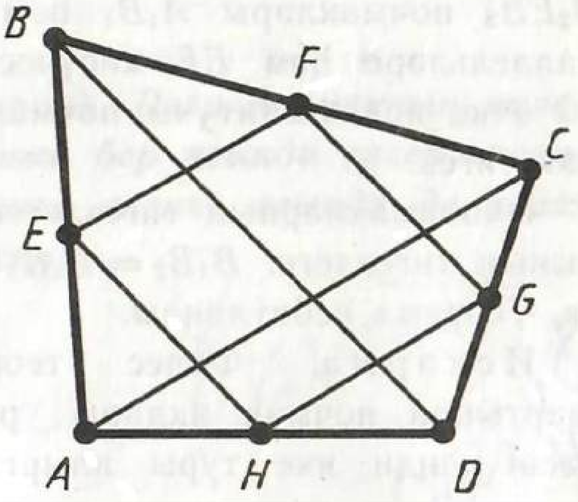
Өчпочмакның ике ягының урталарын тоташтыручы кисемтә аның *урта сызыгы* дип атала.

Теорема 6.7. ***Өчпочмакның бирелгән ике ягының урталарын тоташтыручы урта сызыгы өченче ягына параллель һәм аның яртысына тигез.***

Исбатлау. DE ABC өчпочмагының урта сызыгы булсын (133 нче рәсем). D ноктасы аша AB турысына параллель туры үткәрәбез. 6.6. Фалес теоремасы буенча ул AC кисемтәсен аның



133 нче рәсем



134 нче рәсем

уртасында кисә, ягъни DE урта сызыгы буйлап үтә. Димәк, DE урта сызыгы AB ягына параллель. Беренче раслау исбатланды.

Хәзер DF урта сызыгы үткәрәбез. Ул AC ягына параллель. $AEDF$ дүртпочмагы — параллелограмм. Параллелограммның үзлеге буенча $ED = AF$, ә Фалес теоремасы буенча $AF = FB$ булганлыктан, $ED = \frac{1}{2}AB$. Теорема исбатланды.

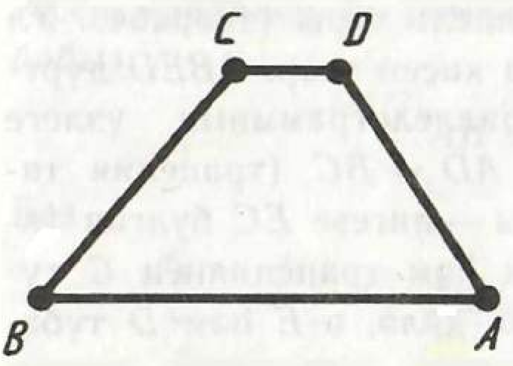
Мәсьәлә (55). Дүртпочмак якларының урталары параллелограмм түбәләре булуын исбатлагыз.

Чишү. ABC — бирелгән дүртпочмак һәм E, F, G, H — аның якларының урталары булсын (134 нче рәсем). EF — ABC өчпочмагының урта сызыгы. Шуңа күрә $EF \parallel AC$. GH — ADC өчпочмагының урта сызыгы. Шуңа күрә $GH \parallel AC$. Шулай итеп, $EF \parallel GH$, ягъни $EFGH$ дүртпочмагының каршы ятучы EF һәм GH яклары параллель. Каршы ятучы башка ике ягының параллельлеге дә шулай ук исбатлана. Димәк, $EFGH$ дүртпочмагы — параллелограмм.

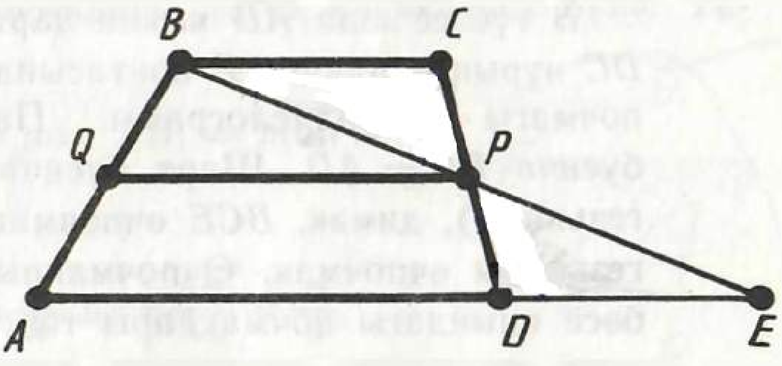
59. ТРАПЕЦИЯ

Каршы ятучы ике ягы гына параллель булган дүртпочмак *трапеция* дип атала. Бу параллель яклар трапециянең *нигезләре* дип атала. Калган ике ягы *ян яклары* дип атала. 135 нче рәсемдә сез нигезләре AB һәм CD, ян яклары BC һәм AD булган $ABCD$ трапециясен күрәсез.

Ян яклары тигез булган трапеция *тигезьянлы* дип атала.



135 нче рәсем



136 нчы рәсем

Ян якларның урталарын тоташтыручы кисемтә *трапециянең урта сызыгы* дип атала.

Теорема 6.8. ***Трапециянең урта сызыгы нигезләренә параллель һәм аларның ярымсуммасына тигез.***

Исбатлау. $ABCD$ — бирелгән трапеция булсын (136 рәсем). B түбәсе һәм ян ягы CD ның уртасы P аша туры үткәрәбез. Ул AD турысынниндидер E ноктасында кисеп үтә.

PBC һәм PED өчпочмаклары өчпочмаклар тигезлегенең икенче билгесе буенча тигез. Аларда төзү буенча $CP = DP$, P түбәсе янындагы почмаклары вертикаль почмаклар буларак тигез, ә PCB һәм PDE почмаклары BC һәм AD параллель турылары һәм CD кисүчесе янындагы эчке аркылы ятучы почмаклар буларак тигез. Өчпочмакларның тигезлегеннән якларының тигезлеге: $PB = PE$, $BC = ED$ килеп чыга.

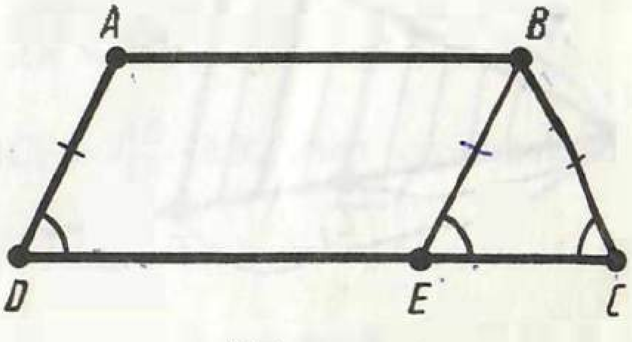
Димәк, трапециянең PQ урта сызыгы ABE өчпочмагының урта сызыгы булып тора. Өчпочмакның урта сызыгы үзлеге буенча $PQ \parallel AE$ һәм

$$PQ = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (60). Тигезьянлы трапециянең нигезе янындагы почмаклары тигез икәнен исбатлагыз.

Чишү. $ABCD$ — тигезьянлы трапеция булсын ди (137 нче рәсем). Трапециянең CD нигезе янындагы почмаклары тигез икәнлеген исбатлыйк.



137 нче рәсем

B түбәсе аша AD ягына параллель туры үткәрәбез. Ул DC нурын ниндидер E ноктасында кисеп үтәр. $ABED$ дүртпочмагы — параллелограмм. Параллелограммның үзлеге буенча $BE = AD$ Шарт буенча $AD = BC$ (трапеция тигезьянлы), димәк, BCE өчпочмагы — нигезе EC булган тигезьянлы өчпочмак. Өчпочмакның һәм трапециянең C түбәсе янындагы почмаклары тәңгәл килә, ә E һәм D түбәләре янындагы почмаклар параллель турыларны кисүче белән кистергәндә ясалган тиндәш почмаклар буларак тигез. Шуңа күрә $\angle ADC = \angle BCD$. Раслау исбатланды.

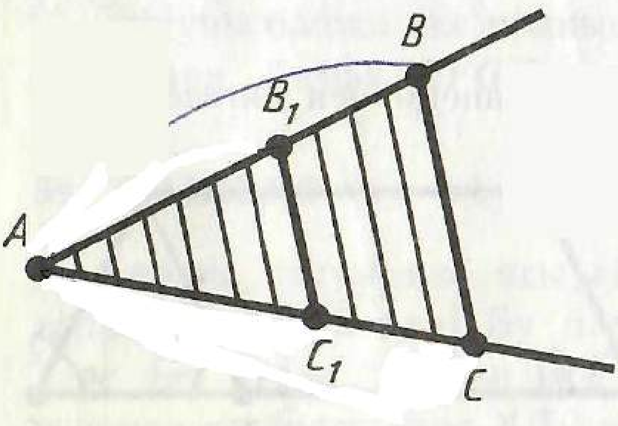
60. ПРОПОРЦИОНАЛЬ КИСЕМТӘЛӘР ТУРЫНДА ТЕОРЕМА

Теорема 6.9. ***Почмакның якларын кисүче параллель турылар почмак якларыннан пропорциональ кисемтәләр кисеп ала.***

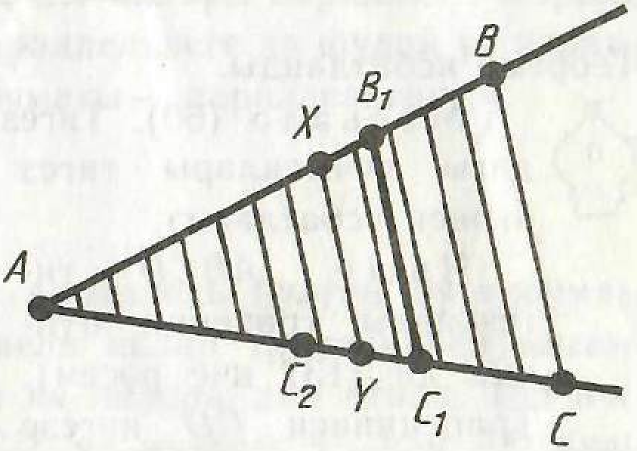
Исбатлау. A почмагының якларын параллель турылар тиңдәшле рәвештә B, C һәм B_1, C_1 нокталарында кисеп үтәләр ди (138 нче рәсем). Теоремада

$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB} \qquad (*)$$

дип раслана. (*) тигезлеген башта һәм AC кисемтәсенә, һәм AC_1 кисемтәсенә бөтен сан тапкыр салынырдай δ озынлыктагы кисемтә булган очрак өчен исбатлыйбыз. $AC = n\delta$, $AC_1 = m\delta$ һәм $n > m$ булсын. AC кисемтәсен δ озынлыгындагы n тигез кисәккә бүләбез. Бу вакытта C_1 ноктасы бүлү нокталарының берсе булыр. Бүлү нокталары аша BC турысына параллель турылар үткәрәбез. Фалес теоремасы буенча бу турылар AB кисем-



138 нче рәсем



139 нчы рәсем

тәсен ниндидер δ_1 озынлыгындагы тигез кисәкләргә бүлә. Табабыз:

$$AB = n\delta_1,\ AB_1 = m\delta_1.$$

Без

$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{m}{n} \text{ һәм } \frac{AB_1}{AB} = \frac{m}{n}$$

икәнлеген күрәбез.

Димәк,

$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB},$$

шуны исбатларга кирәк иде дә.

Теореманы хәзер гомуми очракта исбатлыйбыз (истә калдыру өчен түгел). $\frac{AC_1}{AC} \neq \frac{AB_1}{AB}$ дип карыйк, $\frac{AC_1}{AC} > \frac{AB_1}{AB}$ булсын.

AC нурында $AC_2 = \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$ кисемтәсен салабыз (139 нчы рәсем). Бу вакытта $AC_2 < AC_1$. AC кисемтәсен n тигез кисәккә бүләбез һәм бүлү нокталары аша BC турысына параллель турылар үткәрәбез.

n җитәрлек кадәр зур булганда C_1C_2 кисемтәсендә бүлү нокталары булыр. Аларның берсен Y аша, ә AB_1 кисемтәсе өстендәге аңа тиңдәш ноктаны X аша тамгалыйк. Исбатланган буенча

$$\frac{AY}{AC} = \frac{AX}{AB}.$$

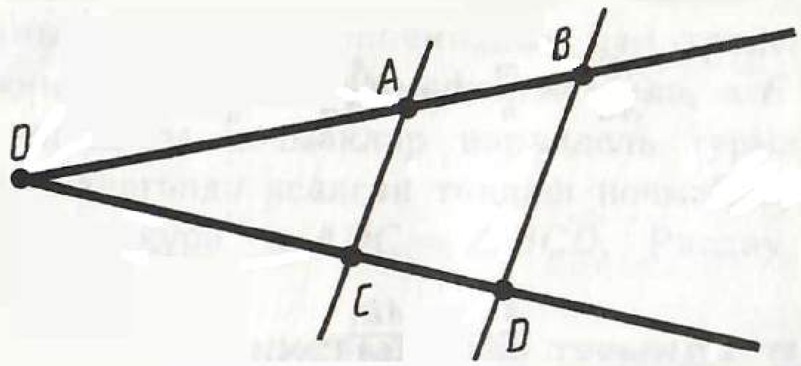
Бу тигезлектә AY зурлыгын кечкенәрәк AC_2 зурлыгы белән, ә AX зурлыгын зуррак AB_1 зурлыгы белән алыштырып, табабыз:

$$\frac{AC_2}{AC} < \frac{AB_1}{AB}.$$

Моннан $AC_2 < \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$. Ләкин $AC_2 = \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$. Без каршылыкка очрадык. Теорема исбатланды.

61. ДҮРТЕНЧЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬ КИСЕМТӘ ТӨЗҮ

Мәсьәлә 6.1. *a, b, c кисемтәләре бирелгән. $x = \frac{bc}{a}$ кисемтәсен төзергә*



140 нчы рәсем

Чишү. Түбәсе O ноктасындагы теләсә нинди җәенке булмаган почмак төзибез (140 нчы рәсем). Почмакның бер ягында $a = OA$ һәм $b = OB$ кисемтәләрен, ә икенче ягында $c = OC$ кисемтәсен салабыз. A һәм C нокталарын туры белән тоташтырабыз һәм B ноктасы аша аңа параллель итеп BD турысы үткәрәбез. $OD = x$ була.

Чынлап та, пропорциональ кисемтәләр турындагы теорема буенча

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}.$$

Моннан

$$OD = \frac{OB \cdot OC}{OA} = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Шулай итеп, OD кисемтәсе эзләгән x кисемтәсе була.

Искәрмә. Төзелгән x кисемтәсе дүртенче пропорциональ кисемтә дип атала. Бу атама аның $a : b = c : x$ пропорциясендә дүртенче буын булуы белән аңлатыла.

? КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

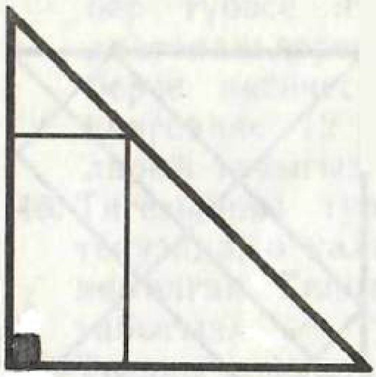
1. Нинди фигура дүртпочмак дип атала?
2. Дүртпочмакның кайсы түбәләре — күрше, кайсылары каршы ятучы түбәләр дип атала?
3. Дүртпочмакның диагональләре нәрсә ул?

4. Дүртпочмакның кайсы яклары күрше яклар дип атала? Кайсылары каршы ятучы яклар дип атала?
5. Дүртпочмак ничек тамгалана?
6. Нәрсә ул параллелограмм?
7. Әгәр дүртпочмакның диагональләре кисешсә һәм кисешү ноктасында урталай бүленсә, ул дүртпочмакның параллелограмм икәнен исбатлагыз.
8. Параллелограммның диагональләре кисешүен һәм кисешү ноктасында урталай бүленүен исбатлагыз.
9. Параллелограммның каршы ятучы якларының тигез һәм каршы ятучы почмакларының тигез икәнен исбатлагыз.
10. Нәрсә ул турыпочмаклык?
11. Турыпочмаклыкның диагональләре тигез икәнлеген исбатлагыз.
12. Нәрсә ул ромб?
13. Ромб диагональләренең туры почмак ясап кисешүен; ромб диагональләре ромб почмакларының биссектрисалары икәнен исбатлагыз.
14. Нәрсә ул квадрат? Квадратның үзлекләрен санап чыгыгыз.
15. Фалес теоремасын исбатлагыз.
16. Өчпочмакның урта сызыгы тиңдәшле якның яртысына тигез икәнен исбатлагыз.
17. Нинди дүртпочмак трапеция дип атала?
18. Нинди трапеция тигезьянлы дип атала?
19. Трапециянең урта сызыгы нигезләренең ярымсуммасына тигез икәнен исбатлагыз.
20. Пропорциональ кисемтәләр турындагы теореманы исбатлагыз.

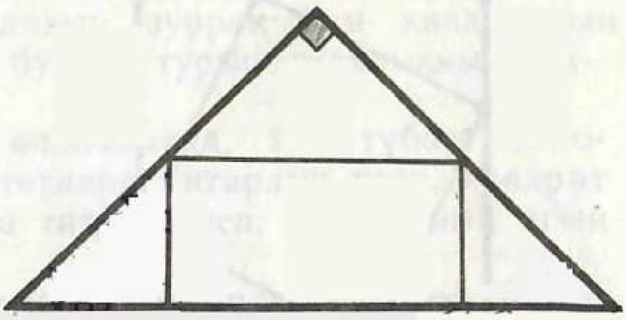
Мәсьәләләр

1. 114—116 нчы рәсемнәрдә дүрт ноктадан һәм аларны бербер артлы тоташтыручы дүрт кисемтәдән торган фигуралар бирелгән. Бу фигураларның кайсы дүртпочмак булып тора?
2. Нинди дә булса $PQRS$ дүртпочмагын төзегез. Аның каршы ятучы якларын һәм түбәләрен күрсәтегез.
3. Түбәләре бер туры өстендә ятмаган өч нокта булган ничә параллелограмм төзеп була? Аларны төзегез.
4. Тигезьянлы өчпочмакның ян ягы 5 м га тигез. Бу өчпочмакның нигезендәге нокта аша, ян якларга параллель итеп, ике туры үткәрелгән. Килеп чыккан параллелограммның периметрын табыгыз.
5. Параллелограммның диагональләре кисешү ноктасыннан аның ике түбәсенә кадәр ераклыклар 3 см һәм 4 см. Ул ноктадан калган ике түбәгә кадәр ераклыклар күпмегә тигез? Җавапны аңлатыгыз.

6. Параллелограмм диагональләренең кисешү ноктасы аша туры үткәрелгән. Аның параллель яклар арасындагы кисемтәсенең бу ноктада урталай бүленгәнен исбатлагыз.
7. *ABCD* параллелограммы диагональләренең кисешү ноктасы аша *BC* һәм *AD* якларында $BE = 2$ м һәм $AF = 2,8$ м лы кисемтәләр кисеп алучы туры үткәрелгән. *BC* һәм *AD* якларын табыгыз.
8. *ABCD* параллелограммында $AB = 10$ см, $BC = 15$ см. *AD* һәм *CD* яклары нәрсәгә тигез? Җавапны аңлатыгыз.
9. *ABCD* параллелограммында $\angle A = 30^\circ$. *B*, *C*, *D* почмаклары күпмегә тигез? Җавапны аңлатыгыз.
10. *ABCD* дүртпочмагы — периметры 10 см булган параллелограмм. *ABD* өчпочмагының периметры 8 см га тигез икәнен белеп, *BD* диагоналенең озынлыгын табыгыз.
11. Параллелограмм почмакларының берсе 40° ка тигез. Калган почмакларын табыгыз.
12. Параллелограммның бер почмагы икенчесеннән 50° ка зуррак булса, аның почмакларын табыгыз.
13. Параллелограммның бер почмагы 40° ка, икенчесе 50° ка тигез булырга мөмкинме?
14. Параллелограммның диагонале аның ике ягы белән 25° лы һәм 35° лы почмаклар төзи. Параллелограммның почмакларын табыгыз.
15. Әгәр параллелограммның ике почмагының суммасы: 1) 80°; 2) 100°; 3) 160° булса, аның барлык почмакларын табыгыз.
16. Әгәр параллелограммның ике почмагының аермасы: 1) 70°; 2) 110°; 3) 140° булса, аның барлык почмакларын табыгыз.
17. *ABCD* параллелограммында *E* ноктасы — *BC* ягының уртасы, ә *F* ноктасы — *AD* ягының уртасы. *BEDF* дүртпочмагының параллелограмм икәнен исбатлагыз.
18. Әгәр дүртпочмакның ике ягы параллель һәм тигез булса, аның параллелограмм икәнен исбатлагыз.
19. *ABCD* параллелограммында *BC* ягын *E* ноктасында кисеп үтүче *A* почмагының биссектрисасы үткәрелгән. Әгәр $AB = 9$ см, $AD = 15$ см булса, *BE* һәм *EC* кисемтәләре күпмегә тигез?
20. Параллелограммның ике ягы $3:4$ чагыштырмасында, ә периметры 2,8 м га тигез. Якларын табыгыз.
21. *ABCD* параллелограммында *B* түбәсеннән *AD* ягына төшерелгән перпендикуляр *AD* ягын урталай бүлә. Әгәр параллелограммның периметры 3,8 м га, ә *ABD* өчпочмагының периметры 3 м га тигез булса, параллелограммның якларын һәм *BD* диагонален табыгыз.
22. 1) Ике ягы һәм диагонале; 2) ягы һәм ике диагонале буенча параллелограмм төзегез.



141 нче рәсем



142 нче рәсем

23. 1) Ике ягы һәм почмагы буенча; 2) диагональләре һәм алар арасындагы почмагы буенча параллелограмм төзегез.

24. Әгәр параллелограммның барлык почмаклары тигез булса, аның турыпочмаклык икәнен исбатлагыз.

25. Параллелограммның бер генә почмагы туры почмак булса да, аның турыпочмаклык икәнен исбатлагыз.

26. Параллелограммның диагональләре тигез булса, аның турыпочмаклык икәнен исбатлагыз.

27. Кырыйлары турысызыклы бетон плита турыпочмаклык формасында булырга тиеш. Плита формасының дөреслеген бау ярдәмендә ничек тикшерергә?

28. Турыпочмаклыкның бер почмагының биссектрисасы турыпочмаклыкның ягын урталай бүлә. Әгәр турыпочмаклыкның кечкенәрәк ягы 10 см булса, аның периметрын табыгыз.

29. Турыпочмаклыкның диагональләре кисешү ноктасы аның кечкенәрәк ягыннан зуррак ягына караганда 4 см га ераграк ята. Турыпочмаклыкның периметры 56 см га тигез. Турыпочмаклыкның якларын табыгыз.

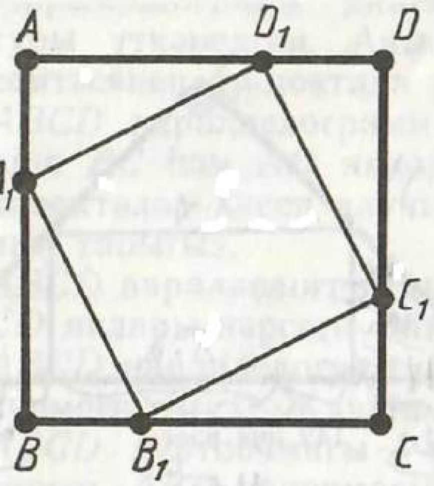
30. Әйләнәнең бер ноктасы аша үзәктән 6 см һәм 10 см ераклыкта үзара перпендикуляр ике хорда үткәрелгән. Хордаларның озынлыкларын табыгыз.

31. Һәр катеты 6 см булган турыпочмаклы өчпочмакка өчпочмак белән уртак почмагы булган турыпочмаклык камалган (141 нче рәсем). Турыпочмаклыкның периметрын табыгыз.

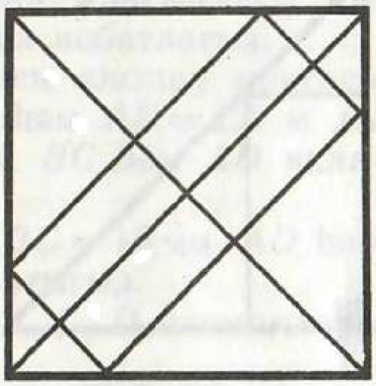
32. Тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмакка, ике түбәсе гипотенуза өстендә, ә калган икесе катетларда ятарлык итеп, турыпочмаклык камалган (142 нче рәсем). Турыпочмаклыкның яклары 5 : 2 чагыштырмасында, ә өчпочмакның гипотенузасы 45 см га тигез булса, турыпочмаклыкның яклары күпмегә тигез?

33. Әгәр параллелограммның диагональләре перпендикуляр булсалар, аның ромб икәнен исбатлагыз.

34. Әгәр параллелограммның диагонале почмакларының биссек-



143 нче рәсем


144 нче рәсем

трисасы булса, ул параллелограммның ромб икәнен исбатлагыз.

35. Ромбның диагональләре аның якларының берсе белән 4 : 5 чагыштырмасындагы почмаклар төзи. Ромбның почмакларын табыгыз.

36. Барлык яклары тигез булган дүртпочмакның ромб икәнен исбатлагыз.

37. Ромб диагональләренең берсе ромб ягына тигез. Ромбның почмакларын табыгыз.

38. 1) Почмагы һәм бу почмакның түбәсеннән чыгучы диагонале буенча;
2) диагонале һәм каршы ятучы почмагы буенча ромб төзегез.

39. 1) Ягы һәм диагонале буенча; 2) ике диагонале буенча ромб төзегез.

40. Турыпочмаклыкның диагональләре туры почмак ясап кисешсәләр, аның квадрат икәнен исбатлагыз.

41. Һәр катеты 2 м булган тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмакка аның белән уртак почмагы булган квадрат камалган. Квадратның периметрын табыгыз.

42. *ABCD* квадраты бирелгән. Аның якларының һәркайсында тигез кисемтәләр: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ салынган. $A_1B_1C_1D_1$ дүртпочмагының квадрат икәнен исбатлагыз (143 нче рәсем).

43. Квадратның диагонале 4 м га тигез. Аның ягы икенче квадратның диагонале булып тора. Икенче квадратның ягын табыгыз.

44. Ягы 1 м булган квадрат бирелгән, аның диагонале икенче квадратның ягы булып тора. Икенче квадратның диагонален табыгыз.

45. Квадрат эченә турыпочмаклык болай камалган (144 нче рәсем): квадратның һәр ягы өстендә турыпочмаклыкның

бер түбәсе ята һәм турыпочмаклыкның яклары квадрат диагональләренә параллель. Турыпочмаклык якларының берсе икенчесеннән ике тапкыр зуррак һәм квадратның диагонале 12 м га тигез булса, турыпочмаклыкның якларын табыгыз.

46. Тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмакка, ике түбәсе гипотенузада, ә калган икесе катетларда ятарлык итеп, квадрат камалган. Гипотенуза 3 м га тигез булса, квадратның ягын табыгыз.

47. Тышкы ноктадан әйләнәгә үзара перпендикуляр ике орынма үткәрелгән; әйләнәнең радиусы 10 см. Орынмаларның озынлыкларын (бирелгән ноктадан орыну ноктасына кадәр ераклыкны) табыгыз.

48. Бирелгән AB кисемтәсен n тигез кисәккә бүлегез.

49. Бирелгән кисемтәне: 1) 3; 2) 5; 3) 6 тигез кисәккә бүлегез.

50. Өчпочмакның яклары 8 см га, 10 см га, 12 см га тигез. Түбәләре бирелгән өчпочмак якларының урталарында булган өчпочмакның якларын табыгыз.

51. Өчпочмакның периметры 12 см га тигез; якларының урталары кисемтәләр белән тоташтырылган. Килеп чыккан өчпочмакның периметрын табыгыз.

52. Тигезьянлы өчпочмакның нигезенә параллель булган урта сызыгы 3 см га тигез. Өчпочмакның периметры 16 см га тигез булса, аның якларын табыгыз.

53. Өчпочмак якларының урталары бирелгән булса, ул өчпочмакны ничек төзергә?

54. Өчпочмакның түбәләре аның ике ягының урталары аша үтүче турыдан тигез ераклыкта ятканын исбатлагыз.

55. Дүртпочмак якларының урталары параллелограмм түбәләре икәнен исбатлагыз.

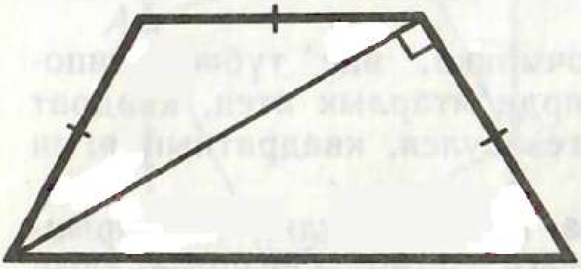
56. Әгәр дүртпочмакның диагональләре 10 м га һәм 12 м га тигез булса, алдагы мәсьәләдәге параллелограммның якларын табыгыз.

57. Дүртпочмакның диагональләре a һәм b га тигез. Түбәләре бирелгән дүртпочмак якларының урталары булган дүртпочмакның периметрын табыгыз.

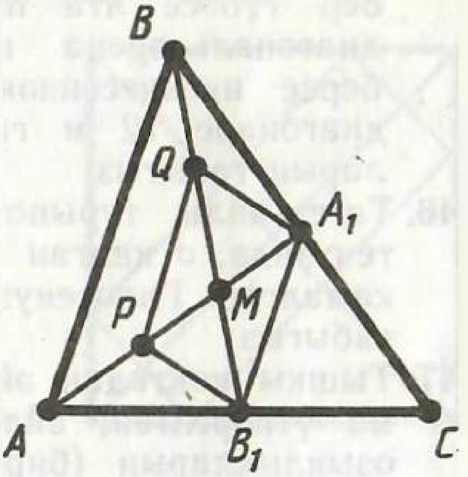
58. Турыпочмаклык якларының урталары ромб түбәләре булуын исбатлагыз. Һәм киресенчә, ромб якларының урталары турыпочмаклык түбәләре булып торганын исбатлагыз.

59. Трапециянең ян ягы өч тигез кисәккә бүленгән, һәм бүлену ноктaларыннан нигезләргә параллель итеп икенче ян якка кисемтәләр үткәрелгән. Трапециянең нигезләре 2 м га һәм 5 м га тигез булса, бу кисемтәләрнең озынлыкларын табыгыз.

60. Тигезьянлы трапециянең нигезе янындагы почмаклары тигез икәнен исбатлагыз.



145 нче рәсем



146 нчы рәсем

61. Каршы яткан почмакларының аермасы 40° ка тигез булса, тигезьянлы трапециянең почмакларын табыгыз.

62. Тигезьянлы трапециянең зуррак нигезе 2,7 м га, ян ягы 1 м га, алар арасындагы почмак 60° ка тигез. Кечкенәрәк нигезне табыгыз.

63. Тигезьянлы трапециянең җәенке почмагы түбәсеннән үткәрелгән биеклеге зуррак нигезне 6 см һәм 30 см озынлыгындагы кисемтәләргә бүлә. Трапециянең нигезләрен табыгыз.

64*. Тигезьянлы трапециянең кечкенәрәк нигезе ян ягына тигез, ә диагонале ян ягына перпендикуляр (145 нче рәсем). Трапециянең почмакларын табыгыз.

65. a турысыннан бер якта аннан 10 м һәм 20 м ераклыкта ике нокта: A һәм B бирелгән. AB кисемтәсенең уртасыннан a турысына кадәр ераклыкны табыгыз.

66. a турысыннан төрле якта аннан 10 см һәм 4 см ераклыкта ике нокта: A һәм B бирелгән. AB кисемтәсенең уртасыннан a турысына кадәр ераклыкны табыгыз.

67. Трапециянең нигезләре 2 : 3 чагыштырмасында, ә урта сызык 5 м га тигез. Нигезләрне табыгыз.

68. Диаметрның очлары әйләнәгә орынмадан 1,6 м һәм 0,6 м ераклыкта яталар. Диаметрның озынлыгын табыгыз.

69. Трапециянең урта сызыгы 7 см га тигез, ә аның бер нигезе икенчесеннән 4 см га зуррак. Трапециянең нигезләрен табыгыз.

70. Тигезьянлы трапециянең җәенке почмагы түбәсеннән үткәрелгән биеклеге зуррак нигезне a һәм b озынлыгындагы кисәкләргә бүлә ($a > b$). Трапециянең урта сызыгын табыгыз.

71*. Нигезләре һәм ян яклары буенча трапеция төзегез.

72*. Нигезләре һәм диагональләре буенча трапеция төзегез.

73*. a, b, c, d, e кисемтәләре бирелгән. $x = \frac{abc}{de}$ кисемтәсен төзегез.

74*. 1) ABC өчпочмагында M ноктасында кисешүче AA_1 һәм BB_1 медианалары үткәрелгән (146 нчы рәсем). AMB өчпочмагында PQ урта сызыгы үткәрелгән. A_1B_1PQ дүртпочмагының параллелограмм икәнен исбатлагыз.

2) Өчпочмакның теләсә кайсы ике медианасы кисешү ноктасында, түбәдән башлап, 2 : 1 чагыштырмасында бүленгәнен исбатлагыз.

3) Өчпочмакның өч медианасы бер ноктада кисешкәнен исбатлагыз.

§ 7. ПИФАГОР ТЕОРЕМАСЫ

62. ПОЧМАКНЫҢ КОСИНУСЫ

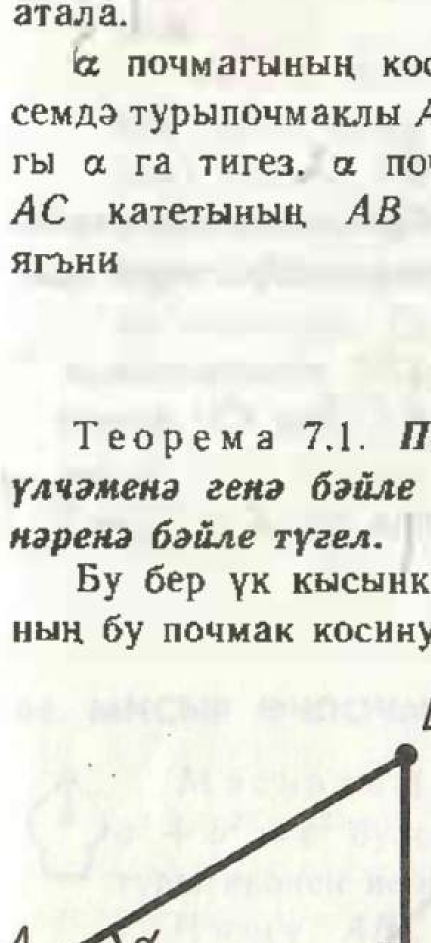
Турыпочмаклы өчпочмакта кысынкы почмак янындагы катетның гипотенузага чагыштырмасы бу почмакның *косинусы* дип атала.

α почмагының косинусы $\cos\alpha$ дип тамгалана. 147 нче рәсемдә турыпочмаклы ABC өчпочмагы күрсәтелгән, аның A почмагы α га тигез. α почмагының косинусы ул почмак янындагы AC катетының AB гипотенузасына чагыштырмасына тигез, ягъни

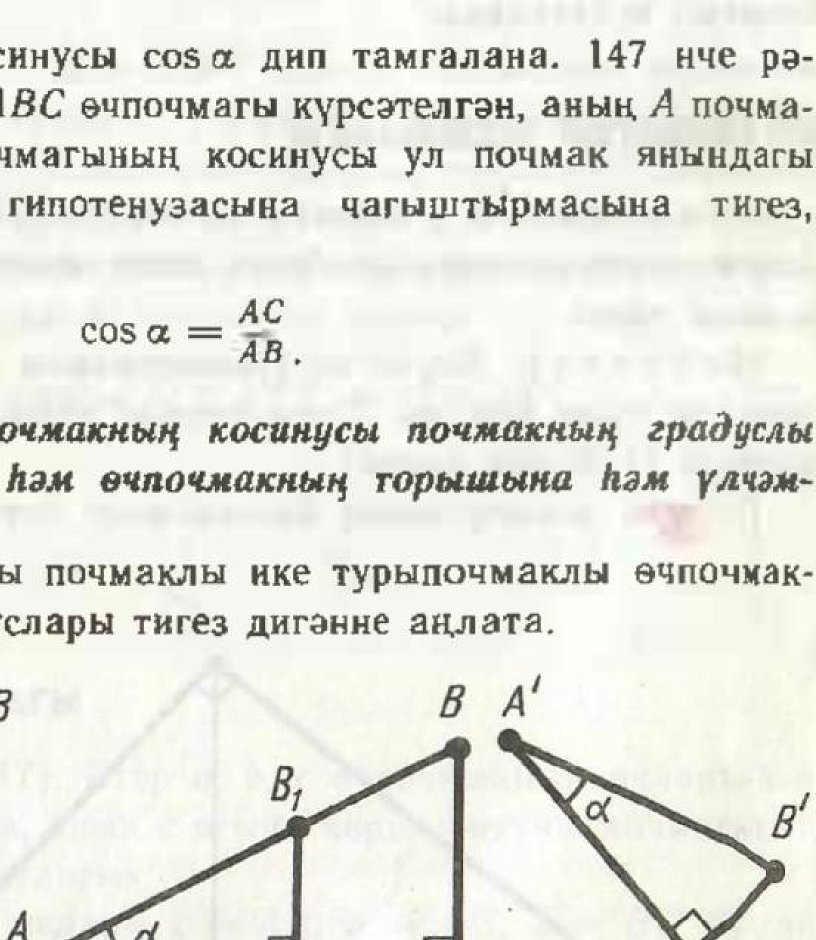
$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}.$$

Теорема 7.1. ***Почмакның косинусы почмакның градуслы үлчәменә генә бәйле һәм өчпочмакның торышына һәм үлчәмнәренә бәйле түгел.***

Бу бер үк кысынкы почмаклы ике турыпочмаклы өчпочмакның бу почмак косинуслары тигез дигәнне аңлата.



147 нче рәсем



148 нче рәсем

Исбатлау. Ике турыпочмаклы өчпочмак ABC һәм $A'B'C'$ның A һәм A' түбәләре янындагы почмаклары бер үк α га тигез булсын (148 нче рәсем).

$$\frac{A'C'}{A'B'}=\frac{AC}{AB}$$

икәнен исбатларга кирәк.

148 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, $A'B'C'$ өчпочмагына тигез булган AB_1C_1 өчпочмагын төзибез. BC һәм B_1C_1 турылары AC турысына перпендикуляр булганлыктан, алар параллель. Пропорциональ кисемтәләр турындагы теорема буенча

$$\frac{AC_1}{AB_1}=\frac{AC}{AB}.$$

Ә төзү буенча $AC_1=A'C'$, $AB_1=A'B'$ булганлыктан,

$$\frac{A'C'}{A'B'}=\frac{AC}{AB}.$$

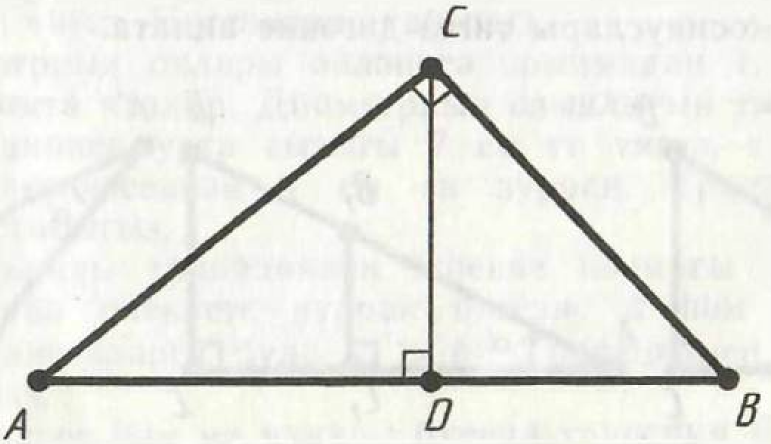
Теорема исбатланды.

63. ПИФАГОР ТЕОРЕМАСЫ

Теорема 7.2 (Пифагор теоремасы). ***Турыпочмаклы өчпочмакта гипотенузаның квадраты катетларының квадратлары суммасына тигез.***

Исбатлау. Бирелгән турыпочмаклы ABC өчпочмагында C почмагы туры булсын. Туры почмак түбәсе C дан CD биеклеге үткәрик (149 нчы рәсем).

Почмак косинусының билгеләмәсе буенча $\cos A=\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$.

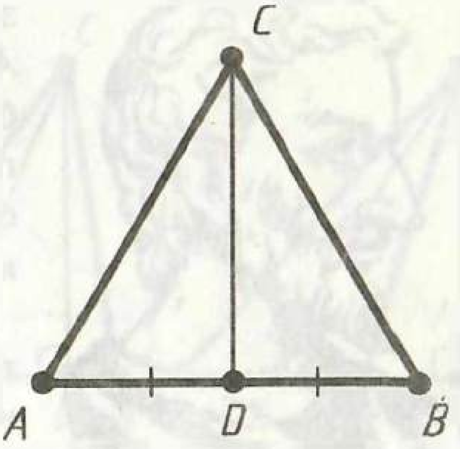


149 нчы рәсем

Моннан $AB \cdot AD = AC^2$. Аналогик рәвештә $\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$. Моннан $AB \cdot BD = BC^2$. Килеп чыккан тигезлекләрне буынлап кушып һәм $AD + DB = AB$ икәнен искә алып, табабыз:

$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2.$$

Теорема исбатланды.



150 нче рәсем

Пифагор теоремасыннан ***турыпочмаклы өчпочмакта катетларның теләсә кайсы гипотенузадан кечкенәрәк*** икәне килеп чыга. Моннан, үз чиратында, ***теләсә нинди кысынкы*** α ***почмагы өчен*** $\cos \alpha < 1$ икәне килеп чыга.

Мәсьәлә (11). Нигезе a һәм ян ягы b булган тигезьянлы өчпочмакның нигезенә үткәрелгән медиананы табыгыз.

Чишү. ABC — нигезе AB булган тигезьянлы өчпочмак һәм CD — аның нигезенә үткәрелгән медиана (150 нче рәсем) булсын. Тигезьянлы өчпочмакның нигезенә үткәрелгән медиананың биеклек тә булганын без беләбез. Шуңа күрә ACD өчпочмагы D почмагы туры булган турыпочмаклы өчпочмак. Пифагор теоремасы буенча

$$AD^2 + CD^2 = AC^2, \left(\frac{a}{2}\right)^2 + CD^2 = b^2.$$

Моннан

$$CD = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

64. МИСЫР ӨЧПОЧМАГЫ

Мәсьәлә (17). Әгәр a, b, c өчпочмакның яклары һәм $a^2 + b^2 = c^2$ булса, аның c ягына каршы ятучы почмагының туры икәнен исбатлагыз.

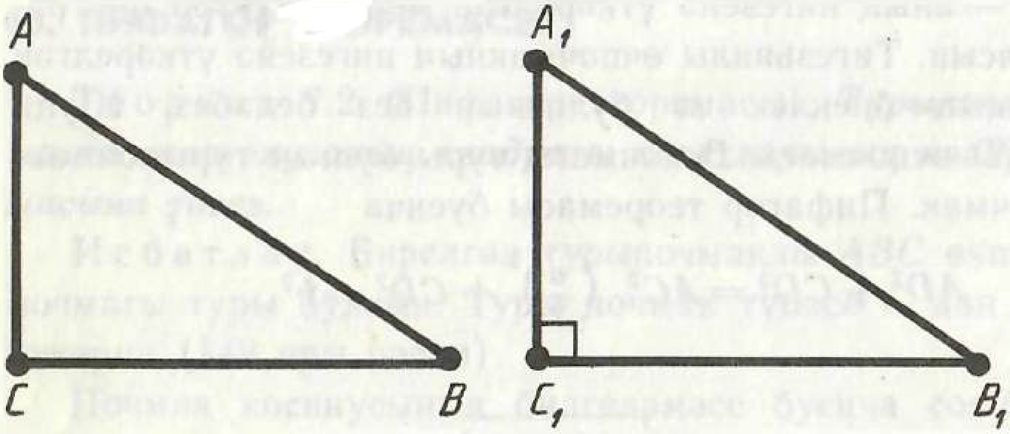
Чишү. ABC яклары $c = AB$, $a = AC$, $b = BC$ булган бирелгән өчпочмак булсын (151 нче рәсем). Катетлары $A_1C_1 = a$, $B_1C_1 = b$ буенча $A_1B_1C_1$ турыпочмаклы өчпочмагын төзибез. Пифагор теоремасы буенча аның гипотену-

Пифагор — безнең эрага кадәр VI гасырда яшәгән борынгы грек галиме

засы $A_1B_1=\sqrt{a^2+b^2}=c$. Шулай итеп, ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары өченче билге буенча тигез. Өчпочмакларның тигезлегеннән ABC өчпочмагының C түбәсе янындагы почмагының туры икәнлеге килеп чыга.

Борынгы Мисыр җир үлчәүчеләре туры почмак төзү өчен түбәндәге ысулны кулланганнар. Бауны төеннәр белән 12 тигез кисәккә бүлгәннәр һәм очларын бәйләгәннәр. Аннан соң бауны яклары 3, 4 һәм 5 бүлемгә тигез булган өчпочмак ясалганчы тарттырганнар. Өчпочмакның 5 бүлемле ягына каршы ятучы почмагы туры булган ($3^2+4^2=5^2$).

Яклары 3, 4 һәм 5 берәмлеккә тигез булганда өчпочмакны кайчакта Мисыр өчпочмагы дип атау күрсәтелгән ысул ярдәмендә туры почмак төзүгә бәйләнгән.

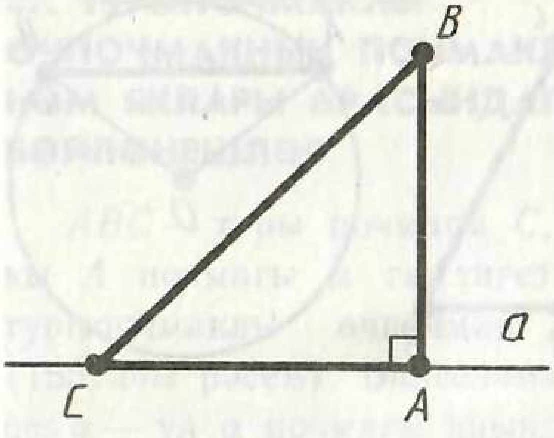


151 нче рәсем

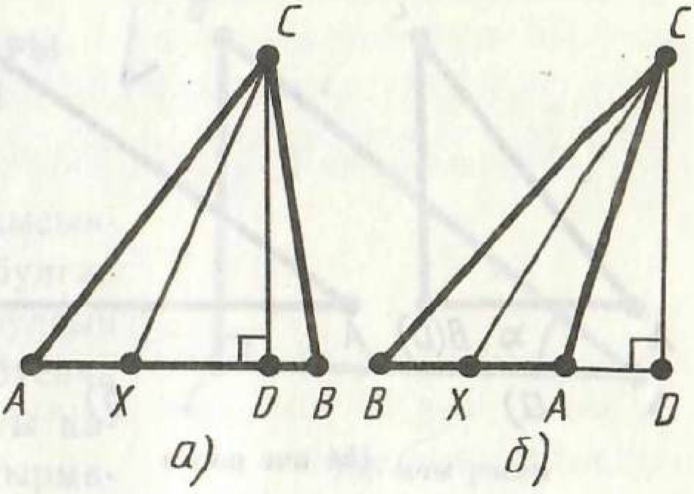
65. ПЕРПЕНДИКУЛЯР ҺӘМ АВЫШМА

BA кисемтәсе B ноктасыннан a турысына төшерелгән перпендикуляр, һәм C ноктасы a турысының A ноктасыннан үзгә теләсә кайсы ноктасы булсын. BC кисемтәсе B ноктасыннан a турысына үткәрелгән *авышма* дип атала (152 нче рәсем). C ноктасы *авышманың нигезе* дип атала. AC кисемтәсе *авышманың проекциясе* дип атала.

Әгәр бер ноктадан турыга перпендикуляр һәм авышмалар үткәрелгән булса, Пифагор теоремасыннан килеп чыкканча, *авыш-*



152 нче рәсем



153 нче рәсем

ма перпендикулярдан зуррак, тигез авышмаларның проекцияләре тигез, ике авышмадан проекциясе зуррак булганы зуррак була.

Чынлап та (152 нче рәсемгә кара), Пифагор теоремасы буенча

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Моннан $BC > AB$ икәне күренә. Бирелгән AB өчен AC никадәр зуррак булса, BC да шулкадәр зуррак була.

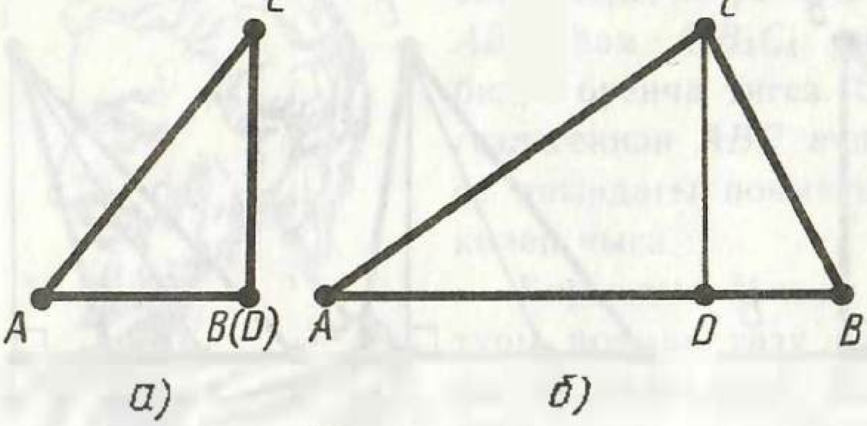
Мәсьәлә (19). ABC өчпочмагының AB ягында X ноктасы алынган. CX кисемтәсенең AC яки BC якларының кимендә берсеннән кечкенәрәк икәнен исбатлагыз.

Чишү. Өчпочмакның CD биеклеген үткәрәбез. Теләсә нинди очракта DX кисемтәсе яки AD дан (153 нче *а* рәсеме), яки BD дан (153 нче *б* рәсеме) кечкенәрәк. Бер ноктадан үткәрелгән авышмалар үзлегеннән CX кисемтәсе AC яки BC кисемтәләренең кимендә берсеннән кечкенәрәк дигән нәтиҗә чыга. Шуны исбатлау соралган иде дә.

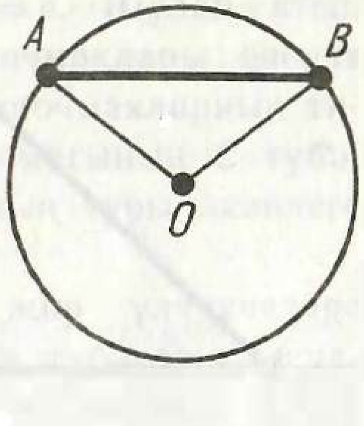
66. ӨЧПОЧМАК ТИГЕЗСЕЗЛЕГЕ

Әгәр A һәм B нокталары төрле булса, AB кисемтәсенең озынлыгы алар арасындагы *ераклык* дип атала. Әгәр A һәм B нокталары тәңгәл килсәләр, алар арасындагы ераклык нульгә тигез дип кабул ителә.

Теорема 7.3. ***Өч нокта нинди генә булмасын, аларның теләсә кайсы икесе арасындагы ераклык бу ике ноктадан өченчесенә кадәр ераклыклар суммасыннан зур түгел.***



154 нче рәсем



155 нче рәсем

Бу теорема әлеге ераклыкларның һәркайсы калган икесенең суммасыннан кечкенәрәк яки тигез дигәнне аңлата.

Исбатлау. A, B, C — бирелгән өч нокта булсын. Әгәр бирелгән өч ноктаның ике яки өчесе дә тәңгәл килсәләр, теореманың раславы үзеннән-үзе аңлашыла.

Әгәр нокталар барысы да төрле һәм бер туры өстендә яталар икән, аларның берсе, мәсәлән, B, калган икесе арасында ята. Бу очракта $AB + BC = AC$. Моннан өч ераклыкның һәркайсы калган икесенең суммасыннан зур түгел икәне күренә.

Хәзер нокталар бер туры өстендә ятмыйлар дип карыйк (154 нче рәсем). $AB < AC + BC$ икәнен исбатлыйк. AB турысына CD перпендикуляры төшерәбез. Исбатлаганча, $AB \leqslant AD + BD$. Һәм $AD < AC$, $BD < BC$ булганлыктан, $AB < AC + BC$. Теорема исбатланды.

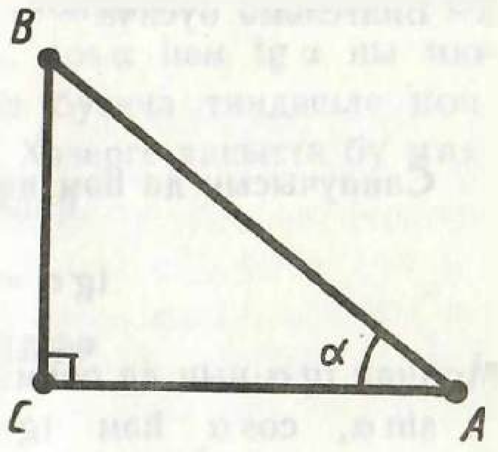
Нокталар бер туры өстендә ятмаган очракта өчпочмак тигезсезлегенең төгәл тигезсезлек булганын искәртик. Моннан ***теләсә нинди өчпочмакта һәр ягы калган ике ягының суммасыннан кечкенәрәк*** икәне килеп чыга.

Мәсьәлә (23). Әйләнәнең теләсә кайсы хордасы диаметрыннан зур түгел һәм үзе диаметр булганда гына аңа тигез икәнен исбатлагыз.

Чишү (155 нче рәсем). Өчпочмак тигезсезлеге буенча $AB \leqslant OA + OB = 2R$ һәм O үзәге AB кисемтәсе өстендә ятмаса, тигезсезлек төгәл. Хорда үзәк аша үткән очракта, ягъни диаметр булып торганда гына, тигезлек була.

67. ТУРЫПОЧМАКЛЫ ӨЧПОЧМАКНЫҢ ПОЧМАКЛАРЫ ҺӘМ ЯКЛАРЫ АРАСЫНДАГЫ БӘЙЛӘНЕШЛӘР

ABC — туры почмагы C, кысынкы A почмагы α га тигез булган турыпочмаклы өчпочмак булсын (156 нчы рәсем). Билгеләмә буенча $\cos\alpha$ — ул α почмагы янындагы катетның гипотенузага чагыштырмасына тигез.



156 нчы рәсем

Каршы ятучы BC катетының AB гипотенузасына чагыштырмасы α почмагының *синусы* ($\sin\alpha$ аша тамгалана) дип атала:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}.$$

Каршы ятучы BC катетының яндагы AC катетына чагыштырмасы D почмагының тангенсы ($\operatorname{tg}\alpha$ аша тамгалана) дип атала:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}.$$

Косинус кебек үк, синус һәм тангенс почмак зурлыгына гына бәйле.

Чыннан да, Пифагор теоремасы буенча

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}.$$

Билгеләмә буенча

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}.$$

BC кыйммәтен куябыз:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{AB} = \sqrt{1 - \left(\frac{AC}{AB}\right)^2} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}.$$

$\cos\alpha$ почмак зурлыгына гына бәйле булганлыктан, $\sin\alpha$ да почмак зурлыгына гына бәйле.

Билгеләмә буенча

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}.$$

Санаучысын да һәм ваклаучысын да AB га бүләбез:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Моннан $\operatorname{tg}\alpha$ ның да почмак зурлыгына гына бәйле икәне күренә.

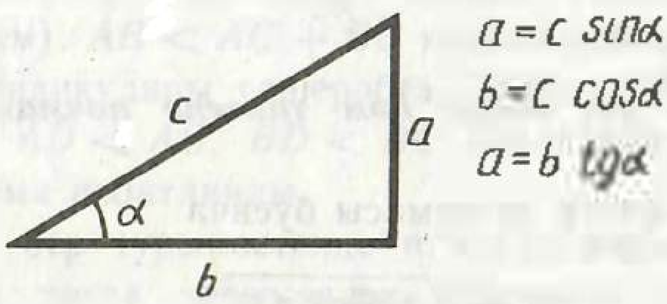
$\sin\alpha$, $\cos\alpha$ һәм $\operatorname{tg}\alpha$ билгеләмәләреннән түбәндәге кагыйдәләр килеп чыга:

α почмагына каршы ятучы катет гипотенузаның $\sin\alpha$ га тапкырчыгышына тигез.

α почмагы янындагы катет гипотенузаның $\cos\alpha$ га тапкырчыгышына тигез.

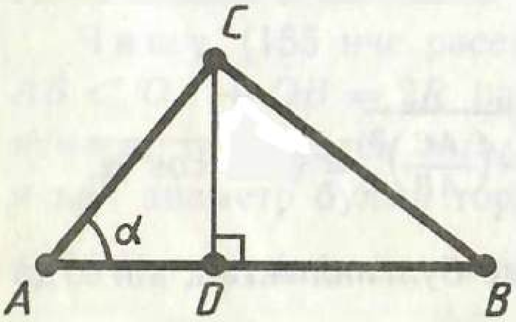
α почмагына каршы ятучы катет икенче катетның $\operatorname{tg}\alpha$ га тапкырчыгышына тигез.

Бу кагыйдәләр турыпочмаклы өчпочмакның бер ягы һәм кысынкы почмагы билгеле булганда калган ике ягын табарга; ике ягы билгеле булганда кысынкы почмакларын табарга мөмкинлек бирә (157 нче рәсем).



157 нче рәсем

Мәсьәлә (47). Турыпочмаклы өчпочмакта c гипотенузасы һәм α кысынкы почмагы бирелгән. Катетларын, аларның гипотенузага проекцияләрен һәм гипотенузага төшерелгән биеклеген табыгыз.



158 нче рәсем

Чишү (158 нче рәсем).

$AC = AB\cos\alpha = c\cos\alpha;$

$BC = AB\sin\alpha = c\sin\alpha;$

$BD = BC\sin\alpha = c\sin^2\alpha;$

$AD = AC\cos\alpha = c\cos^2\alpha;$

$CD = AC\sin\alpha = c\sin\alpha\cos\alpha.$

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$ һәм $\operatorname{tg}\alpha$ өчен махсус таблицалар төзелгән. Бу таблицалар бирелгән α почмагы $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ һәм $\operatorname{tg}\alpha$ ны яки $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ларның кыйммәтләре буенча тиңдәшле почмакларны табарга мөмкинлек бирәләр. Хәзерге вакытта бу максат өчен микрокалькуляторлар кулланалар.

68. ТӨП ТРИГОНОМЕТРИК БЕРДӘЙЛЕКЛӘР

Сез бер бердәйлекне беләсез инде:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Түбәндәге бердәйлекләрне исбатлыйк:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

A түбәсе янындагы почмагы α булган теләсә нинди турыпочмаклы ABC өчпочмагы алыйк (159 нчы рәсем). Пифагор теоремасы буенча

$$BC^2 + AC^2 = AB^2.$$

Тигезлекнең ике ягын да AB^2 ка бүлеп, табабыз:

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 1.$$

Ләкин $\frac{BC}{AB} = \sin\alpha$, $\frac{AC}{AB} = \cos\alpha$. Шулай итеп,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

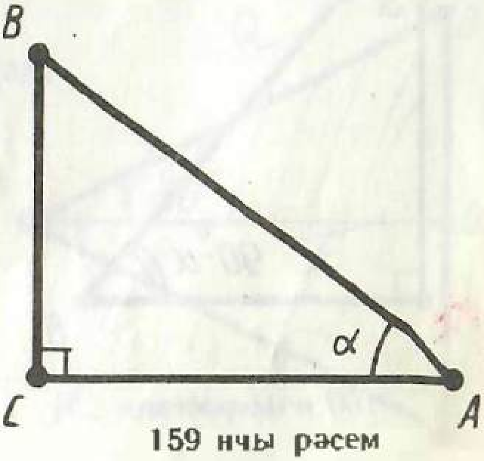
Бу тигезлек бердәйлек була. Ул теләсә нинди α өчен дөрес.

Икенче бердәйлекне китереп чыгару өчен, табылган бердәйлекнең ике ягын да $\cos^2\alpha$ га бүләбез. Табабыз:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ яки}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ бердәйлегенең ике кисәген дә $\sin^2\alpha$ га бүлсәк, өченче бердәйлекне чыгарабыз:



159 нчы рәсем

$$1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Бу бердәйлекләрнең әһәмияте шунда, әгәр $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ яки $\operatorname{tg}\alpha$ зурлыкларының берсе билгеле булса, алар калган икесен табарга мөмкинлек бирәләр.

Мәсьәлә (63). Әгәр $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ булса, $\sin\alpha$ һәм $\operatorname{tg}\alpha$ ның кыйммәтләрен исәпләгез.

Чишү. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ булганлыктан,

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{12}{5}.$$

69. КАЙБЕР ПОЧМАКЛАР СИНУСЫ, КОСИНУСЫ ҺӘМ ТАНГЕНСЫНЫҢ КЫЙММӘТЛӘРЕ

Теорема 7.4. ***Теләсә нинди кысынкы α почмагы өчен***

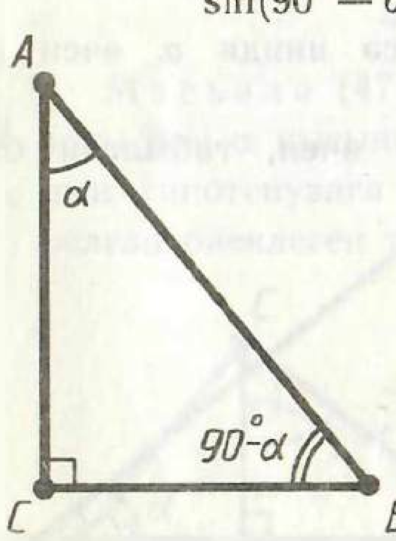
$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha,\quad \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha.$$

Исбатлау. ABC — A түбәсе янындагы кысынкы почмагы α булган турыпочмаклы өчпочмак (160 нчы рәсем). Ул вакытта B түбәсе янындагы кысынкы почмак $90^\circ-\alpha$ га тигез.

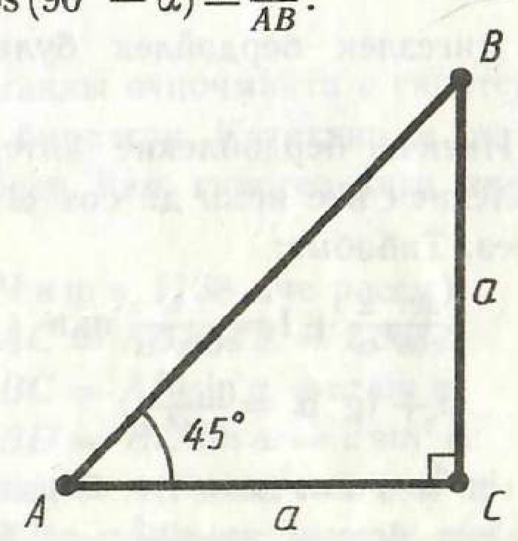
Билгеләмә буенча

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB},\quad \cos\alpha=\frac{AC}{AB},$$

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\frac{AC}{AB},\quad \cos(90^\circ-\alpha)=\frac{BC}{AB}.$$



160 нчы рәсем



161 нче рәсем

Икенче һәм өченче тигезләкләрдән табабыз: $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.

Беренче һәм дүртенче тигезләкләрдән табабыз: $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$. Теорема исбатланды.

45° *лы почмакның синусын, косинусын һәм тангенсын табыйк.* Моның өчен кысынкы почмагы 45° булган турыпочмаклы өчпочмак төзибез (161 нче рәсем). Аның икенче кысынкы почмагы да 45°, шуңа күрә өчпочмак тигезьянлы. Өчпочмакның катетлары a га тигез булсын. Пифагор теоремасы буенча гипотенуза $a\sqrt{2}$ булыр. Табабыз:

$$\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \operatorname{tg} 45° = \frac{a}{a} = 1.$$

30° *лы почмакның синусын, косинусын һәм тангенсын табыйк.* Тигезьяклы ABC өчпочмагы алыйк (162 нче рәсем). Анда AD медианасы үткәрик. Ул биссектриса да һәм биеклек тә булыр. Шуңа күрә ABD өчпочмагы — A түбәсе янындагы кысынкы почмагы 30° булган турыпочмаклы өчпочмак. a — тигезьяклы өчпочмакның ягы булсын. Ул вакытта $BD = \frac{a}{2}$.

Пифагор теоремасы буенча

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Димәк,

$$\sin 30° = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2};\ \cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

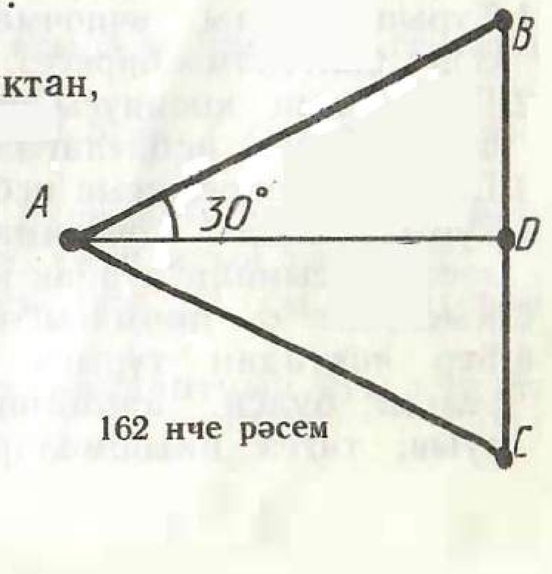
$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ булганлыктан,

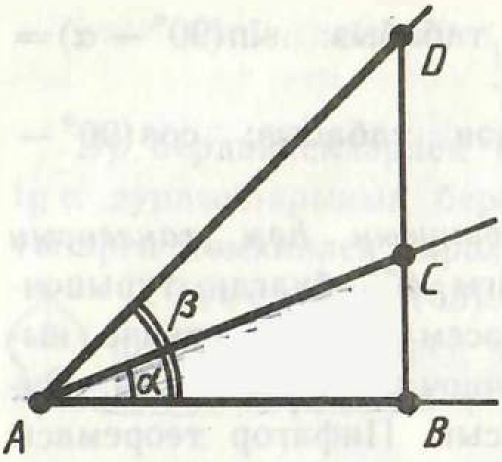
$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}.$$



162 нче рәсем



163 нче рәсем

70. ПОЧМАК ҮСКӘНДӘ СИНУС, КОСИНУС ҺӘМ ТАНГЕНСНЫҢ ҮЗГӘРҮЕ

Теорема 7.5. ***Кысынкы*** α ***почмагы үскәндә*** $\sin\alpha$ ***һәм*** $\operatorname{tg}\alpha$ ***үсәләр, ә*** $\cos\alpha$ ***кими.***

Исбатлау. α һәм β ($\alpha<\beta$)— кысынкы почмаклар булсын. α һәм β почмакларын AB ярымтурысыннан бер ярымъяссылыкта салабыз (163 нче рәсем). B ноктасы аша AB га перпендикуляр туры үткәрәбез. Ул безнең почмакларның якларын C һәм D нокталарында кисеп үтә.

$\alpha<\beta$ булганлыктан, C ноктасы B һәм D арасында ята. Шуңа күрә $BC<BD$. Димәк, бер ноктадан турыга үткәрелгән авышмаларның үзлеге буенча $AC<AD$.

$\cos\alpha=\frac{AB}{AC}$, $\cos\beta=\frac{AB}{AD}$ булганлыктан, $\cos\alpha>\cos\beta$, ягъни почмак үскәндә косинус кими.

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, ә почмак үскәндә косинус кимегәнлектән, $\sin\alpha$ үсә.

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ һәм α почмагы үскәндә $\sin\alpha$ үскәнлектән, ә $\cos\alpha$ кимегәнлектән, α үскәндә $\operatorname{tg}\alpha$ үсә. Теорема исбатланды.

КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Турыпочмаклы өчпочмакның кысынкы почмагы косинусына билгеләмә бирегез.
2. Почмакның косинусы почмакның градуслы үлчәменә генә бәйле икәнен исбатлагыз.
3. Пифагор теоремасын исбатлагыз.
4. Турыпочмаклы өчпочмакта гипотенуза катетларның теләсә кайсыннан зуррак икәнен исбатлагыз.
5. Кысынкы α почмагы өчен $\cos\alpha<1$ икәнен исбатлагыз.
6. Бер ноктадан турыга перпендикуляр һәм авышма үткәрелгән булса, авышманың перпендикулярдан зуррак булуын; тигез авышмаларның проекциясе тигез; ике авыш-

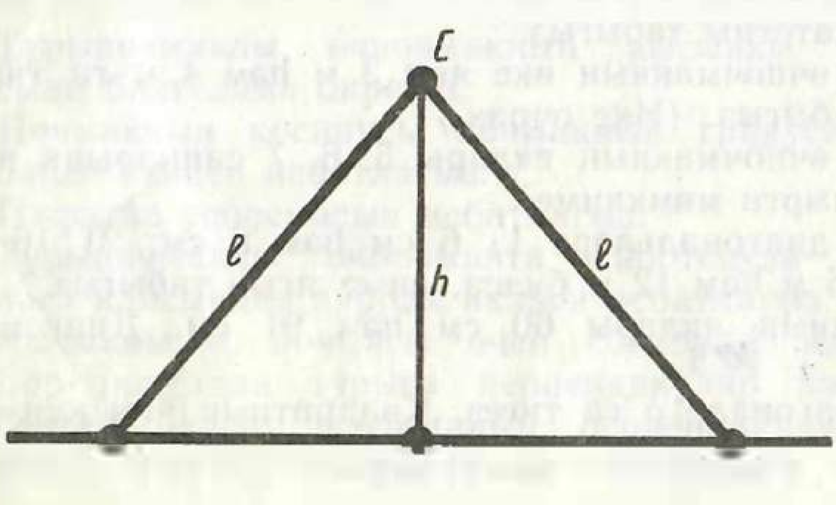
маның проекциясе зуррак булганы зуррак икәнен исбатлагыз.

7. Өчпочмак тигезсезлеген исбатлагыз.
8. Өчпочмакта һәр якның калган ике як суммасыннан кечкенәрәк икәнен исбатлагыз.
9. Кысынкы почмакның синусына һәм тангенсына билгеләмә бирегез. Алар почмакның градуслы үлчәменә генә бәйле икәнен исбатлагыз.
10. Турыпочмаклы өчпочмакның катеты гипотенуза һәм кысынкы почмак аша, кысынкы почмак һәм икенче катет аша ничек күрсәтелә?
11. Бердәйлекләрне исбатлагыз: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;
$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$
12. Теләсә нинди кысынкы α почмагы өчен
$$\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90° - \alpha) = \sin \alpha$$
икәнен исбатлагыз.
13. 30°, 45°, 60° лы почмаклар өчен синусның, косинусның һәм тангенсның кыйммәтләре күпмегә тигез?
14. Кысынкы почмак үскәндә $\sin \alpha$ һәм $\operatorname{tg} \alpha$ ның үсүен, ә $\cos \alpha$ ның кимүен исбатлагыз.

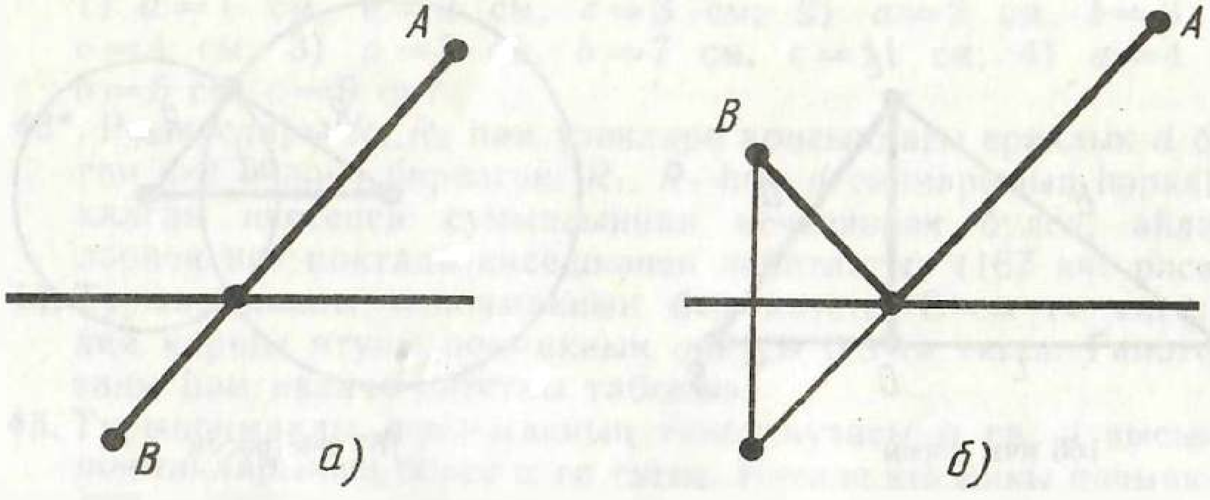
Мәсьәләләр

1. Косинусы: 1) $\frac{3}{5}$ кә; 2) $\frac{4}{9}$ кә; 3) 0,5 кә; 4) 0,8 гә тигез булган почмак төзегез.
2. Турыпочмаклы өчпочмакның a һәм b катетлары бирелгән. Әгәр: 1) $a=3$, $b=4$; 2) $a=1$, $b=1$; 3) $a=5$, $b=6$ булса, аның гипотенузасын табыгыз.
3. Турыпочмаклы өчпочмакның c гипотенузасы һәм a катеты бирелгән. Әгәр: 1) $c=5$, $a=3$; 2) $c=13$, $a=5$; 3) $c=6$, $a=5$ булса, икенче катетны табыгыз.
4. Турыпочмаклы өчпочмакның ике ягы 3 м һәм 4 м га тигез. Өченче ягын табыгыз. (Ике очрак.)
5. Турыпочмаклы өчпочмакның яклары 5, 6, 7 саннарына пропорциональ булырга мөмкинме?
6. Әгәр ромбның диагональләре 1) 6 см һәм 8 см; 2) 16 дм һәм 30 дм; 3) 5 м һәм 12 м булса, аның ягын табыгыз.
7. Турыпочмаклыкның яклары 60 см һәм 91 см. Диагонале күпмегә тигез?
8. Квадратның диагонале a га тигез. Квадратның ягы күпмегә тигез?

9. Диаметры 1,4 м булган түгәрәк тимер табагыннан ягы 1 м булган квадрат кисеп алып буламы?
10. Нигезләре 5 м һәм 11 м, ә ян ягы 4 м булган тигезьянлы трапециянең биеклеген табыгыз.
11. Нигезе a һәм ян ягы b булган тигезьянлы өчпочмакның нигезенә үткәрелгән медиананы табыгыз.
12. Тигезьянлы өчпочмакның ян ягы 17 см, ә нигезе 16 см. Нигезгә төшерелгән биеклекне табыгыз.
13. Ягы a булган тигезьяклы өчпочмакның биеклеген табыгыз.
14. a һәм b кисемтәләре бирелгән. 1) $\sqrt{a^2+b^2}$; 2) $\sqrt{a^2-b^2}$ $(a>b)$ кисемтәләрен ничек төзергә?
15. a һәм b кисемтәләре бирелгән. $x=\sqrt{ab}$ кисемтәсен ничек төзергә?
16. Фабриканың ике бинасы арасында материаллар күчерү өчен сөзәк улак көйләнгән. Биналар арасындагы ераклык 10 м га тигез, ә улакның очлары җир өстеннән 8 м һәм 4 м биеклеккә куелганнар. Улакның озынлыгын табыгыз.
17. Әгәр a, b, c өчпочмакның яклары һәм $a^2+b^2=c^2$ булса, аның c ягына каршы ятучы почмагының туры икәнен исбатлагыз.
18. Яклары 5, 12, 13 булган өчпочмакның 13 ле ягына каршы ятучы почмагы купмегә тигез?
19. ABC өчпочмагының AB ягында X ноктасы алынган. CX кисемтәсенең AC яки BC якларының кимендә берсеннән кечкенәрәк икәнен исбатлагыз.
20. Өчпочмак якларындагы теләсә нинди ике нокта арасындагы ераклыкның өчпочмак якларының иң зурысыннан зуррак булмаганын исбатлагыз.
21. Туры һәм аннан h ераклыгында C ноктасы бирелгән. Әгәр $l>h$ булса, C ноктасыннан l озынлыгындагы ике һәм бары тик ике генә авышма үткәреп булганын исбатлагыз (164 нче рәсем).
22*. Әйләнә үзәгеннән ераклыгы радиустан кечерәк булган турының әйләнәне ике ноктада кисеп үтүен исбатлагыз.



164 нче рәсем



165 нче рәсем

23. Әйләнәнең теләсә кайсы хордасы диаметрыннан зур түгел һәм үзе диаметр булганда гына аңа тигез икәнен исбатлагыз.

24. Әгәр: 1) $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $AC = 12$ м; 2) $AB = 10{,}7$, $BC = 17{,}1$, $AC = 6{,}4$ булса, A, B, C нокталарының бер туры өстендә ятканын исбатлагыз.

25. Өчпочмакның теләсә кайсы ягы калган ике ягының аермасыннан зуррак икәнен исбатлагыз.

26. Яклары 4 см һәм 7 см булган параллелограмм диагональләренең берсе 2 см га тигез булырга мөмкинме?

27. Өчпочмакта якларның берсе 1,9 м га, ә икенчесе 0,7 м га тигез. Өченче ягы бөтен санлы метрларга тигез икәнен белеп, ул якны табыгыз.

28*. ABC өчпочмагының A түбәсеннән үткәрелгән медианасының AB һәм AC якларының ярымсуммасыннан кечкенәрәк икәнен исбатлагыз.

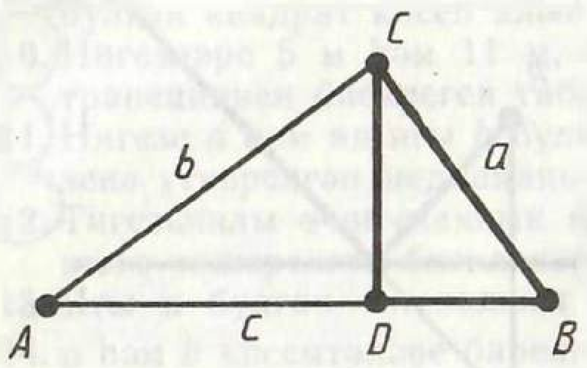
29*. Дүртпочмак диагональләренең кисешкәне билгеле. Аларның озынлыкларының суммасы дүртпочмакның периметрыннан кечкенә. Ләкин ярымпериметрыннан зур икәнен исбатлагыз.

30. AB һәм CD кисемтәләре O ноктасында кисешәләр. Яссылыкның теләсә кайсы ноктасыннан A, B, C, D нокталарына кадәр ераклыклар суммасы $OA + OB + OC + OD$ дан кечкенәрәк булмаганын исбатлагыз.

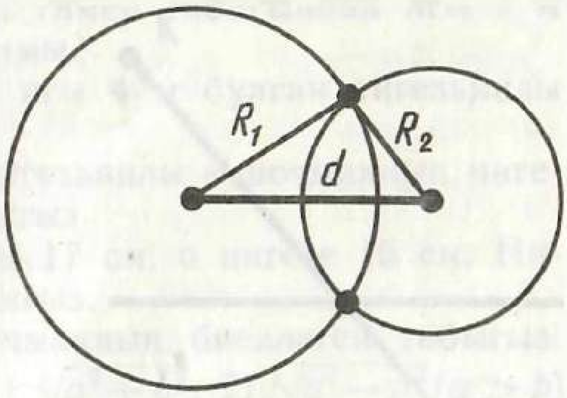
31*. Турысызыклы шоссе юлында A һәм B авылларыннан ераклыклары суммасы иң кечкенә булырлык итеп автобус тукталышы өчен урын күрсәтергә кирәк. Ике очракны карагыз: 1) авыллар шосседан төрле якта яталар (165 нче рәсем, *а*). 2) авыллар шоссеның бер ягына урнашканнар (165 нче рәсем, *б*).

32. Өчпочмакның яклары 1, 2, 3 саннарына пропорциональ булырга мөмкинме?

33. Өчпочмакта һәр як ярымпериметрдан кечкенәрәк икәнен исбатлагыз.



166 нчы рәсем



167 нче рәсем

34. Радиусы R булган әйләнә эчендә үзәктән d ераклыгында нокта алынган. Бу ноктадан әйләнә нокталарына кадәр иң зур һәм иң кечкенә ераклыкларны табыгыз.

35. Радиусы R булган әйләнәдән читтә үзәктән d ераклыгында нокта алынган. Бу ноктадан әйләнә нокталарына кадәр иң зур һәм иң кечкенә ераклыкларны табыгыз.

36. Үзәкләре 20 см ераклыкта, ә радиуслары 8 см һәм 11 см булган әйләнәләр кисешергә мөмкинме? Җавапны аңлатыгыз.

37. Үзәкләре арасындагы ераклык 5 см, ә радиуслары 6 см һәм 12 см булган әйләнәләр кисешергә мөмкинме? Җавапны аңлатыгыз.

38. 36 нчы мәсьәләдәге әйләнәләрнең берсе икенчесенең тышында ятканын, ә 37 нче мәсьәләдәге 6 см радиуслы әйләнәнең 12 см радиуслы әйләнә эчендә ятканын исбатлагыз.

39. Әгәр $R_1 + R_2 < d$ булса, радиуслары R_1 һәм R_2 үзәкләре d ераклыгында булган әйләнәләр кисешергә мөмкинме?

40*. $a \leqslant b \leqslant c < a + b$ шартларын канәгатьләндерүче өч уңай сан; a, b, c бирелгән. Бер-бер артлы түбәндәге раслауларны исбатлагыз:

1) $0 < \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} < a$;

2) гипотенузасы $a = BC$, ә катеты $BD = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$ булган турыпочмаклы өчпочмак BCD (166 нчы рәсем) бар;

3) $a = BC$, $c = AB$, ә BD ераклыгы $\dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$ булган ABC өчпочмагында $b = AC$ (166 нчы рәсем).

41. Өч уңай сан: a, b, c бирелгән. Әгәр бу саннарның һәркайсы калган икесенең суммасыннан кечкенәрәк булса, яклары a, b, c булган өчпочмак барлыгын исбатлагыз.

42. Бирелгән кисемтәләр яклары булырлык өчпочмак төзеп буламы?

1) $a=1$ см, $b=2$ см, $c=3$ см; 2) $a=2$ см, $b=3$ см, $c=4$ см; 3) $a=3$ см, $b=7$ см, $c=11$ см; 4) $a=4$ см, $b=5$ см, $c=9$ см?

43*. Радиуслары R_1, R_2 һәм үзәкләре арасындагы ераклык d булган ике әйләнә бирелгән. R_1, R_2 һәм d саннарының һәркайсы калган икесенең суммасыннан кечкенәрәк булса, әйләнәләрнең ике ноктада кисешкәнен исбатлагыз (167 нче рәсем).

44. Турыпочмаклы өчпочмакның бер катеты 8 см га тигез, ә аңа каршы ятучы почмакның синусы 0,8 гә тигез. Гипотенузаны һәм икенче катетны табыгыз.

45. Турыпочмаклы өчпочмакның гипотенузасы a га, ә кысынкы почмакларының берсе α га тигез. Икенче кысынкы почмакны һәм катетларны табыгыз.

46. Турыпочмаклы өчпочмакта катет a га, ә аңа каршы ятучы почмак α га тигез. Икенче кысынкы почмакны, аңа каршы ятучы катетны һәм гипотенузаны табыгыз.

47. Турыпочмаклы өчпочмакта c гипотенузасы һәм α кысынкы почмагы бирелгән. Катетларын, аларның гипотенузага проекцияләрен һәм гипотенузага төшерелгән биеклеген табыгыз.

48. 1) Табыгыз: $\sin 22°$; $\sin 22°36'$; $\sin 22°38'$; $\sin 22°41'$; $\cos 68°$; $\cos 68°18'$; $\cos 68°23'$.

2) Әгәр: $\sin x=0{,}2850$; $\sin x=0{,}2844$; $\cos x=0{,}2710$ булса, x почмагын табыгыз.

49. 1) 16°; 2) 24°36′; 3) 70°32′; 4) 88°49′ лы почмак синусы һәм косинусының кыйммәтен табыгыз.

50. Әгәр: 1) $\sin x=0{,}0175$; 2) $\sin x=0{,}5015$; 3) $\cos x=0{,}6814$; 4) $\cos x=0{,}0670$ булса, кысынкы x почмагының зурлыгын табыгыз.

51. 1) 10°; 2) 40°40′; 3) 50°30′; 4) 70°15′ почмак тангенсының кыйммәтләрен табыгыз.

52. Әгәр: 1) $\operatorname{tg} x=0{,}3227$; 2) $\operatorname{tg} x=0{,}7846$; 3) $\operatorname{tg} x=6{,}152$; 4) $\operatorname{tg} x=9{,}254$ булса, кысынкы x почмагын табыгыз.

53. Тигезьянлы өчпочмакның биеклеге 12,4 м, ә нигезе 40,6 м. Өчпочмакның почмакларын һәм ян ягын табыгыз.

54. Турыпочмаклы өчпочмакның катетлары 19 : 28 чагыштырмасында. Аның почмакларын табыгыз.

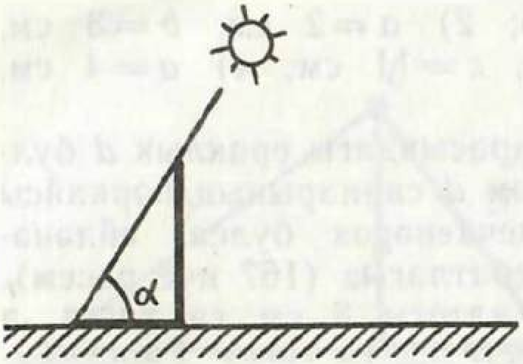
55. Турыпочмаклыкның яклары 12,4 кә һәм 26 га тигез. Диагональләр арасындагы почмагын табыгыз.

56. Ромбның диагональләре 4,73 кә һәм 2,94 кә тигез. Аның почмакларын табыгыз.

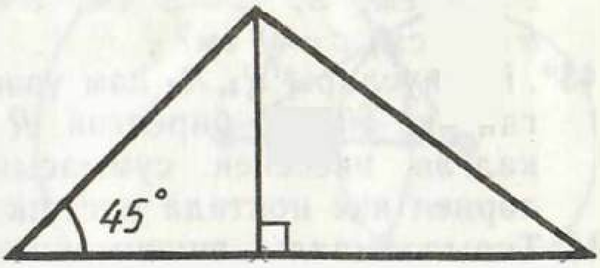
57. Ромбның ягы 241 м, биеклеге 120 м. Почмакларын табыгыз.

58. Әйләнәнең радиусы 5 м га тигез. Үзәктән 13 м ераклыктагы ноктадан әйләнәгә орынмалар үткәрелгән. Орынмаларның озынлыкларын һәм алар арасындагы почмакны табыгыз.

59. 7 м озынлыктагы вертикаль колганың күләгәсе 4 м га тигез. Кояшның горизонттан биеклеген градуслар белән күрсәтегез (168 нче рәсем).



168 нче рәсем



169 нчы рәсем

60. Тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмакның нигезе a га тигез. Ян ягын табыгыз.

61. Түбәндәге биремнәр буенча турыпочмаклы өчпочмакның билгесез якларын һәм кысынкы почмакларын табыгыз:

1) ике катеты буенча: а) $a=3$, $b=4$; б) $a=9$, $b=40$; в) $a=20$, $b=21$; г) $a=11$, $b=60$;

2) гипотенузасы һәм катеты буенча:
а) $c=13$, $a=5$; б) $c=25$, $a=7$; в) $c=17$, $a=8$; г) $c=85$, $a=84$;

3) гипотенузасы һәм кысынкы почмагы буенча:
а) $c=2$, $\alpha=20°$; б) $c=4$, $\alpha=50°20'$; в) $c=8$, $\alpha=70°36'$; г) $c=16$, $\alpha=76°21'$;

4) катеты һәм каршы ятучы почмагы буенча:
а) $a=3$, $\alpha=30°27'$; б) $a=5$, $\alpha=40°48'$; в) $a=7$, $\alpha=60°35'$; г) $a=9$, $\alpha=68°$.

62. Аңлатмаларны гадиләштерегез: 1) $1-\sin^2\alpha$;
2) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$; 3) $1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;
4) $\sin\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha$; 5) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
6) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha$; 7) $\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$;
8) $\operatorname{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-1)$; 9) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha}$.

63. Әгәр: 1) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$; 2) $\cos\alpha=\frac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha=0{,}6$ булса, $\sin\alpha$ һәм $\operatorname{tg}\alpha$ ның кыйммәтләрен исәпләгез.

64. Әгәр: 1) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; 2) $\sin\alpha=\frac{40}{41}$; 3) $\sin\alpha=0{,}8$ булса, $\cos\alpha$ һәм $\operatorname{tg}\alpha$ ны табыгыз.

65. Әгәр: 1) $\cos\alpha=\frac{4}{7}$; 2) $\sin\alpha=\frac{4}{7}$; 3) $\sin\alpha=0{,}5$; 4) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$; 5) $\operatorname{tg}\alpha=0{,}7$ икәне билгеле булса, α почмагын төзегез.

66. Гипотенузасы a һәм кысынкы почмагы $60°$ булган турыпоч-

маклы өчпочмакның бу почмакка каршы ятучы катетын табыгыз.

67. Ягы a булган тигезьяклы өчпочмакка камаулы әйләнәнең r радиусын һәм аны камаучы әйләнәнең R радиусын табыгыз.

68. Өчпочмакта нигез янындагы почмакларның зуррагы 45° ка тигез, ә биеклек нигезне 20 см һәм 21 см лы кисәкләргә бүлә. Зуррак ян якны табыгыз[1] (169 нчы рәсем).

69. Өчпочмак якларының берсе 1 м га, ә аның янындагы почмаклар 30° ка һәм 45° ка тигез. Өчпочмакның башка якларын табыгыз.

70. Турыпочмаклыкның диагонале аның якларының берсеннән ике тапкыр зуррак. Диагональләр арасындагы почмакларны табыгыз.

71. Ромбның диагональләре a һәм $a\sqrt{3}$ га тигез. Ромбның почмакларын табыгыз.

72. α һәм β почмакларының кайсы зуррак, әгәр:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{4}$; 2) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\sin\beta = \frac{3}{4}$;

3) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\beta = \frac{2}{5}$; 4) $\cos\alpha = 0{,}75$, $\cos\alpha = 0{,}74$;

5) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}1$, $\operatorname{tg}\beta = 2{,}5$; 6) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{2}$ булса?

73. Турыпочмаклы ABC өчпочмагының A почмагы B почмагыннан зуррак. Катетларның кайсы зуррак: AC мы яки BC мы?

74. Турыпочмаклы ABC өчпочмагында BC катеты AC катетыннан зуррак. Кайсы почмак зуррак: A мы яки B мы?

§ 8. ЯССЫЛЫКТА ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРЫ

71. ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРЫ БИЛГЕЛӘМӘСЕ

Яссылыкта O ноктасы аша үзара перпендикуляр x һәм y турылары — *координаталар күчәрен* үткәрәбез (170 нче рәсем). x күчәре (ул гадәттә горизонталь) *абсциссалар күчәре*, ә y күчәре *ординаталар күчәре* дип атала. Кисешү ноктасы O — *координаталар башлангычы* — белән күчәрләрнең һәркайсы ике ярымкүчәргә бүленә. Аларның берсен ук белән билгеләп *уңай* дип, ә икенчесен *тискәре* дип атарга шарт куябыз.

[1] Кайчакта ирекле өчпочмакта, аның тигезьянлы булуы мәҗбүри булмаган очракта, горизонталь итеп үткәрелгән ягын нигез, ә калган икесен ян яклар дип атыйлар.

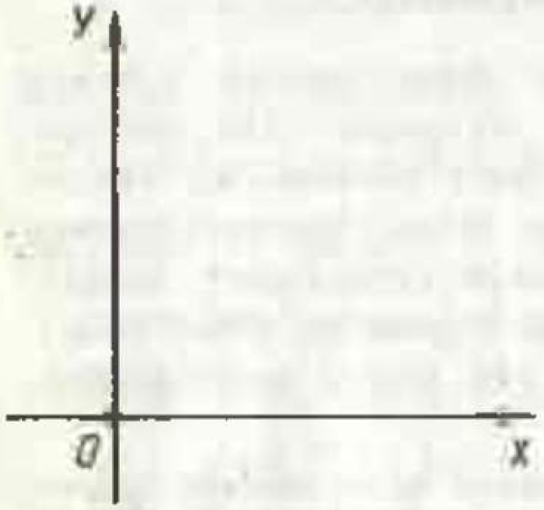
Яссылыкның һәр A ноктасына саннар парын — ноктаның координаталарын — (x) абсциссасын һәм (y) ординатасын тиңдәш итеп куярбыз. Шуңа кагыйдә бирик.

A ноктасы аша ординаталар күчәренә параллель итеп туры үткәрик (171 нче рәсем). Ул абсциссалар күчәре x ны ниндидер A_x ноктасында кисеп үтәр. A ноктасының *абсциссасы* дип без абсолют зурлыгы O ноктасыннан A_x ка кадәр ераклыкка тигез булган x санын атарбыз. Бу сан A_x ноктасы уңай ярымкүчәрнеке булганда уңай, ә A_x тискәре ярымкүчәрнеке булганда тискәре. Әгәр A ноктасы ординаталар күчәре y та ятса, x ны нульгә тигез дип алабыз.

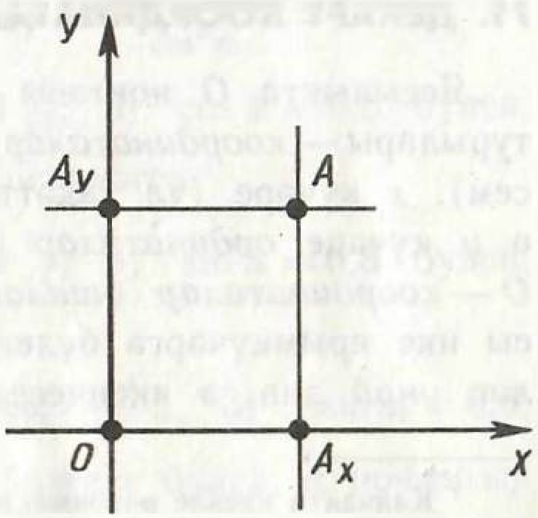
A ноктасының ординатасы (y) шулай ук билгеләнә. A ноктасы аша, абсциссалар күчәре x ка параллель итеп, туры үткәрәбез (171 нче рәсемне кара). Ул ординаталар күчәре y ны ниндидер A_y ноктасында кисеп үтәр. A ноктасының *ординатасы* дип без абсолют зурлыгы O ноктасыннан A_y ка кадәр ераклыкка тигез булган y санын атарбыз. Бу сан A_y уңай ярымкүчәрнеке булганда уңай, ә A_y тискәре ярымкүчәрнеке булганда тискәре булыр. Әгәр A ноктасы абсциссалар күчәре x та ятса, y ны нульгә тигез дип алабыз.

Ноктаның координаталарын аның хәрефле тамгасы белән рәттән җәяләр эченә язарбыз, мәсәлән: $A(x, y)$ (беренче урында — абсцисса, икенчесендә — ордината).

Координата күчәрләре яссылыкны дүрт кисәккә — I, II, III, IV чирекләргә бүләләр (172 нче рәсем). Бер чирек чикләрендә ике координатаның да тамгалары саклана һәм рәсемдә күрсәтелгән кыйммәтләрне ала.



170 нче рәсем



171 нче рәсем

Р. Декарт — француз галиме (1596—1650).

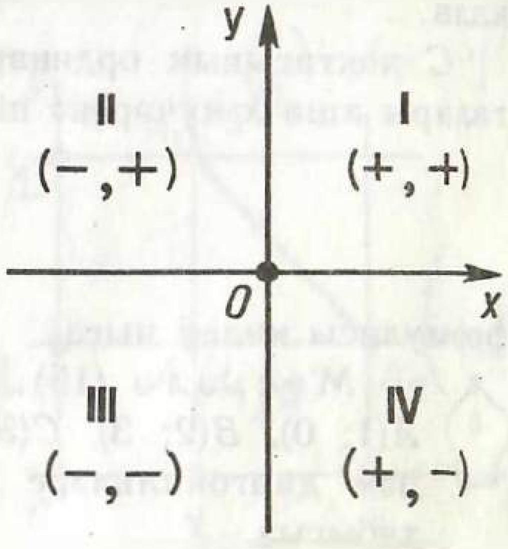
x күчәре (абсциссалар күчәре) нокталарының ординаталары нульгә тигез ($y=0$), ә y күчәре (ординаталар күчәре) нокталарының абсциссалары нульгә тигез ($x=0$). Координаталар башлангычының абсциссасы һәм ординатасы нульгә тигез.

Югарыда язылган ысул белән x һәм y координаталары күрсәтелгән яссылыкны xy яссылыгы дип атарбыз. Бу яссылыктагы координаталары x һәм y булган ирекле ноктаны кайвакытта (x, y) дип кенә тамгаларбыз. Үзенең тикшеренүләрендә координаталарны беренче булып кулланган Р. Декарт хөрмәтенә яссылыкта кертелгән x, y координаталарын *Декарт* координаталары дип атыйлар.

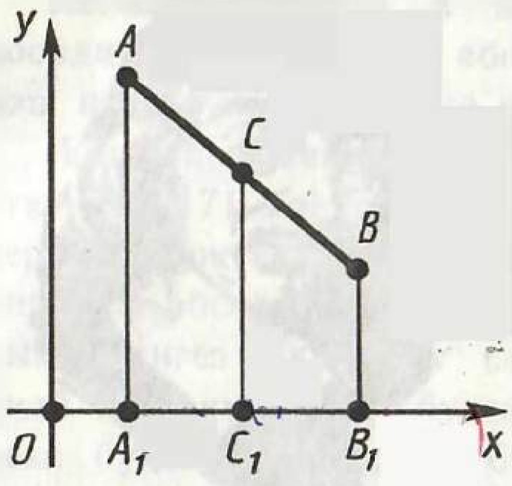
Мәсьәлә (9). $A(-3, 2)$ һәм $B(4, 1)$ нокталары бирелгән. AB кисемтәсенең y күчәрен кисүен, ә x күчәрен кисмәвен исбатлагыз.

Чишү. y күчәре xy яссылыгын ике ярымъяссылыкка бүлә. Бер ярымъяссылыкта нокталарның абсциссалары уңай, икенчесендә тискәре. A һәм B нокталарының абсциссалары капма-каршы тамгалы булганлыктан, A һәм B нокталары төрле ярымъяссылыкта яталар. Ә бу AB кисемтәсенең y күчәрен кискәнен аңлата.

x күчәре xy яссылыгын шулай ук ике ярымъяссылыкка бүлә. Бер ярымъяссылыкта нокталарның ординаталары уңай, икенчесендә тискәре. A һәм B нокталары ординаталарының тамгалары бер үк (уңай). Димәк, A һәм B нокталары бер ярымъяссылыкта яталар. Шулай булгач, AB кисемтәсе x күчәре белән кисешми.



172 нче рәсем



173 нче рәсем

72. КИСЕМТӘ УРТАСЫНЫҢ КООРДИНАТАЛАРЫ

$A(x_1,\ y_1)$ һәм $B(x_2,\ y_2)$ — ирекле ике нокта һәм $C(x,\ y)$ — AB кисемтәсенең уртасы булсын. C ноктасының x, y *координаталарын табыйк.*

Башта $x_1 \neq x_2$, ягъни AB кисемтәсе y күчәренә параллель булмаган очракны карыйк. A, B, C нокталары аша y күчәренә параллель турылар үткәрик (173 нче рәсем). Алар x күчәрен $A_1(x_1;\ 0)$, $B_1(x_2;\ 0)$, $C(x;\ 0)$ нокталарында кисеп үтәләр. Фалес теоремасы буенча C_1 ноктасы A_1B_1 кисемтәсенең уртасы булыр.

C_1 ноктасы A_1B_1 кисемтәсенең уртасы булганлыктан, $A_1C_1 = B_1C_1$, димәк, $|x - x_1| = |x - x_2|$. Моннан, $x - x_1 = x - x_2$, я $x - x_1 = -(x - x_2)$ килеп чыга. $x_1 \neq x_2$ булганлыктан, беренче тигезлек мөмкин түгел. Шуңа күрә икенчесе дөрес. Ә аннан түбәндәге формула килеп чыга:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Әгәр, $x_1 = x_2$, ягъни AB кисемтәсе y күчәренә параллель булса, A_1, B_1, C_1 нокталары өчесе дә бер үк абсциссалы булалар. Шулай булгач, бу очракта да формула дөрес булып кала.

C ноктасының ординатасы шулай ук табыла. A, B, C нокталары аша x күчәренә параллель турылар үткәрелә.

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

формуласы килеп чыга.

Мәсьәлә (15). $ABCD$ параллелограммының өч түбәсе: $A(1;\ 0)$, $B(2;\ 3)$, $C(3;\ 2)$ бирелгән. Дүртенче D түбәсенең һәм диагональләре кисешү ноктасының координаталарын табыгыз.

Чишү. Диагональләре кисешү ноктасы аларның һәр-

кайсының уртасы булып тора. Шуңа күрә ул AC кисемтәсенең уртасы була; димәк, аның координаталары

$$x=\frac{1+3}{2}=2, \qquad y=\frac{0+2}{2}=1$$

була. Хәзер, диагональләрнең кисешү ноктасының координаталарын белеп, дүртенче D түбәсе координаталары x, y ны табабыз. Диагональләрнең кисешү ноктасы BD кисемтәсенең уртасы булудан файдаланып, табабыз:

$$\frac{2+x}{2}=2, \qquad \frac{3+y}{2}=1. \text{ Моннан } x=2,\ y=-1.$$

73. НОКТАЛАР АРАСЫНДАГЫ ЕРАКЛЫК

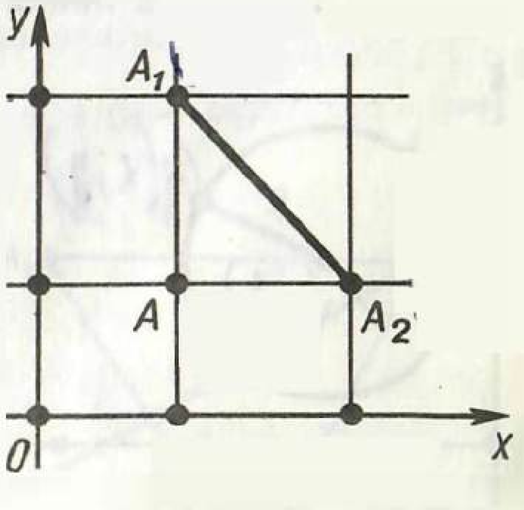
xy яссылыгында ике нокта: координаталары x_1, y_1 булган A_1 ноктасы һәм координаталары x_2, y_2 булган A_2 ноктасы бирелгән булсын. A_1 һәм A_2 ноктлары арасындагы ераклыкны бу ноктaларның координаталары аша күрсәтик.

Башта $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ очрагын карыйк. A_1 һәм A_2 ноктлары аша координаталар күчәрләренә параллель турылар үткәрик, һәм аларның кисешү ноктасын A дип тамгалыйк (174 нче рәсем). A һәм A_1 ноктлары арасындагы ераклык $|y_1-y_2|$ на, ә A һәм A_2 ноктлары арасындагы ераклык $|x_1-x_2|$ на тигез була. AA_1A_2 турыпочмаклы өчпочмагына Пифагор теоремасын кулланып, табабыз:

$$d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2, \qquad (*)$$

биредә d A_1 һәм A_2 ноктлары арасындагы ераклык.

Ике нокта арасындагы ераклык өчен (*) формуласы $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ дип фараз итеп чыгарылган булса да, ул башка очракларда да дөрес булып кала. Чыннан да, әгәр $x_1=x_2$, $y_1 \neq y_2$ булса, $d=|y_1-y_2|$. (*) формуласы да шул ук нәтиҗәне бирә. $x_1 \neq x_2$, $y_1=y_2$ булганда шулай ук аңлатыла. $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ булганда A_1 һәм A_2 ноктлары тәңгәл килә һәм (*) формуласы буенча $d=0$.



174 нче рәсем

Мәсьәлә (19). x күчәрендә (1; 2) һәм (2; 3) ноктaларыннан тигез ераклыктагы ноктаны табыгыз.

Чишү. $(x;\ 0)$ — эзләнелә торган нокта булсын. Аның бирелгән нокталарга кадәр ераклыкларын тигезләп, табабыз:

$$(x-1)^2+(0-2)^2=(x-2)^2+(0-3)^2.$$

Моннан табабыз: $x=4$. Шулай итеп, (4; 0) эзләнелә торган нокта була.

74. ӘЙЛӘНӘ ТИГЕЗЛӘМӘСЕ

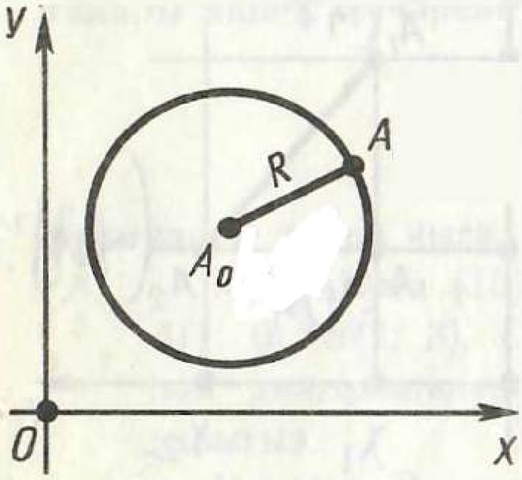
Декарт координаталары яссылыгындагы фигураның теләсә кайсы ноктасының координаталары канәгатьләндерә торган ике $(x;\ y)$ билгесезле тигезләмә *фигураның тигезләмәсе* дип атала. Һәм киресенчә, бу тигезләмәне канәгатьләндерүче теләсә нинди ике сан фигураның кайсыдыр бер ноктасының координаталары була.

Үзәге $A_0(a;\ b)$ ноктасында һәм радиусы R булган әйләнә тигезләмәсен төзик (175 нче рәсем). Әйләнә өстендә ирекле $A(x;\ y)$ ноктасы алыйк. Аннан A_0 үзәгенә кадәр ераклык R га тигез. $(x-a)^2+(y-b)^2$ A ноктасыннан A_0 гә кадәр ераклыкның квадратына тигез. Шулай итеп, әйләнәнең һәр A ноктасының x, y координаталары

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (*)$$

тигезләмәсен канәгатьләндерәләр.

Киресенчә: координаталары (*) тигезләмәсен канәгатьләндерә торган теләсә нинди A ноктасы әйләнә ноктасы була, чөнки аның A_0 ноктасына кадәр ераклыгы R га тигез. Моннан (*) тигезләмәсенең чыннан да A_0 үзәкле һәм R радиуслы әйләнә тигезләмәсе килеп чыга.



175 нче рәсем

Әгәр әйләнә үзәге координаталар башлангычы булса, аның тигезләмәсе

$$x^2+y^2=R^2$$

рәвешендә язылуын искәртик.

Мәсьәлә (30). $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0$ тигезләмәсе белән нинди геометрик фигура бирелгән?

Чишү. Бирелгән тигезләмәне түбәндәгечә үзгәртәбез:

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}+y^2+by+\frac{b^2}{4}=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c,$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}\right)^2.$$

Без карала торган фигураның үзәге $\left(-\frac{a}{2};\ -\frac{b}{2}\right)$ һәм радиусы $R=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$ булган әйләнә икәнен күрәбез.

75. ТУРЫ ТИГЕЗЛӘМӘСЕ

Декарт x, y координаталарында теләсә нинди турының тигезләмәсе

$$ax+by+c=0 \qquad (*)$$

рәвешендә була икәнен исбатлыйк.

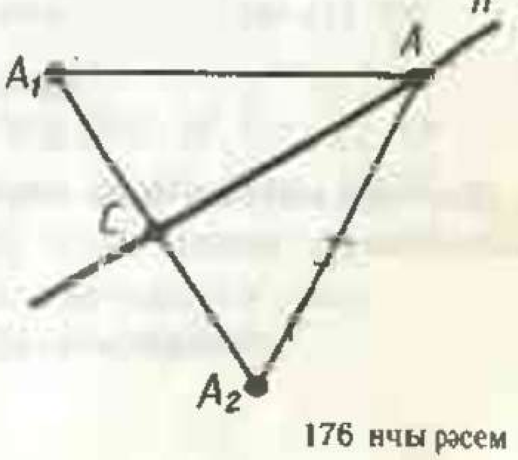
h турысы xy яссылыгындагы ирекле туры булсын. h турысына перпендикуляр итеп, нинди дә булса туры үткәрәбез, һәм анда h турысы белән кисешү ноктасы C дан тигез CA_1 һәм CA_2 кисемтәләре салабыз (176 нчы рәсем).

a_1, b_1 — A_1 ноктасының координаталары һәм a_2, b_2 — A_2 ноктасының координаталары булсын. Белгәнебезчә, h турысының теләсә кайсы $A(x;\ y)$ ноктасы A_1 һәм A_2 нокталарыннан тигез ераклыкта ята. Шуңа күрә аның координаталары

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2 \qquad (**)$$

тигезләмәсен канәгатьләндерәләр.

Киресенчә, нинди дә булса ноктаның координаталары x, y (**) тигезләмәсен канәгатьләндерсә, ул нокта A_1 һәм A_2 нокталарыннан тигез ераклыкта, димәк, h турысы өстендә ята. Шулай итеп, (**) тигезләмәсе h турысының тигезләмә-



176 нчы рәсем

се булып тора. Әгәр бу тигезләмәдә җәяләрне ачсак һәм барлык буыннарны аның сул кисәгенә күчерсәк, ул (*) рәвешен алыр:

$$2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+(a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2)=0.$$

$$2(a_2-a_1)=a,\ 2(b_2-b_1)=b,\ a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2=c$$

дип тамгалап, (*) тигезләмәсен табабыз. Раслау исбатланды.

Мәсьәлә (35). $A(-1, 1)$, $B(1, 0)$ нокталары аша үтүче турының тигезләмәсен төзегез.

Чишү. Белгәнебезчә, безнең турының тигезләмәсе $ax+by+c=0$ рәвешендә. A һәм B нокталары туры өстендә ята, димәк, аларның координаталары бу тигезләмәне канәгатьләндерә. A һәм B нокталарының координаталарын турының тигезләмәсенә куеп, табабыз:

$$-a+b+c=0,\ a+c=0.$$

Бу тигезләмәләрдән ике коэффициентны, мәсәлән, a һәм b ны, өченчесе аша күрсәтеп була: $a=-c$, $b=-2c$. a һәм b ның бу кыйммәтләрен туры тигезләмәсенә куеп, табабыз:

$$-cx-2cy+c=0.$$

c га кыскартырга мөмкин. Ул вакытта

$$-x-2y+1=0$$

тигезләмәсен китереп чыгарабыз. Бу инде безнең туры тигезләмәсе була.

76. ТУРЫЛАР КИСЕШҮ НОКТАЛАРЫНЫҢ КООРДИНАТАЛАРЫ

Ике турының тигезләмәләре бирелгән булсын:

$$ax+by+c=0,$$

$$a_1x+b_1y+c_1=0.$$

Аларның кисешү ноктасының координаталарын табыйк.

Кисешү ноктасы $(x;\ y)$ турыларның һәркайсында ятканлыктан, аның координаталары тигезләмәләрнең беренчесен һәм икенчесен дә канәгатьләндерәләр. Шуңа күрә кисешү ноктасы-

ның координаталары турыларның тигезләмәләре системасының чишелеше булалар. Мисал карыйк.

$$3x-y+2=0,$$
$$5x-2y+1=0$$

бирелгән турыларның тигезләмәләре булсын. Бу системаны чишеп, табабыз: $x=-3$, $y=-7$. $(-3;\ -7)$ турыларның кисешү ноктасы була.

Мәсьәлә (43).

$$y=kx+l_1,$$
$$y=kx+l_2$$

тигезләмәләре белән бирелгән турыларның $l_1 \neq l_2$ булганда параллель икәнен исбатлагыз.

Чишү. Турыларны параллель түгел, димәк, ниндидер $(x_1;\ y_1)$ ноктасында кисешәләр дип уйлыйк. Кисешү ноктасы турыларның һәркайсында ятканлыктан, ул нокта өчен

$$y_1=kx_1+l_1,$$
$$y_1=kx_1+l_2.$$

Бу тигезлекләрне буыннап алып, $0=l_1-l_2$ не табабыз. Ә бу $l_1 \neq l_2$ дигән шартка каршы килә. Без каршылыкка очрадык. Раслау исбатланды.

77. ТУРЫНЫҢ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСЫНА КАРАТА ТОРЫШЫ

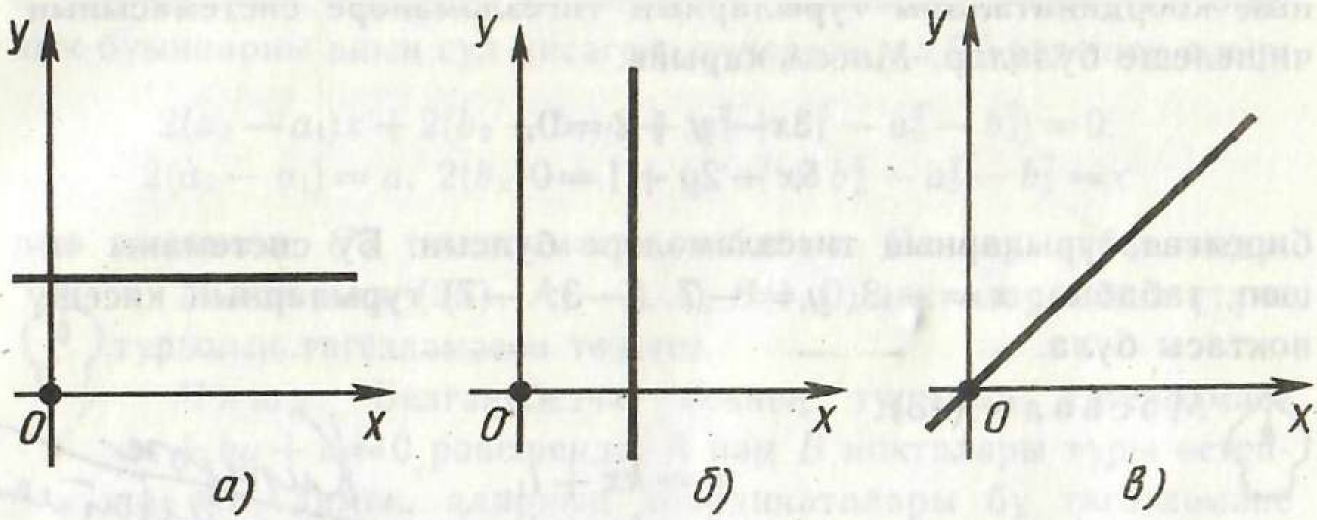
Әгәр туры тигезләмәсе $ax+by+c=0$ теге яки бу аерым күренештә булса, аның координаталар күчәренә карата торышын ачыклыйк.

1. $a=0$, $b \neq 0$. Бу очракта турының тигезләмәсен болай язарга мөмкин:

$$y=-\frac{c}{b}.$$

Шулай итеп, турының барлык нокталары бер үк $\left(-\frac{c}{b}\right)$ ординаталы булалар; димәк, ***туры x күчәренә параллель*** (177 нче рәсем, *а*). Аерым алганда, әгәр $c=0$ булса, туры *x* күчәре белән тәңгәл килә.

2. $b=0$, $a \neq 0$. Бу очрак нәкъ шулай ук карала. ***Туры y кү-***



177 нче рәсем

чәренә параллель була (177 нче рәсем, *б*) һәм, әгәр $c=0$ булса, аның белән тәңгәл килә.

3. $c=0$. ***Туры координаталар башлангычы аша үтә,*** чөнки аның (0, 0) координаталары туры тигезләмәсен канәгатьләндерә (177 нче рәсем, *в*).

Мәсьәлә (45). x күчәренә параллель һәм (2; -3) ноктасы аша үтүче турының тигезләмәсен төзегез.

Чишү. Туры x күчәренә параллель булганлыктан, аның тигезләмәсе $y+c=0$ рәвешендә булыр. (2; -3) ноктасы туры өстендә ятканлыктан, аның координаталары бу тигезләмәне канәгатьләндерәләр: $-3+c=0$. Моннан $c=3$. Димәк,

$$y+3=0$$

туры тигезләмәсе була.

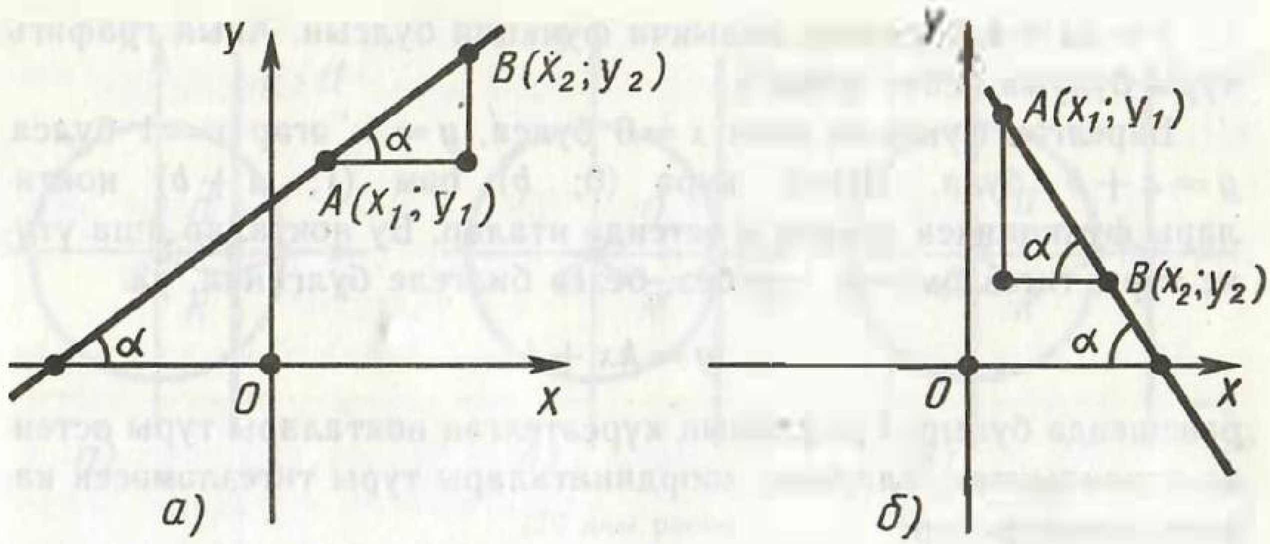
78. ТУРЫ ТИГЕЗЛӘМӘСЕНДӘ ПОЧМАКЧА КОЭФФИЦИЕНТ

Әгәр турының $ax+by+c=0$ гомуми тигезләмәсендә y янындагы коэффициент нульгә тигез булмаса, ул тигезләмәне y ка карата чишәргә ярый. Табарбыз:

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}.$$

Яки, $-\frac{a}{b}=k$, $-\frac{c}{b}=l$ дип тамгалап, табабыз:

$$y=kx+l.$$



178 нче рәсем

Бу тигезләмәдәге k коэффициентының геометрик мәгънәсен ачыклыйк.

Туры өстендә $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)(x_1 < x_2)$ нокталары алыйк. Аларның координаталары туры тигезләмәсен канәгатьләндерәләр:

$$y_1 = kx_1 + l, \qquad y_2 = kx_2 + l.$$

Бу тигезләмәләрнең икенчесеннән беренчесен алып, табабыз:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1). \text{ Моннан } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

178 нче *а* рәсемендә китерелгән очракта $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha$.

178 нче *б* рәсемендә китерелгән очракта $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\operatorname{tg} \alpha$.

Шулай итеп, туры тигезләмәсендәге *k* коэффициенты туры *x* күчәре белән ясаган кысынкы почмак тангенсына тамгага кадәр төгәллек белән тигез.

Туры тигезләмәсендәге *k* коэффициенты *турының почмакча коэффициенты* дип атала.

79. СЫЗЫКЧА ФУНКЦИЯНЕҢ ГРАФИГЫ

Алгебра дәресләрендә функцияләрнең графикларын төзегәндә сызыкча функциянең графигы туры сызык булуына сез игътибар иткәнсездер инде. Хәзер шуны исбат итик.

$y = ax + b$ бирелгән сызыкча функция булсын. Аның графигы туры булуын исбат итик.

Бирелгән функция өчен $x = 0$ булса, $y = b$, әгәр $x = 1$ булса, $y = a + b$ була. Шуңа күрә $(0;\ b)$ һәм $(1;\ a + b)$ нокталары функциянең графигы өстендә яталар. Бу нокталар аша үтүче туры тигезләмәсен төзибез, безгә билгеле булганча, ул

$$y = kx + l$$

рәвешендә булыр. Графикның күрсәтелгән нокталары туры өстендә ятканлыктан, аларның координаталары туры тигезләмәсен канәгатьләндерәләр:

$$b = k \cdot 0 + l,$$
$$a + b = k \cdot 1 + l.$$

Моннан $l = b$, $k = a$ табыла. Шулай итеп,

$$y = ax + b$$

безнең туры тигезләмәсе икән. Димәк, графикның барлык нокталары туры тигезләмәсен канәгатьләндерәләр. Ягъни сызыкча функциянең графигы туры була.

80. ТУРЫНЫҢ ӘЙЛӘНӘ БЕЛӘН КИСЕШҮЕ

Турының әйләнә белән кисешүе турындагы мәсьәләне карыйк. R — әйләнәнең радиусы һәм d — әйләнә үзәгеннән турыга кадәр ераклык булсын. Әйләнәнең үзәген координаталар башлангычы, ә бирелгән турыга перпендикуляр турыны x күчәре итеп кабул итәбез (179 нчы рәсем). Ул вакытта $x^2 + y^2 = R^2$ — әйләнә тигезләмәсе, ә $x = d$ туры тигезләмәсе була.

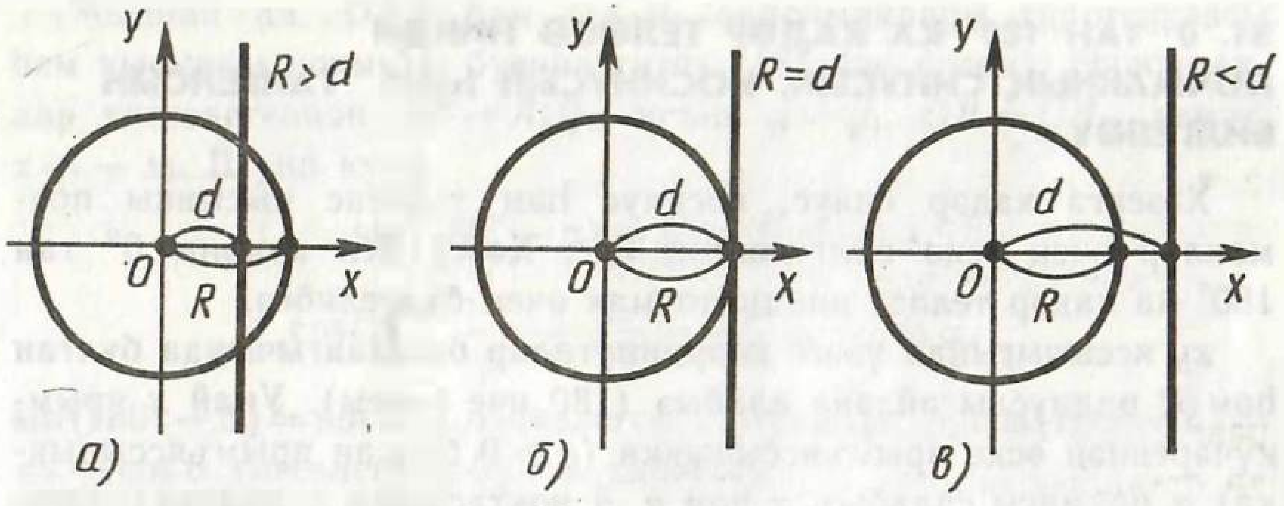
Туры һәм әйләнә кисешсен өчен, ике билгесезле ике

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad x = d$$

тигезләмәләре системасының чишелеше булуы кирәк. Һәм киресенчә: бу системаның теләсә кайсы чишелеше турының әйләнә белән кисешү ноктасының x, y координаталарын бирә. Безнең системаны чишеп, табабыз:

$$x = d, \quad y = \pm\sqrt{R^2 - d^2}.$$

y өчен булган аңлатмадан күренгәнчә, ***әгәр $R > d$ булса,***



179 нчы рәсем

системаның ике чишелеше бар, ***ягъни әйләнә белән турының ике кисешү ноктасы була*** (179 нчы рәсем, *а*).

Әгәр $R = d$ булса, системаның бер чишелеше бар (179 нчы рәсем, *б*). Бу очракта ***туры белән әйләнә орыналар.***

Әгәр $R < d$ булса, системаның чишелеше булмый, ***ягъни туры белән әйләнә кисешми*** (179 нчы рәсем, *в*).

Мәсьәлә (50). $x^2+y^2=1$ әйләнәсе белән $y=2x+1$ турысының кисешү нокталарын табыгыз.

Чишү. Кисешү ноктлары бер үк вакытта әйләнә һәм туры өстендә ятканлыктан, аларның координаталары

$$x^2+y^2=1, \qquad y=2x+1$$

тигезләмәләре системасын канәгатьләндерәләр. Бу системаны чишик. Икенче тигезләмәдәге y ны беренче тигезләмәгә куеп, x ка карата тигезләмә табабыз:

$$5x^2+4x=0.$$

Тигезләмәнең ике тамыры бар: $x_1=0$ һәм $x_2=-\frac{4}{5}$. Бу кисешү ноктларының абсциссалары. Туры тигезләмәсенә x_1 һәм x_2 кыйммәтләрен куеп, бу ноктларның ординаталарын табабыз. $y_1=1$, $y_2=-\frac{3}{5}$ була. Шулай итеп, (0; 1) һәм $\left(-\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$ туры белән әйләнәнең кисешү ноктлары була.

81. 0° ТАН 180° КА КАДӘР ТЕЛӘСӘ НИНДИ ПОЧМАКНЫҢ СИНУСЫН, КОСИНУСЫН һӘМ ТАНГЕНСЫН БИЛГЕЛӘҮ

Хәзергә кадәр синус, косинус һәм тангенс кысынкы почмаклар өчен генә билгеләнгән иде. Хәзер без аларны 0° тан 180° ка кадәр теләсә нинди почмак өчен билгелибез.

xy яссылыгында үзәге координаталар башлангычында булган һәм *R* радиуслы әйләнә алабыз (180 нче рәсем). Уңай *x* ярымкүчәреннән өске ярымъяссылыкка ($y>0$ булган ярымъяссылыкка) α почмагы салабыз. *x* һәм *y* *A* ноктасының координаталары булсын. Кысынкы α почмагы өчен $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ һәм $\operatorname{tg}\alpha$ кыйммәтләре *A* ноктасының координаталары аша түбәндәгечә күрсәтелә:

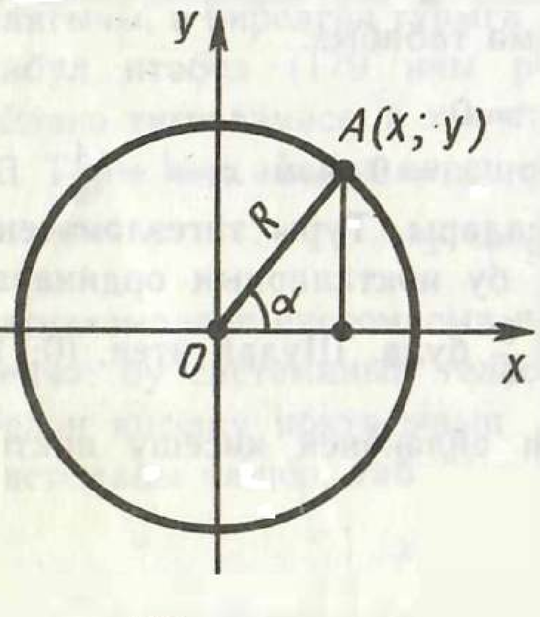
$$\cos\alpha=\frac{x}{R};\quad \sin\alpha=\frac{y}{R};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}.$$

Хәзер $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ һәм $\operatorname{tg}\alpha$ ларның кыйммәтләрен теләсә нинди α почмагы өчен шушы формулалар белән билгелибез. ($\operatorname{tg}\alpha$ өчен $\alpha=90°$ почмагы керми.)

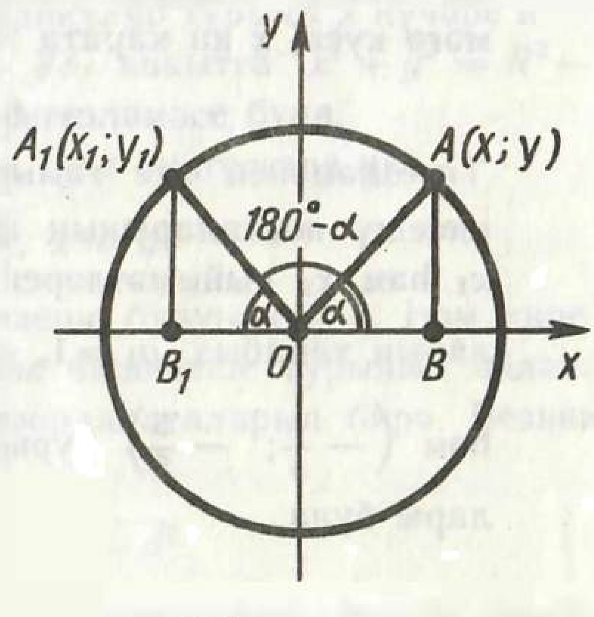
Алай билгеләгәндә $\sin 90°=1$, $\cos 90°=0$, $\sin 180°=0$, $\cos 180°=-1$, $\operatorname{tg} 180°=0$.

Тәңгәл килгән нурлар 0° лы почмак төзи дип исәпләп, табабыз: $\sin 0°=0$, $\cos 0°=1$, $\operatorname{tg} 0°=0$.

Теләсә нинди α $(0°<\alpha<180°)$ ***почмагы өчен*** $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$. $\alpha\neq 90°$ ***почмагы өчен*** $\operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$ **икәнлеген исбатлыйк.**



180 нче рәсем



181 нче рәсем

Чыннан да, OAB һәм OA_1B_1 өчпочмаклары гипотенузасы һәм кысынкы почмагы буенча тигез (181 нче рәсем). Өчпочмаклар тигезлегеннән $AB = A_1B_1$, ягъни $y = y_1$, $OB = OB_1$, димәк, $x = -x_1$. Шуңа күрә

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y_1}{R} = \frac{y}{R} = \sin\alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x_1}{R} = \frac{-x}{R} = -\cos\alpha.$$

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ тигезлеген буынлап $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ тигезлегенә бүлеп, табабыз:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Шуны исбатларга кирәк иде дә.

?КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Ноктаның координаталары ничек билгеләнгәнен аңлатыгыз.
2. Әгәр нокта беренче (икенче, өченче, дүртенче) чиректә ятса, аның координаталарының тамгалары нинди була?
3. Ординаталар күчәрендә яткан нокталарның абсциссалары күпмегә тигез?
   Абсциссалар күчәрендәге нокталарның ординаталары күпмегә тигез?
   Координаталар башлангычының координаталары күпмегә тигез?
4. Кисемтә уртасының координаталары өчен формулалар чыгарыгыз.
5. Нокталар арасында ераклык өчен формула чыгарыгыз.
6. Декарт координаталарында фигураның тигезләмәсе нәрсә ул?
7. Әйләнә тигезләмәсен чыгарыгыз.
8. Декарт координаталарында туры тигезләмәсенең $ax + by + c = 0$ рәвешендә булуын исбатлагыз.
9. Әгәр ике турының тигезләмәләре бирелгән булса, алар кисешү ноктасының координаталарын ничек табарга?
10. Әгәр $ax + by + c = 0$ турысы тигезләмәсендә коэффициент $a = 0$ (коэффициент $b = 0$, $c = 0$) булса, туры нинди торышта булыр?
11. Турының почмакча коэффициенты дип нәрсәне атыйлар һәм аның нинди геометрик мәгънәсе бар?
12. Сызыкча функциянең графигы туры икәнен исбатлагыз.

13. Нинди шартларда туры һәм әйләнә кисешмиләр, ике нокта кисешәләр, орыналар?
14. $0°$ тан $180°$ ка кадәр теләсә нинди почмакның синусына, косинусына һәм тангенсына билгеләмә бирегез.
15. Теләсә нинди $\alpha (0° < \alpha < 180°)$ почмагы өчен $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$ икәнен исбатлагыз.

Мәсьәләләр

1. Координаталар күчәрен үткәрегез, күчәрдә озынлык берәмлеге сайлагыз. (1, 2), (−2, 1), (−1, −3), (2, −1) координаталары буенча нокталар төзегез.
2. xy яссылыгында теләсә нинди дүрт нокта алыгыз. Бу нокталарның координаталарын табыгыз.
3. x күчәренә параллель туры өстендә ике нокта алынган. Аларның берсенең ординатасы 2 гә тигез. Икенчесенең ординатасы күпмегә тигез?
4. x күчәренә перпендикуляр туры өстендә ике нокта алынган. Аларның берсенең абсциссасы $x = 3$. Икенче ноктаның абсциссасы күпмегә тигез?
5. $A(2, 3)$ ноктасыннан x күчәренә перпендикуляр төшерелгән. Перпендикуляр нигезенең координаталарын табыгыз.
6. $A(2, 3)$ ноктасы аша x күчәренә параллель итеп туры үткәрелгән. Аның y күчәре белән кисешү ноктасының координаталарын табыгыз.
7. xy яссылыгында абсциссалары $x = 3$ булган нокталарның геометрик урынын табыгыз.
8. xy яссылыгында $|x| = 3$ булырдай нокталарның геометрик урынын табыгыз.
9. $A(-3, 2)$, $B(4, 1)$ нокталары бирелгән. AB кисемтәсенең y күчәрен кисүен, ә x күчәрен кисмәвен исбатлагыз.
10. Алдагы мәсьәләдә AB кисемтәсе y күчәренең кайсы ярымкүчәрен кисә (уңаенмы яки тискәресенме)?
11. $(-3, 4)$ ноктасыннан 1) x күчәренә; 2) y күчәренә кадәр ераклыкны табыгыз.
12. Әгәр: 1) $A(1; -2)$, $B(5; 6)$; 2) $A(-3; 4)$, $B(1; 2)$; 3) $A(5; 7)$, $B(-3; -5)$ булса, AB кисемтәсе уртасының координаталарын табыгыз.
13. C ноктасы — AB кисемтәсенең уртасы. Әгәр: 1) $A(0; 1)$, $C(-1; 2)$; 2) $A(-1; 3)$, $C(1; -1)$; 3) $A(0; 0)$, $C(-2; 2)$ булса, AB кисемтәсенең икенче очының координаталарын табыгыз.
14. Түбәләре $A(-1; -2)$, $B(2; -5)$, $C(1; -2)$, $D(-2; 1)$ нокталарында булган $ABCD$ дүртпочмагының параллело-

грамм икәнен исбатлагыз. Аның диагональләре кисешү ноктасын табыгыз.

15. $ABCD$ параллелограммының өч түбәсе бирелгән: $A(1;\ 0)$, $B(2;\ 3)$, $C(3;\ 2)$. Дүртенче түбәсенең һәм диагональләре кисешү ноктасының координаталарын табыгыз.

16. $O(0;\ 0)$, $A(0;\ 2)$, $B(-4;\ 0)$ нокталары аның түбәләре булган өчпочмак якларының урталарын табыгыз.

17. Өч нокта: $A(4;\ -2)$; $B(1;\ 2)$, $C(-2;\ 6)$ бирелгән. Икешәрләп алынган бу нокталар арасындагы ераклыкларны табыгыз.

18. Алдагы мәсьәләдәге A, B, C нокталарының бер туры өстендә ятканын исбатлагыз. Бу нокталарның кайсы калган икесе арасында ята?

19. x күчәрендә $(1;\ 2)$ һәм $(2;\ 3)$ нокталарыннан тигез ераклыктагы ноктаны табыгыз.

20. Координаталар күчәрләреннән һәм $(3,\ 6)$ ноктасыннан тигез ераклыкта яткан ноктаны табыгыз.

21*. Түбәләре $A(4;\ 1)$, $B(0;\ 4)$, $C(-3;\ 0)$, $D(1;\ -3)$ нокталарында булган дүртпочмакның квадрат икәнен исбатлагыз.

22. Дүрт нокта: $(1;\ 0)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(0;\ -1)$ нең квадрат түбәләре булганын исбатлагыз.

23. $(1;\ 2)$, $(3;\ 4)$, $(-4;\ 3)$, $(0;\ 5)$, $(5;\ -1)$ нокталарының кайсылары $x^2+y^2=25$ тигезләмәсе белән бирелгән әйләнә өстендә ята?

24. $x^2+y^2=169$ тигезләмәсе белән бирелгән әйләнә өстендә 1) абсциссасы 5; 2) ординатасы -12 булган нокталарны табыгыз.

25. $A(2,\ 0)$ һәм $B(-2,\ 6)$ нокталары бирелгән. Диаметры булып AB кисемтәсе хезмәт иткән әйләнәнең тигезләмәсен төзегез.

26. $A(-1;\ -1)$ һәм $C(-4;\ 3)$ нокталары бирелгән. Үзәге C ноктасында булган A ноктасы аша үтүче әйләнәнең тигезләмәсен төзегез.

27. Әгәр әйләнәнең радиусы 5 кә тигезлеге һәм аның $(1;\ 4)$ ноктасы аша үтүе билгеле булса, әйләнәнең x күчәрендәге үзәген табыгыз.

28*. Абсцисса күчәренә орынучы һәм үзәге $(1;\ 2)$ ноктасында булган әйләнәнең тигезләмәсен төзегез.

29. Координаталар башлангычы аша үтүче һәм үзәге $(-3;\ 4)$ ноктасында булган әйләнә тигезләмәсен төзегез.

30*. $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0$ тигезләмәсе белән нинди геометрик фигура бирелгән?

31. Ике әйләнә кисешү нокталарының координаталарын табыгыз: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-2x+y-2=0$.

32. $x^2+y^2-8x-8y+7=0$ әйләнәсенең x күчәре белән кисешү нокталарының координаталарын табыгыз.

33. $x^2+y^2+2ax+1=0$ әйләнәсенең y күчәре белән кисешмәвен исбатлагыз (биредә $|a|>1$).

34. $x^2+y^2+2ax=0$ әйләнәсенең y күчәренә орынуын исбатлагыз.

35. $A(-1;\ 1)$, $B(1;\ 0)$ нокталары аша үтүче туры тигезләмәсен төзегез.

36. Әгәр: 1) $A(2;\ 3)$, $B(3;\ 2)$; 2) $A(4;\ -1)$, $B(-6;\ 2)$; 3) $A(5;\ -3)$, $B(-1;\ -2)$ булса, AB турысының тигезләмәсен төзегез.

37. 16 нчы мәсьәләдәге OAB өчпочмагының яклары булган турыларның тигезләмәләрен төзегез.

38. Әгәр туры $(1;\ 2)$ һәм $(2;\ 1)$ нокталары аша үтсә, аның $ax+by=1$ тигезләмәсендәге a һәм b коэффициентлары күпмегә тигез?

39. Түбәндәге тигезләмә белән бирелгән турының координаталар күчәрләре белән кисешү нокталарын табыгыз: 1) $x+2y+3=0$; 2) $3x+4y=12$; 3) $3x-2y+6=0$; 4) $4x-2y-10=0$

40. Түбәндәге тигезләмәләр белән бирелгән турыларның кисешү нокталарын табыгыз:

1) $x+2y+3=0$, $4x+5y+6=0$;
2) $3x-y-2=0$, $2x+y-8=0$;
3) $4x+5y+8=0$, $4x-2y-6=0$.

41*. Өч туры: $x+2y=3$, $2x-y=1$ һәм $3x+y=4$ нең бер ноктада кисешүен исбатлагыз.

42*. $(1;\ 0)$, $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$ түбәле өчпочмак медианаларының кисешү ноктасының координаталарын табыгыз.

43. $y=kx+l_1$, $y=kx+l_2$ тигезләмәләре белән бирелгән турыларның, $l_1\neq l_2$ булганда, параллель икәнлеген исбатлагыз.

44. Туры тигезләмәләре арасында параллель турыларны бирүчеләренең парларын күрсәтегез: 1) $x+y=1$; 2) $y=x-1$; 3) $x-y=2$; 4) $y=4$; 5) $y=3$; 6) $2x+2y+3=0$.

45. y күчәренә параллель булган һәм $(2;\ -3)$ ноктасы аша үтүче туры тигезләмәсен төзегез.

46. x күчәренә параллель булган һәм $(2,\ 3)$ ноктасы аша үтүче туры тигезләмәсен төзегез.

47. Координаталар башлангычы һәм $(2,\ 3)$ ноктасы аша үтүче туры тигезләмәсен төзегез.

48. 39 нчы мәсьәләдән турыларның почмакча коэффициентларын табыгыз.

49. Бирелгән турыларның x күчәре белән ясаган кысынкы почмагын табыгыз: 1) $2y=2x+3$; 2) $x\sqrt{3}-y=2$; 3) $x+y\sqrt{3}+1=0$.

50. $x^2+y^2=1$ әйләнәсенең туры белән кисешү нокталарын табыгыз: 1) $y=2x+1$, 2) $y=x+1$, 3) $y=3x+1$, 4) $y=kx+1$.

51. c нинди кыйммәтләр алганда $x+y+c=0$ турысы һәм x^2+

$+y^2=1$ әйләнәсе 1) кисешәләр; 2) кисешмиләр; 3) орыналар?

52. $120°$, $135°$, $150°$ ның синусын, косинусын һәм тангенсын табыгыз.

53. 1) $\sin 160°$, 2) $\cos 140°$, 3) $\operatorname{tg} 130°$ ны табыгыз.

54. Почмакларның синусын, косинусын һәм тангенсын табыгыз: 1) $40°$; 2) $14°36'$; 3) $70°20'$; 4) $30°16'$; 5) $130°$; 6) $150°30'$; 7) $150°33'$; 8) $170°28'$.

55. 1) $\sin\alpha=0{,}2$; 2) $\cos\alpha=-0{,}7$; 3) $\operatorname{tg}\alpha=-0{,}4$ икәне билгеле. Почмакларны табыгыз.

56. Әгәр 1) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$; 2) $\cos\alpha=-0{,}5$; 3) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ булса, $\sin\alpha$ һәм $\operatorname{tg}\alpha$ ны табыгыз.

57. Әгәр $\sin\alpha=0{,}6$, $0°<\alpha<90°$; 2) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $90°<\alpha<180°$; 3) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $0°<\alpha<180°$ булса, $\cos\alpha$ һәм $\operatorname{tg}\alpha$ ны табыгыз.

58. $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$ икәне билгеле. $\sin\alpha$ һәм $\cos\alpha$ ны табыгыз.

59. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ икәне билгеле булса, α почмагын төзегез.

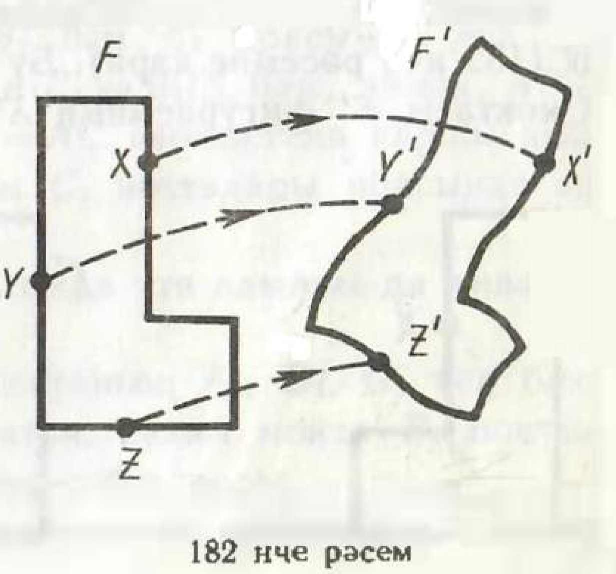
60. $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ икәне билгеле булса, α почмагын төзегез.

61*. Әгәр $\cos\alpha=\cos\beta$ булса, $\alpha=\beta$ икәнен исбатлагыз.

62*. Әгәр $\sin\alpha=\sin\beta$ булса, я $\alpha=\beta$, я $\alpha=180°-\beta$ икәнен исбатлагыз.

§ 9. ХӘРӘКӘТ

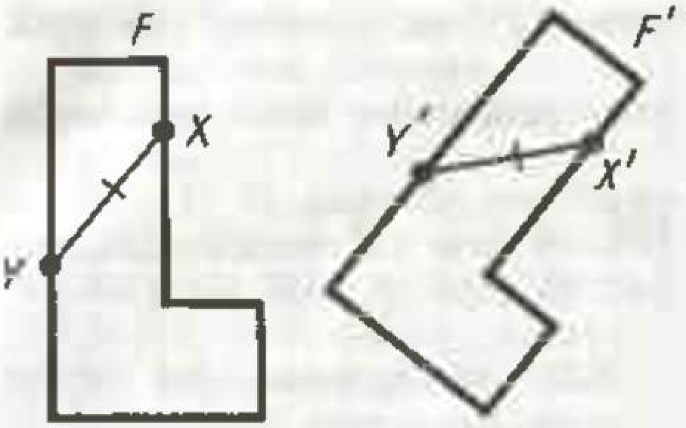
82. ФИГУРАЛАРНЫ ҮЗГӘРТҮ



182 нче рәсем

Әгәр бирелгән фигураның һәр ноктасын ничек булса да урыныннан күчерсәк, без яңа фигура китереп чыгарырбыз. Бу фигура бирелгән фигурадан *үзгәртү* юлы белән килеп чыккан диләр (182 нче рәсем).

Әгәр F фигурасын F' фигурасына үзгәртү ноктлар



183 нче рәсем

арасындагы ераклыкларны саклаcа, ягъни F фигурасының теләсә нинди ике ноктасын: X һәм Y ны F' фигурасының X', Y' нокталарына $XY = X'Y'$ булырлык итеп күчерсә, ул *хәрәкәт* дип атала (183 нче рәсем).

Искәрмә. Геометриядә хәрәкәт төшенчәсе күчү турында гадәти күз алдына китерү белән бәйләнгән. Ләкин күчү турында сүз барганда без өзлексез процессны күз алдына китерсәк, геометриядә исә безнең өчен фигураның башлангыч һәм соңгы торышлары гына әһәмияткә ия булыр.

F фигурасы хәрәкәт белән F' фигурасына, ә F' фигурасы хәрәкәт белән F'' фигурасына әверелсен ди (184 нче рәсем). Беренче хәрәкәт вакытында F фигурасының X ноктасы F' фигурасының X' ноктасына, ә икенче хәрәкәт вакытында F' фигурасының X' ноктасы F'' фигурасының X'' ноктасына күчсен ди. Ул вакытта F фигурасын F'' фигурасына, ә F фигурасының ирекле X ноктасын F'' фигурасының X'' ноктасына күчерүче үзгәртү нокталар арасындагы ераклыкны саклый, димәк, шулай ук хәрәкәт була.

Хәрәкәтнең бу үзлеген түбәндәгечә әйтәләр: ***бер-бер артлы үтәлгән ике хәрәкәт яңадан хәрәкәт була.***

F фигурасын F' фигурасына үзгәртү F фигурасындагы төрле нокталарны F' фигурасындагы төрле нокталарга әверелдерсен ди (182 нче рәсемне кара). Бу үзгәртүдә F фигурасының ирекле X ноктасы F' фигурасының X' ноктасына күчсен. X' ноктасын

184 нче рәсем

X ноктасына күчерә торган F' фигурасын F фигурасына үзгәртү бирелгәнгә *кире* үзгәртү дип атала. Хәрәкәт нокталар арасындагы ераклыкны саклый, шуңа күрә төрле нокталарны төрле нокталарга әверелдерә.

Хәрәкәткә кире үзгәртү шулай ук хәрәкәт булуы үзеннәнүзе аңлашыла.

83. ХӘРӘКӘТНЕҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ

Теорема 9.1. ***Хәрәкәт вакытында туры өстендәге нокталар туры өстендәге нокталарга күчә, һәм аларның үзара торыш тәртибе саклана.***

Бу, әгәр туры өстендә яткан A, B, C нокталары A_1, B_1, C_1 нокталарына күчсәләр, ул вакытта A_1, B_1, C_1 нокталары шулай ук туры өстендә яталар; әгәр B ноктасы A һәм C нокталары арасында ятса, B_1 ноктасы A_1 һәм C_1 нокталары арасында ята, дигәнне аңлата.

Исбатлау. AC турысының B ноктасы A һәм C нокталары арасында ятсын. A_1, B_1, C_1 нокталарының бер туры өстендә ятуын исбат итик.

Әгәр A_1, B_1, C_1 нокталары туры өстендә ятмаса, алар өчпочмак түбәләре булып торалар. Шуңа күрә $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$. Хәрәкәтнең билгеләмәсе буенча моннан $AC < AB + BC$ килеп чыга. Кисемтәләрне үлчәү үзлеге буенча $AC = AB + BC$.

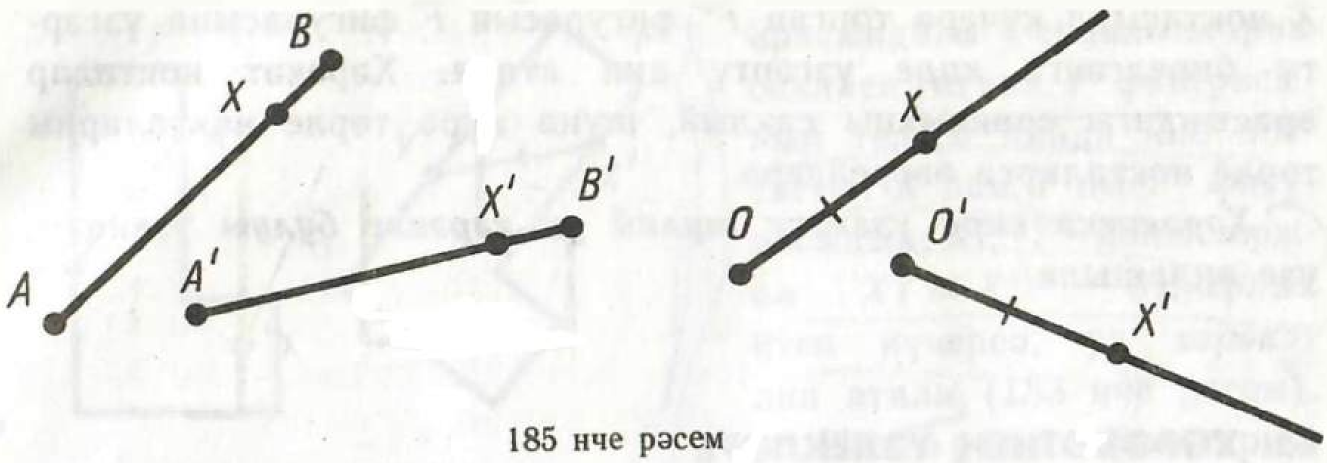
Без каршылыкка очрадык. Димәк, B_1 ноктасы A_1C_1 турысында ята. Теореманың беренче раславы исбатланды.

Хәзер B_1 ноктасының A_1 һәм C_1 нокталары арасында ятканын күрсәтербез. A_1 ноктасы B_1 һәм C_1 арасында ята дип фараз итик. Ул вакытта $A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1$, һәм, димәк, $AB + AC = BC$. Ләкин бу $AB + BC = AC$ тигезлегенә каршы килә. Шулай итеп, A_1 ноктасы B_1 һәм C_1 нокталары арасында ята алмый.

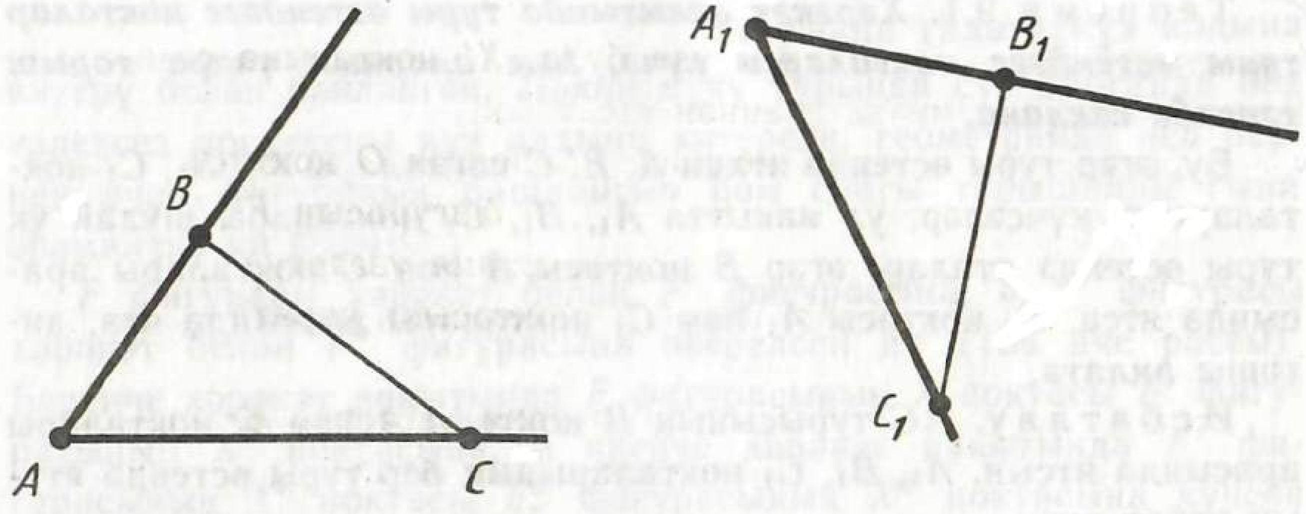
C_1 ноктасының A_1 һәм B_1 арасында ята алмавы да аналогик рәвештә исбатлана.

Бер туры өстендә яткан өч ноктаның: A_1, B_1, C_1 нең берсе калган икесе арасында ятканлыктан, андый нокта B_1 ноктасы гына була ала. Теорема тулысынча исбатланды.

9.1. теоремасыннан ***хәрәкәт вакытында турылар — турылар-***



185 нче рәсем



186 нчы рәсем

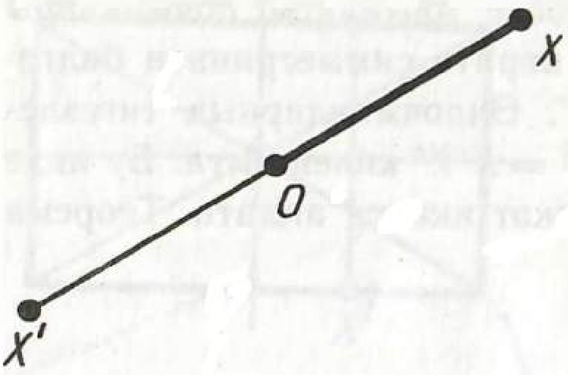
га, ярымтурылар — ярымтурыларга, кисемтәләр — кисемтәләргә күчә дигән нәтиҗә чыга (185 нче рәсем).

Хәрәкәт вакытында ярымтурылар арасындагы почмакларның саклануын исбатлыйк.

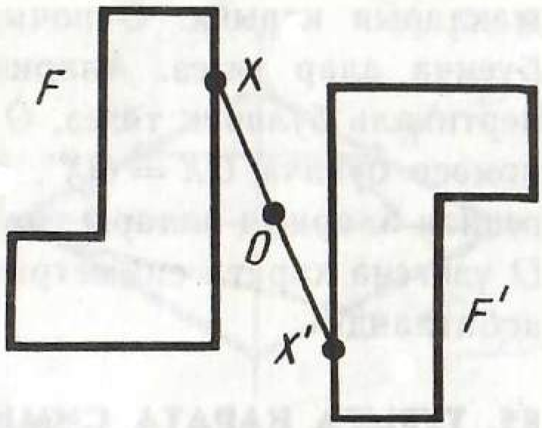
AB һәм AC — уртак A ноктасыннан чыгучы, ләкин бер туры өстендә ятмаган ике ярымтуры булсын (186 нчы рәсем). Хәрәкәт вакытында бу ярымтурылар ниндидер A_1B_1 һәм A_1C_1 ярымтурыларына күчәләр. Хәрәкәт ераклыкларны саклаганлыктан, ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары өченче билге буенча тигез. Өчпочмакларның тигезлегеннән BAC һәм $B_1A_1C_1$ почмакларының тигезлеге килеп чыга. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

84. НОКТАГА КАРАТА СИММЕТРИЯ

O — билгеләнгән нокта һәм X — яссылыктагы ирекле нокта булсын (187 нче рәсем). OX кисемтәсенең O дан дәвамында OX ка тигез итеп OX' кисемтәсе салыйк. X' ноктасы O ноктасына карата X ноктасына *симметрик* дип атала. O ноктасына



187 нче рәсем



188 нче рәсем

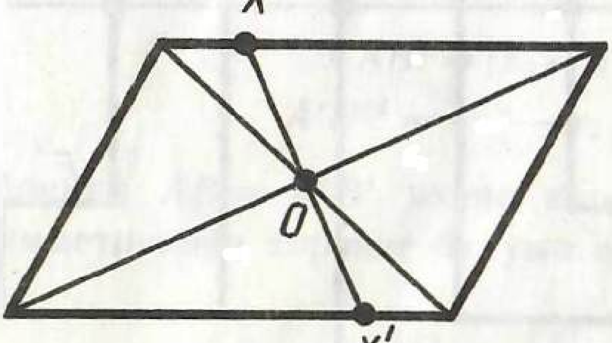
симметрик нокта O ноктасы үзе була. X' ноктасына симметрик нокта X ноктасы икәне үзеннән-үзе ачык.

F фигурасының һәр X ноктасын бирелгән O ноктасына карата симметрик X' ноктасына күчереп, F фигурасын F' фигурасына үзгәртү *O ноктасына карата симметрия үзгәртүе* дип атала. Бу вакытта F һәм F' фигуралары O ноктасына карата *симметрик* дип аталалар (188 нче рәсем).

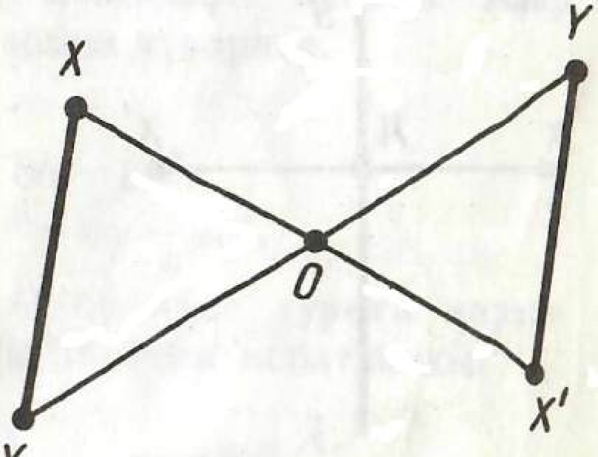
Әгәр O ноктасына карата симметрия үзгәртүе F фигурасын үзенә күчерсә, ул *үзәк симметрияле* дип атала, ә O ноктасын симметриянең үзәге дип атыйлар. Мәсәлән, параллелограмм үзәк симметрияле фигура булып тора. Диагональләренең кисешү ноктасы аның симметрия үзәге була (189 нчы рәсем).

Теорема 9.2. ***Ноктага карата симметрия үзгәртүе хәрәкәт булып тора.***

Исбатлау. X һәм Y F фигурасының ирекле ике ноктасы булсын (190 нчы рәсем). O үзәгенә карата симметрия үзгәртүе аларны X' һәм Y' нокталарына күчерә. XOY һәм $X'OY'$ өчпоч-



189 нчы рәсем



190 нчы рәсем

макларын карыйк. Өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесе буенча алар тигез. Аларның O түбәсе янындагы почмаклары вертикаль буларак тигез, O үзәгенә карата симметриянең билгеләмәсе буенча $OX = OX'$, $OY = OY'$. Өчпочмакларның тигезлегеннән аларның яклары тигезлеге $XY = X'Y'$ килеп чыга. Бу инде O үзәгенә карата симметриянең хәрәкәт икәнен аңлата. Теорема исбатланды.

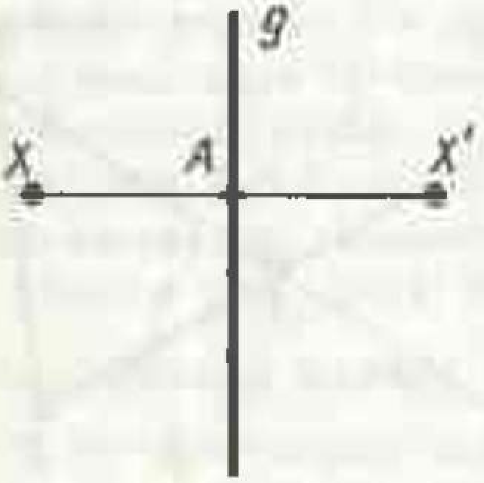
85. ТУРЫГА КАРАТА СИММЕТРИЯ

g — билгеләнгән туры булсын (191 нче рәсем). Ирекле X ноктасы алабыз да g турысына AX перпендикулярны төшерәбез. Бу перпендикулярның A дан соң дәвамында AX кисемтәсенә тигез AX' кисемтәсе салабыз. X' ноктасы *g турысына карата X ноктасына симметрик* дип атала. Әгәр X ноктасы g турысы өстендә ятса, аңа симметрик нокта X ноктасы үзе була. X ноктасының исә X' ноктасына симметрик нокта икәне күренеп тора.

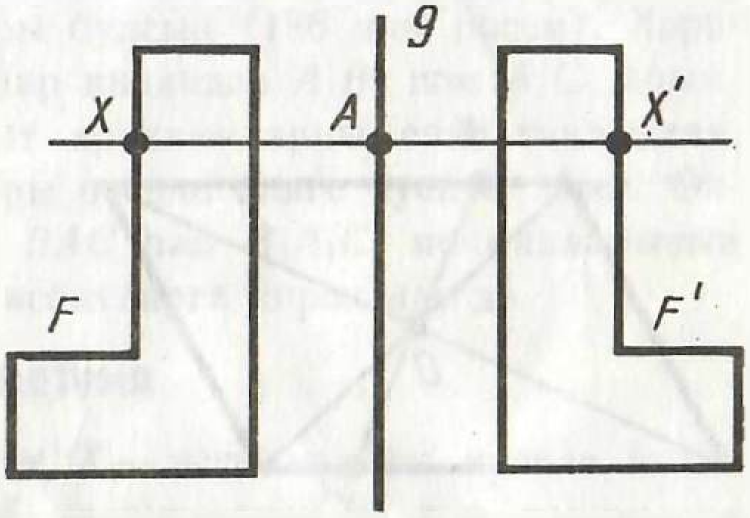
Әгәр F фигурасын F' фигурасына үзгәрткәндә F фигурасының һәр X ноктасы F' фигурасындагы бирелгән g турысына карата симметрик X' ноктасына күчсә, бу үзгәртү *g турысына карата симметрия үзгәртүе* дип атала. Бу вакытта F һәм F' фигуралары g турысына карата *симметрик* фигуралар дип атала (192 нче рәсем).

Әгәр g турысына карата симметрия үзгәртүе F фигурасын үзенә күчерсә, бу фигура *g турысына карата симметрик* дип атала, ә g турысы фигураның *симметрия күчәре* дип атала.

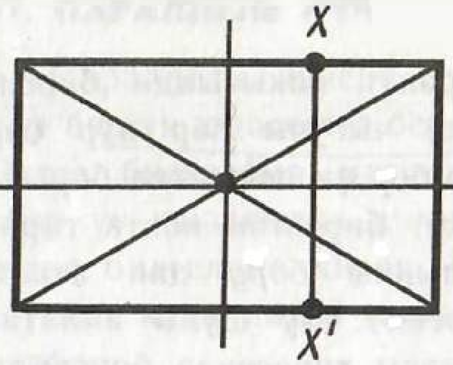
Мәсәлән, турыпочмаклыкның диагональләре кисешү ноктасы аша аның якларына параллель итеп үткәрелгән турылар туры-



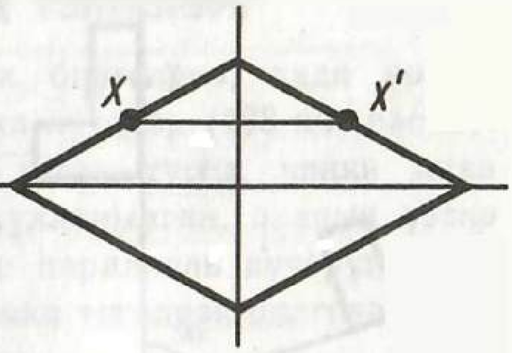
191 нче рәсем



192 нче рәсем



193 нче рәсем

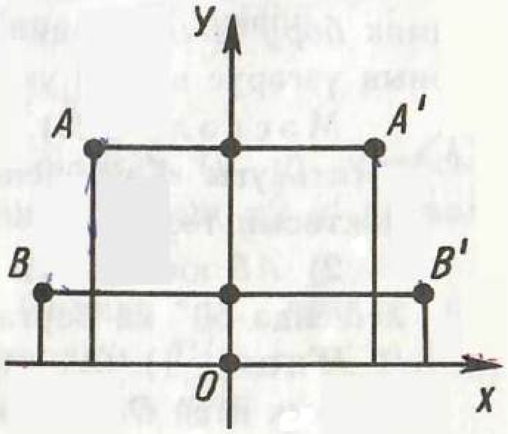


194 нче рәсем

почмаклыкның симметрия күчәрләре булып торалар (193 нче рәсем). Ромбның диагональләре яткан турылар аның симметрия күчәрләре булып торалар (194 нче рәсем).

Теорема 9.3. ***Турыга карата симметрия үзгәртүе хәрәкәт булып тора.***

Исбатлау. Бирелгән турыны Декарт координаталары системасында y күчәре итеп алабыз (195 нче рәсем). F фигурасының



195 нче рәсем

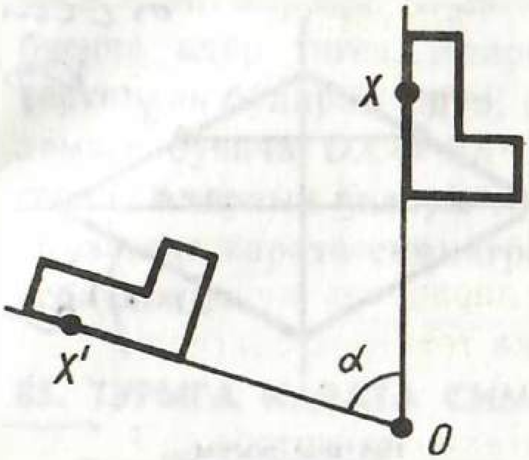
ирекле $A(x;\ y)$ ноктасы F' фигурасының $A'(x',\ y')$ ноктасына күчсен ди. Турыга карата симметриянең билгеләмәсеннән X һәм X' нокталарының ординаталары тигезлеге, ә абсциссаларының тик тамгалары белән генә аерылуы: $x' = -x$ килеп чыга.

Ирекле $A(x_1,\ y_1)$ һәм $B(x_2,\ y_2)$ нокталары алабыз. Алар $A'(-x_1,\ y_1)$ һәм $B'(-x_2,\ y_2)$ нокталарына күчәрләр.

Табабыз:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$A'B'^2 = -(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Моннан $AB = A'B'$ икәне күренә. Ә бу инде турыга карата симметриянең хәрәкәт булуын аңлата. Теорема исбатланды.



196 нчы рәсем

86. БОРУ

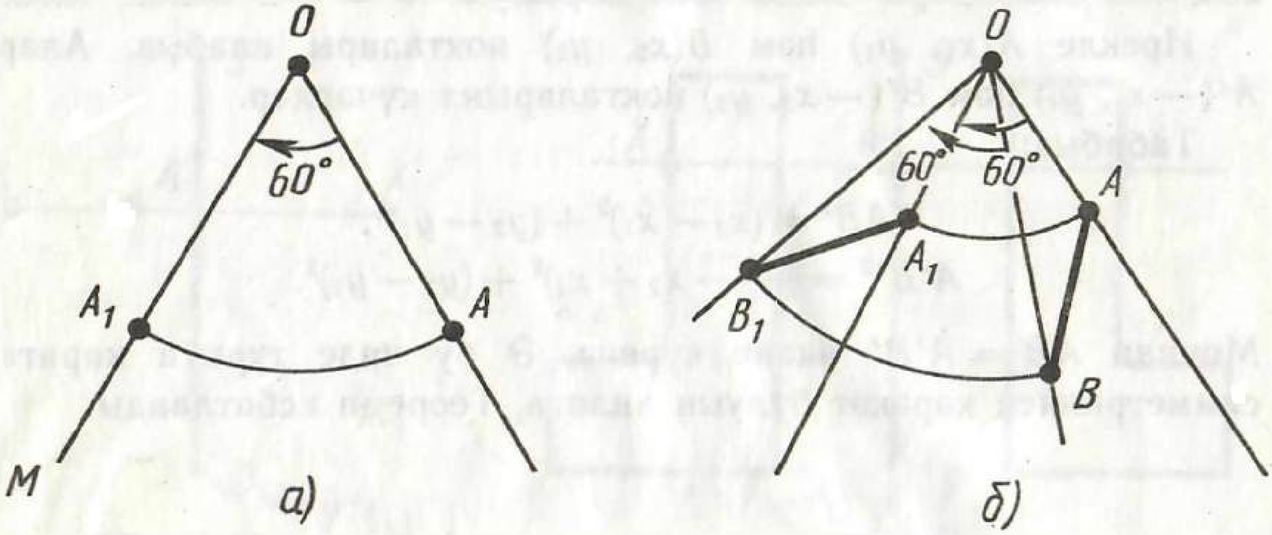
Әгәр хәрәкәт вакытында бирелгән ноктадан чыгучы һәр нур бер үк юнәлештә бер үк почмакка борылса, бу хәрәкәт бирелгән нокта тирәсендә яссылыкны *бору* дип атала (196 нче рәсем). Бу шуны аңлата. Әгәр O ноктасы тирәсендә борганда X ноктасы X' ка күчсә, X ноктасы нинди генә булмасын, OX һәм OX' нурлары бер үк почмак ясыйлар. Бу почмак *бору почмагы* дип атала. Яссылыкны борганда фигураларның үзгәрүе шулай ук *бору* дип атала.

Мәсьәлә (25). 1) A ноктасын O ноктасы тирәсендә сәгать угы юнәлешендә 60° ка борганда килеп чыккан A_1 ноктасын төзегез.

2) AB кисемтәсен O ноктасы тирәсендә сәгать угы юнәлешендә 60° ка борганда килеп чыккан кисемтәне төзегез.

Чишү. 1) OA нуры үткәрәбез һәм $\angle AOM = 60°$ булырлык итеп OM нурын төзибез (197 нче рәсем, *а*). OM нуры өстендә OA кисемтәсенә тигез булган OA_1 кисемтәсен салабыз. A_1 без эзләгән нокта була.

2) Бирелгән боруда AB кисемтәсенең очлары булган A һәм B нокталары күчкән A_1 һәм B_1 нокталарын төзибез. Бору вакытында кисемтә кисемтәгә күчкәнлектән, A_1B_1 кисемтәсе эзләнелгән фигура була.



197 нче рәсем

87. ПАРАЛЛЕЛЬ КҮЧЕРҮ ҺӘМ АНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ

Параллель күчерү үзгәртү кебек билгеләнә, анда нокталар бер үк юнәлештә бер үк ераклыкка күчәләр (198 нче рәсем). Әлеге билгеләмә математик яктан төгәл түгел, чөнки анда «бер үк юнәлештә» дигән аңлатма кулланылган, ә аның үзенә төгәл билгеләмә кирәк. Шул сәбәпле параллель күчерүгә күрсәтмәле күзаллауга җавап биргән башка төгәлрәк билгеләмә бирербез.

Яссылыкта Декарт x, y координаталары кертәбез. F фигурасының ирекле (x, y) ноктасын, a һәм b даими саннар булганда, $(x+a,\ y+b)$ ноктасына күчерүче үзгәртү *параллель күчерү* дип атала (199 нчы рәсем). Параллель күчерү

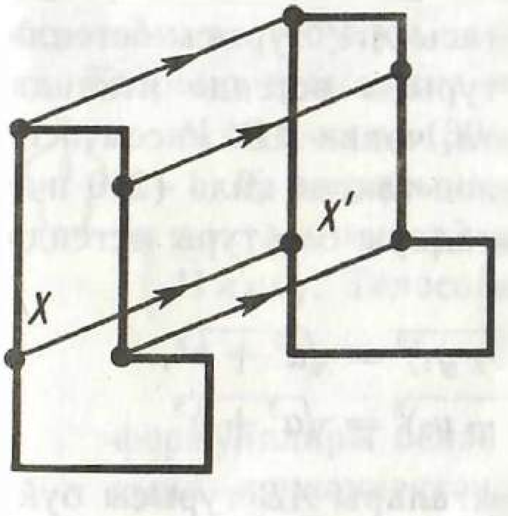
$$x' = x + a,\ y' = y + b \qquad (*)$$

формулалары белән бирелә. Бу формулалар (x, y) ноктасын параллель күчерү вакытында табылган ноктаның x', y' координаталарын күрсәтәләр.

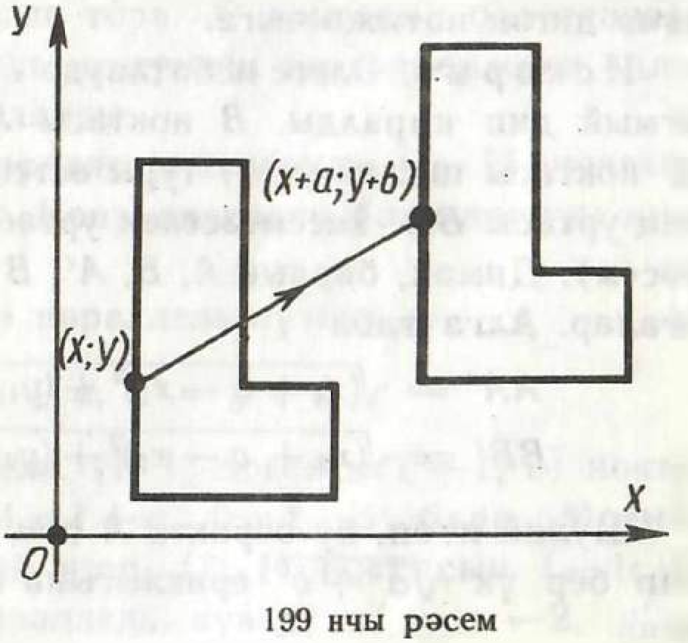
Параллель күчерү хәрәкәт ул. Чыннан да, ирекле ике нокта: $A(x_1;\ y_1)$ һәм $B(x_2;\ y_2)$ нокталары $A'(x_1+a;\ y_1+b)$, $B'(x_2+a;\ y_2+b)$ нокталарына күчәләр. Шуңа күрә

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$A'B'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

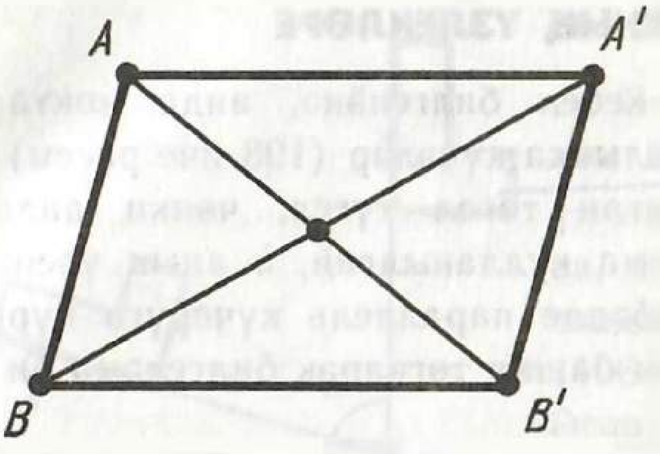
Моннан $AB = A'B'$. Шулай итеп, үзгәртү ераклыкларны саклый, димәк, хәрәкәт булып тора, шуны исбатларга кирәк иде дә.



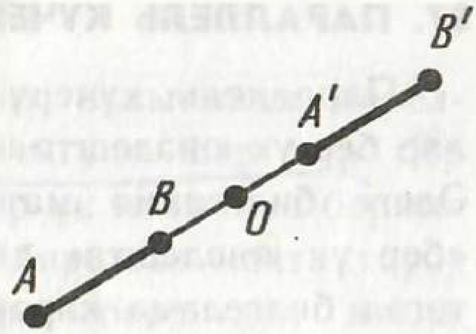
198 нче рәсем



199 нчы рәсем



200 нче рәсем



201 нче рәсем

«Параллель күчерү» дип атау ***параллель күчерү вакытында нокталарның параллель (яки тәңгәл килүче) турылар буйлап бер үк ераклыкка күчүе*** белән аклана.

Чыннан да, $A(x_1;\ y_1)$ һәм $B(x_2;\ y_2)$ нокталары $A'(x_1+a;\ y_1+b)$ һәм $B'(x_2+a;\ y_2+b)$ нокталарына күчсен, ди (200 нче рәсем). AB' кисемтәсе уртасының координаталары

$$x=\frac{x_1+x_2+a}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2+b}{2}$$

була. $A'B$ кисемтәсе уртасының координаталары да шулар ук. Моннан $AA'B'B$ дүртпочмагының диагональләре кисешә һәм кисешү ноктасында урталай бүленә дигән нәтиҗә чыга. Димәк, бу дүртпочмак — параллелограмм. Ә параллелограммның каршы яткан AA' һәм BB' яклары параллель һәм тигез була.

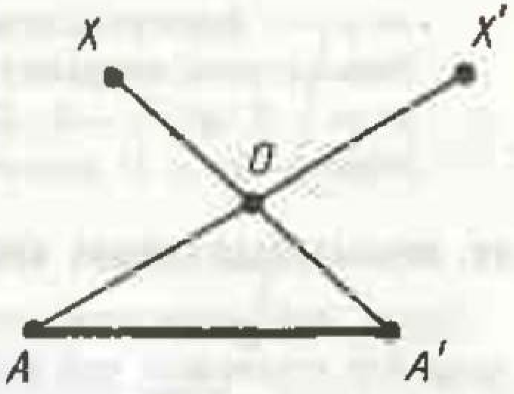
$AA'B'B$ параллелограммының каршы яткан калган икесенең: AB һәм $A'B'$ якларының да параллель булуын искәртик. Моннан ***параллель күчерү вакытында туры параллель турыга (яки үзенә) күчә*** дигән нәтиҗә чыга.

Искәрмә. Әлеге исбатлауда B ноктасы AA' турысы өстендә ятмый дип каралды. B ноктасы AA' турысы өстендә ятканда B' ноктасы шулай ук бу туры өстендә ята, чөнки AB' кисемтәсенең уртасы BA' кисемтәсенең уртасы белән тәңгәл килә (210 нче рәсем). Димәк, барлык A, B, A', B' нокталары бер туры өстендә яталар. Алга таба

$$AA'=\sqrt{(x_1+a-x_1)^2+(y_1+b-y_1)^2}=\sqrt{a^2+b^2},$$
$$BB'=\sqrt{(x_2+a-x_2)^2+(y_2+b-y_2)^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Шулай итеп, бу очракта A һәм B нокталары AB турысы буйлап бер үк $\sqrt{a^2+b^2}$ ераклыгына күчәләр, ә AB турысы үзенә күчә.

88. ПАРАЛЛЕЛЬ КҮЧЕРҮНЕҢ БАРЛЫГЫ ҺӘМ АНЫҢ БЕРДӘНБЕРЛЕГЕ



202 нче рәсем

Теорема 9.4. ***Ике нокта: A һәм A′ нинди генә булмасын, A ны A′ ноктасына күчерүче параллель күчерү бар һәм бары тик бер генә.***

Исбатлау. Башлап A ноктасын A' ноктасына күчерүче параллель күчерүнең барлыгын исбатлыйбыз. Яссылыкта Декарт координаталары кертәбез. a_1, a_2 A ноктасының координаталары һәм a_1', a_2' A' ноктасының координаталары булсын.

$$x' = x + a_1' - a_1, \quad y' = y + a_2' - a_2$$

формулалары белән бирелгән параллель күчерү A ноктасын A' ноктасына күчерә. Чыннан да, $x = a_1$ һәм $y = a_2$ булганда, табабыз: $x' = a_1'$, $y' = a_2'$.

A ноктасын A' ноктасына күчерүче параллель күчерүнең бердәнберлеген исбатлыйбыз. X фигураның ирекле ноктасы һәм X' — параллель күчерүдә X ноктасы күчә торган нокта булсын (202 нче рәсем). Белгәнебезчә, XA' һәм AX' кисемтәләренең уртасы O уртак. X ноктасын бирү O ноктасын — $A'X$ кисемтәсенең уртасын — беркыйммәтле итеп билгели. A һәм O нокталары исә X' ноктасын беркыйммәтле итеп билгели, чөнки O ноктасы AX' кисемтәсенең уртасы булып тора. X' ноктасын билгеләүнең беркыйммәтле булуы параллель күчерүнең бердәнберлеген аңлата. Теорема тулысынча исбатланды.

Мәсьәлә (30). Параллель күчерүдә (1, 1) ноктасы (−1, 0) ноктасына күчә. Координаталар башлангычы нинди ноктага күчәр?

Чишү. Теләсә нинди параллель күчерү

$$x' = x + a, \quad y' = y + b$$

формулалары белән бирелә. (1; 1) ноктасы (−1; 0) ноктасына күчкәнлектән, $-1 = 1 + a$, $0 = 1 + b$ була. Моннан $a = -2$, $b = -1$. Шулай итеп, (1; 1) ноктасын (−1; 0) ноктасына күчерүче параллель күчерү $x' = x - 2$, $y' =$

$= y - 1$ формулалары белән бирелә. Бу формулага исәп башлангычы координаталарын ($x = 0$, $y = 0$) куеп, табабыз: $x' = -2$, $y' = -1$. Шулай итеп, координаталар башлангычы $(-2; -1)$ ноктасына күчә.

89. ЯРЫМТУРЫЛАРНЫҢ БЕРДӘЙ ЮНӘЛЕШЛЕЛЕГЕ

Әгәр ике ярымтуры параллель күчерүдә тәңгәл килсәләр, алар *бер юнәлешле* яки *бердәй юнәлешле* дип аталалар, ягъни бер ярымтурыны икенчесенә әверелдерүче параллель күчерү бар.

Әгәр a һәм b ярымтурылары бер юнәлешле, шулай ук b һәм c ярымтурылары бер юнәлешле булсалар, a һәм c ярымтурылары да бер юнәлешле булалар (203 нче рәсем).

Чыннан да,

$$x' = x + m, \ y' = y + n \qquad (*)$$

формулалары белән бирелә торган параллель күчерү a ярымтурысын b ярымтурысына әверелдерә, ә

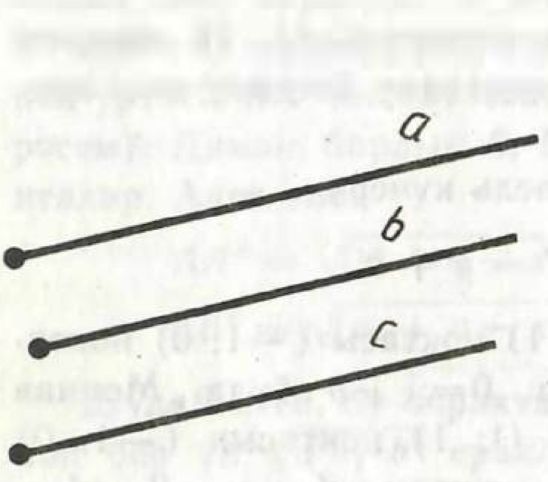
$$x'' = x' + m_1, \ y'' = y' + n_1 \qquad (**)$$

формулалары белән бирелгән параллель күчерү b ярымтурысын c ярымтурысына күчерә ди.

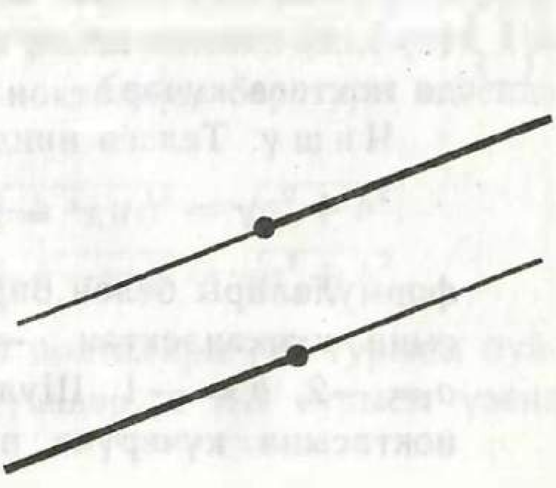
$$x'' = x + m + m_1, \ y'' = y + n + n_1 \qquad (***)$$

формулалары белән бирелгән параллель күчерүне карыйк. Бу параллель күчерү a ярымтурысын c ярымтурысына күчерә дип раслыйбыз. Моны исбатлыйк.

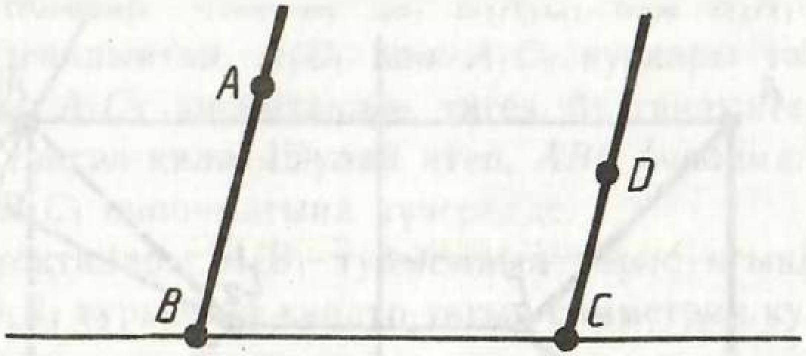
$(x; y)$ — a ярымтурысының ирекле ноктасы булсын. (*) формуласы буенча $(x + m; y + n)$ ноктасы b ярымтурысыныкы.



203 нче рәсем



204 нче рәсем



205 нче рәсем

$(x+m;\ \ y+n)$ ноктасы b ярымтурысыныкы булганлыктан, (**) формуласы буенча $(x+m+m_1;\ y+n+n_1)$ ноктасы c ярымтурысыныкы була. Шулай итеп, (***) формулалар белән бирелә торган параллель күчерү a ярымтурысын c ярымтурысына әверелдерә икән. Ә бу a һәм c ярымтурыларының бердәй юнәлешле икәнен аңлата. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Ике ярымтурының һәркайсы икенчесенең өстәмә ярымтурысы белән бер юнәлешле булса, бу ярымтурылар *капма-каршы юнәлешле* дип аталалар (204 нче рәсем).

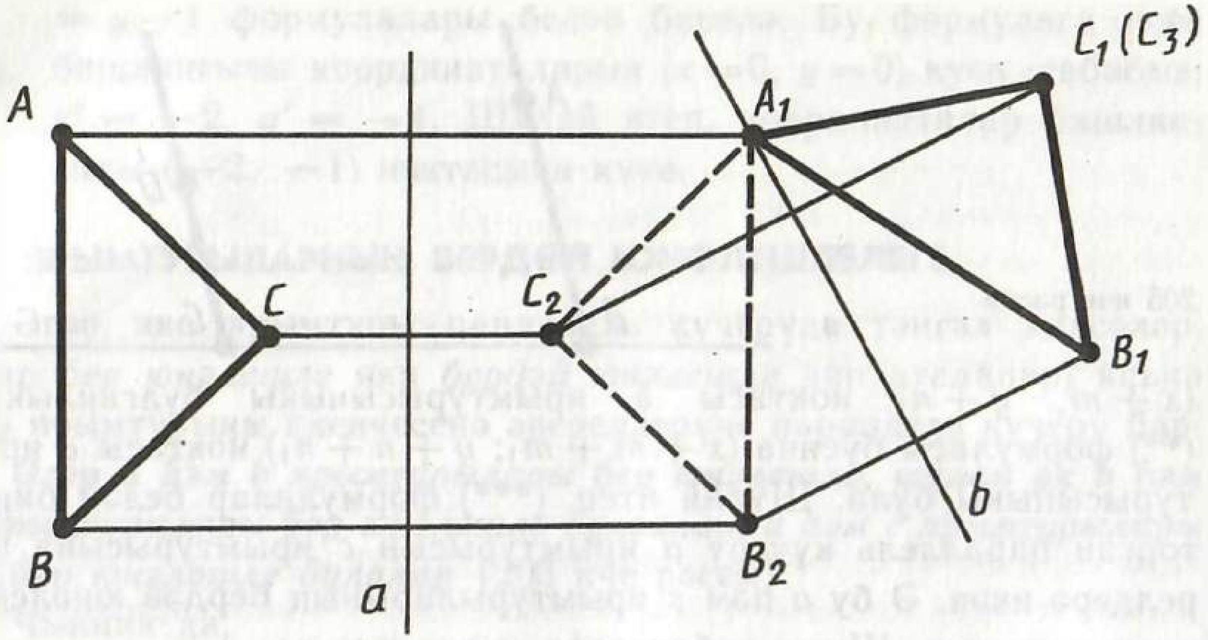
Мәсьәлә (32). AB һәм CD турылары параллель. A һәм D ноктлары BC кисүчесеннән бер якта яталар. BA һәм CD нурларының бер юнәлешле икәнен исбатлагыз.

Чишү. C ноктасы B ноктасына күчәрлек итеп CD нурын параллель күчерәбез (205 нче рәсем). Бу вакытта CD турысы BA турысы белән тәңгәл килер. D ноктасы CB турысына параллель туры буйлап шуып BC турысына карата шул ук D ноктасы яткан ярымъяссылыкта калыр. Шуңа күрә CD нуры BA нуры белән тәңгәл киләләр, һәм, димәк, бу нурлар бер төрле юнәлгәннәр.

90. ФИГУРАЛАРНЫҢ ТИГЕЗЛЕГЕ

Әгәр хәрәкәт белән ике фигураның берсе икенчесенә күчерелсә, алар *тигез* дип атала.

Фигураларның тигезлекләрен тамгалау өчен гадәти тигезлек тамгасы файдаланыла. $F=F'$ язмасы F фигурасының F' фигурасына тигезлеген аңлата. Өчпочмаклар тигезлеге: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ язмасында хәрәкәт вакытында тәңгәл килә торган түбәләре тиңдәшле урыннарда торалар дип карала. Мондый шартта ***өчпочмакларны хәрәкәт ярдәмендә тәңгәл китерү аша билгеләнгән өчпочмакларның тигезлеге, һәм без аны моңа кадәр белгән тигезлек бер үк нәрсәне аңлата.***



206 нчы рәсем

Бу, әгәр ике өчпочмакның тиңдәш яклары тигез һәм тиңдәш почмаклары тигез булса, әлеге өчпочмаклар хәрәкәт ярдәмендә тәңгәл киләләр, дигән сүз. Һәм киресе: әгәр ике өчпочмак хәрәкәт ярдәмендә тәңгәл килсәләр, аларның тиңдәш яклары тигез һәм тиңдәш почмаклары тигез. Бу раслауларның икесен дә исбатлыйбыз.

ABC өчпочмагы хәрәкәт ярдәмендә $A_1B_1C_1$ өчпочмагы белән тәңгәл килсен ди, анда A түбәсе A_1 түбәсенә, $B - B_1$ гә һәм C түбәсе C_1 гә күчсен. Хәрәкәт вакытында ераклыклар һәм почмаклар сакланганлыктан, безнең өчпочмаклар өчен $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Хәзер ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ булсын. Аларның хәрәкәт ярдәмендә тәңгәл килүен, шуның белән бергә A түбәсенең A_1 түбәсенә, B ның — B_1 гә һәм C ның C_1 гә күчүен исбатлыйк. ABC өчпочмагын AA_1 кисемтәсенә перпендикуляр һәм аның уртасы аша үтүче a турысына карата симметриядә үзгәртәбез (206 нчы рәсем). $A_1B_2C_2$ өчпочмагы табабыз. Әгәр B_1 һәм B_2 нокталары төрле булса, әлеге өчпочмакны A_1 ноктасы аша үтүче һәм B_1B_2 турысына перпендикуляр булган b турысына карата симметриядә үзгәртәбез. $A_1B_1C_3$ өчпочмагын табабыз.

Әгәр C_1 һәм C_3 нокталары A_1B_1 турысының бер ягында ят-

салар, алар тәңгәл киләләр. Чыннан да, $B_1A_1C_1$ һәм $B_1A_1C_3$ почмаклары тигез булганлыктан, A_1C_1 һәм A_1C_3 нурлары тәңгәл килә, ә A_1C_1 һәм A_1C_3 кисемтәләре тигез булганлыктан, C_1 һәм C_3 нокталары тәңгәл килә. Шулай итеп, ABC өчпочмагы хәрәкәт ярдәмендә $A_1B_1C_1$ өчпочмагына күчерелде.

Әгәр C_1 һәм C_3 нокталары A_1B_1 турысының төрле ягында ятсалар, ул вакытта A_1B_1 турысына карата тагын симметрия кулланырга кирәк.

? КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Фигураны ничек үзгәртү хәрәкәт дип атала?
2. Хәрәкәт вакытында туры өстендә яткан нокталарның туры өстендә ятучы нокталарга күчүен, һәм аларның үзара торышының тәртибе сакланганын исбатлагыз.
3. Хәрәкәт вакытында турылар, ярымтурылар, кисемтәләр нәрсәгә күчәләр?
4. Хәрәкәт вакытында почмакларның саклануын исбатлагыз.
5. Нинди нокталар бирелгән ноктага карата симметрик нокталар дип атала, аңлатыгыз.
6. Нинди үзгәртү бирелгән ноктага карата симметрия дип атала?
7. Нинди фигура үзәк-симметрияле фигура дип атала?
8. Фигураның симметрия үзәге нәрсә ул? Үзәк-симметрияле фигурага мисал китерегез.
9. Ноктага карата симметриянең хәрәкәт икәнен исбатлагыз.
10. Нинди нокталар бирелгән турыга карата симметрик дип атала?
11. Нинди үзгәртү турыга карата симметрия дип атала?
12. Нинди фигура бирелгән турыга карата симметрик фигура дип атала?
13. Фигураның симметрия күчәре нәрсә ул? Мисал китерегез.
14. Турыга карата симметриянең хәрәкәт икәнен исбатлагыз.
15. Бору дип нинди хәрәкәт атала?
16. Нәрсә ул параллель күчерү?
17. Сез параллель күчерүнең нинди үзлекләрен беләсез?
18. Бирелгән ноктаны икенче бирелгән ноктага әверелдерүче параллель күчерү барлыгын һәм бердәнберлеген исбатлагыз.
19. Нинди ярымтурылар бер юнәлешле дип атала?
20. a һәм b ярымтурылары бер юнәлешле, шулай ук b һәм c ярымтурылары бер юнәлешле булсалар, a һәм c ярым-

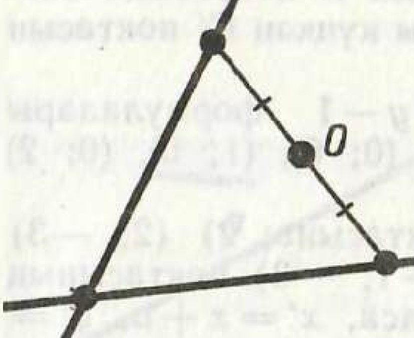
турыларының да бер юнәлешле икәнен исбатлагыз.

21. Нинди ярымтурылар капма-каршы юнәлешле дип аталалар?

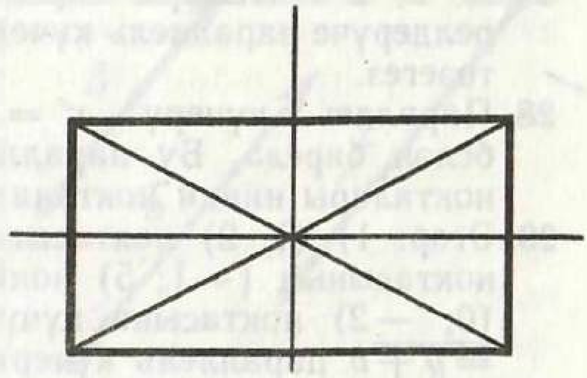
22. Нинди фигуралар тигез дип аталалар?

Мәсьәләләр

1. Хәрәкәт вакытында параллелограммның параллелограммга күчүен исбатлагыз.
2. Хәрәкәт вакытында квадрат нинди фигурага күчә? Җавапны аңлатыгыз.
3. A һәм B ноктлары бирелгән. A ноктасына карата B ноктасына симметрик B' ноктасын төзегез.
4. Алдагы мәсьәләне циркуль белән генә файдаланып чишегез.
5. Әйләнәнең үзәге аның симметрия үзәге икәнен исбатлагыз.
6. Ниндидер ноктага карата симметриядә X ноктасы X' ноктасына күчә. Бу симметриядә Y ноктасы күчкән ноктаны төзегез.
7. Өчпочмакның симметрия үзәге булырга мөмкинме?
8. Параллелограмм диагональләренең кисешү ноктасы аның симметрия үзәге булып торганын исбатлагыз.
9. Симметрия үзәге булган дүртпочмакның параллелограмм икәнен исбатлагыз.
10*. Кисешүче ике туры һәм бу турыларда ятмаган нокта бирелгән. Очлары бу турыларда һәм уртасы бирелгән ноктада булган кисемтә төзегез (207 нче рәсем).
11. Бирелгән ноктага карата симметриядә: 1) кисемтәгә; 2) почмакка; 3) өчпочмакка симметрик фигура нәрсә була?
12. A, B, C ноктлары бирелгән. AB турысына карата C ноктасына симметрик C' ноктасын төзегез.
13. 12 нче мәсьәләне циркуль белән генә файдаланып чишегез.
14. 1) x күчәренә, 2) y күчәренә, 3) координаталар башлангычына карата $(-3;\ 4)$ ноктасына симметрик булган ноктаның координаталары күпмегә тигез?
15. Ниндидер турыга карата симметриядә X ноктасы X' ноктасына күчә. Бу симметриядә Y ноктасы күчкән ноктаны төзегез.
16. Почмакның биссектрисасын эченә алган туры аның симметрия күчәре булып торганын исбатлагыз.
17. Тигезьянлы өчпочмакның нигезенә үткәрелгән медианасын эченә алган туры ул өчпочмакның симметрия күчәре дә икәнен исбатлагыз.
18. Әгәр өчпочмакның симметрия күчәре булса, 1) ул күчәр түбәләрнең берсе аша үткәнен, 2) өчпочмакның тигезьянлы икәнен исбатлагыз.
19. Тигезьяклы өчпочмакның симметрия күчәре ничә?
20. Турыпочмаклыкның диагональләре кисешү ноктасы аша аның



207 нче рәсем



208 нче рәсем

якларына параллель итеп үткәрелгән турылар аның симметрия күчәрләре икәнен исбатлагыз (208 нче рәсем).

21. Ромбның диагональләре аның симметрия күчәрләре икәнен исбатлагыз.

22. Квадратның диагональләре кисешү ноктасы аша якларына параллель итеп үткәрелгән турылар квадратның симметрия күчәрләре булып торуын исбатлагыз (209 нчы рәсем).

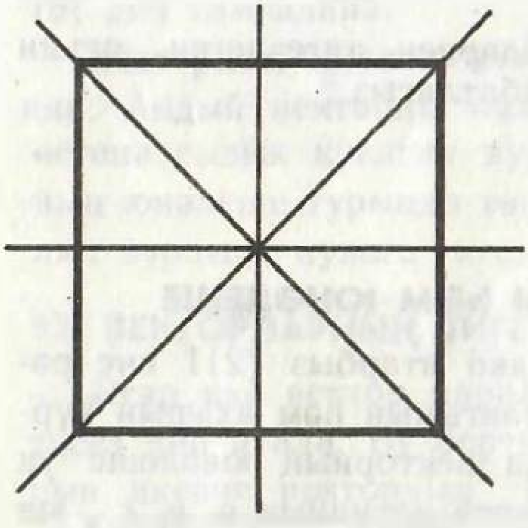
23. Әйләнәнең үзәге аша үтүче туры аның симметрия күчәре икәнен исбатлагыз.

24*. Парлап кисешүче өч туры: *a*, *b*, *c* бирелгән. *b* турысына перпендикуляр, уртасы *b* турысында һәм очлары *a* һәм *c* турыларында булган кисемтәне ничек төзергә (210 нчы рәсем)? Мәсьәләнең һәрвакыт чишелеше буламы?

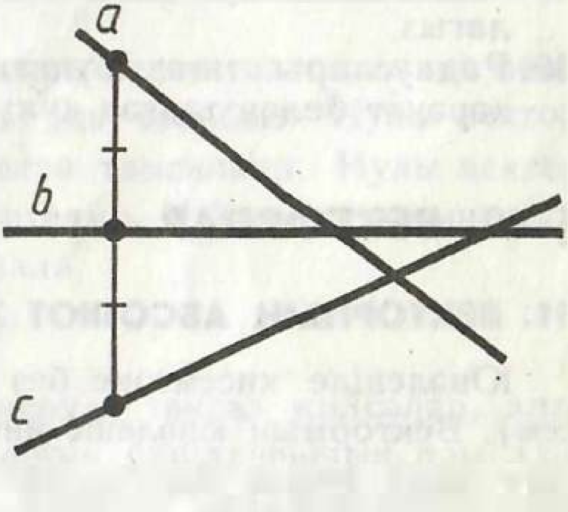
25. 1) A ноктасын O ноктасы тирәсендә сәгать угы юнәлешендә 60° ка борганда килеп чыккан A_1 ноктасын төзегез.

2) AB кисемтәсен O ноктасы тирәсендә сәгать угы юнәлешендә 60° ка борганда килеп чыккан фигураны төзегез.

26. ABC өчпочмагын C түбәсе тирәсендә 60° ка борганда килеп чыккан фигураны төзегез.



209 нчы рәсем



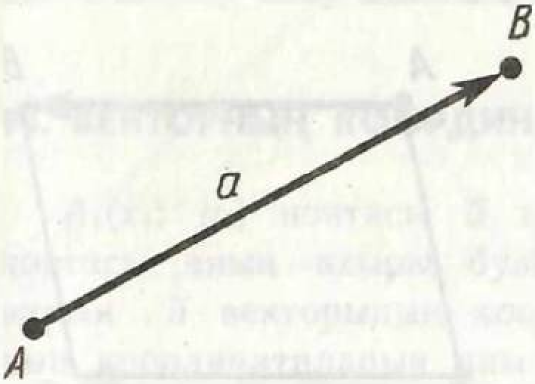
210 нчы рәсем

27. A, B, C нокталары бирелгән. A ноктасын B ноктасына әверелдерүче параллель күчерүдә C ноктасы күчкән C' ноктасын төзегез.
28. Параллеь күчерү $x' = x + 1$, $y' = y - 1$ формулалары белән бирелә. Бу параллель күчерүдә (0; 0), (1; 0), (0; 2) нокталары нинди нокталарга күчә?
29. Әгәр: 1) (1, 2) ноктасының (3; 4) ноктасына; 2) (2; —3) ноктасының (—1; 5) ноктасына; 3) (—1; —3) ноктасының (0; —2) ноктасына күчүе билгеле булса, $x' = x + a$, $y' = y + b$ параллель күчерү формулаларындагы a һәм b зурлыкларын табыгыз.
30. Параллель күчерүдә (1; 1) ноктасы (—1; 0) ноктасына күчә. Координаталар башлангычы нинди ноктага күчәр?
31. 1) (1; 2) ноктасын (3; 4) ноктасына, ә (0; 1) ноктасын (—1; 0) ноктасына; 2) (2; —1) ноктасын (1; 0) ноктасына, (—1; 3) ноктасын (0; 4) ноктасына күчергән параллель күчерү бармы?
32. AB һәм CD турылары параллель. A һәм D нокталары BC кисүчесеннән бер якта яталар. BA һәм CD нурларының бер юнәлешле икәнен исбатлагыз.
33. Әгәр 32 нче мәсьәләдә A һәм D нокталары BC кисүчесеннән төрле якта ятсалар, BA һәм CD нурларының капма-каршы юнәлешле булуларын исбатлагыз.
34. $ABCD$ дүртпочмагы — параллелограмм. AB, BA, BC, CB, CD, DC, AD, DA нурлары арасында бер юнәлешле һәм капма-каршы юнәлешле парларны атагыз.
35. Тигез озынлыктагы кисемтәләр һәм градуслы үлчәмнәре тигез булган почмакларның хәрәкәт белән тәңгәл килүләрен исбатлагыз.
36*. $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ параллелограммнарында $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$ һәм $\angle A = \angle A_1$. Параллелограммнарның тигезлеген, ягъни хәрәкәт белән тәңгәл килүләрен исбатлагыз.
37*. Диагональләре тигез булган ромбларның тигезлеген исбатлагыз.
38. Радиуслары тигез булган әйләнәләрнең тигезлеген, ягъни хәрәкәт белән тәңгәл килүләрен исбатлагыз.

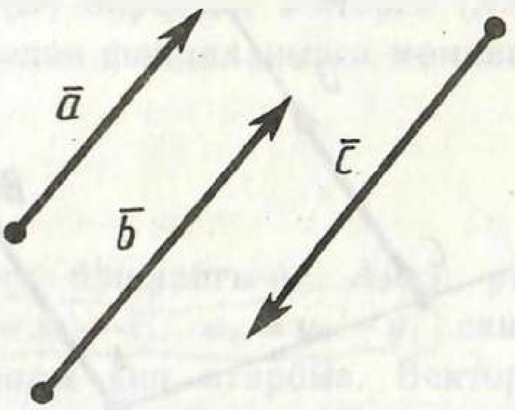
§ 10. ВЕКТОРЛАР

91. ВЕКТОРНЫҢ АБСОЛЮТ ЗУРЛЫГЫ ҺӘМ ЮНӘЛЕШЕ

Юнәлешле кисемтәне без вектор дип атарбыз (211 нче рәсем). Векторның юнәлеше аның башлангычын һәм ахырын күрсәтү юлы белән билгеләнә. Сызымда векторның юнәлеше ук белән күрсәтелә. Векторны тамгалау өчен латинның a, b, c... юл



211 нче рәсем



212 нче рәсем

хәрефләре белән файдаланырбыз. Векторны шулай ук аның башлангычын һәм ахырын күрсәтү юлы белән дә тамгалап була. Бу вакытта векторның башлангычы беренче урынга куела. «Вектор» сүзе урынына векторның хәрефле тамгаланышы өстенә кайвакытта ук яки сызык куела. 211 нче рәсемдәге векторны

$$\overline{a},\ \vec{a} \text{ яки } \overline{AB},\ \overrightarrow{AB}$$

дип тамгаларга мөмкин.

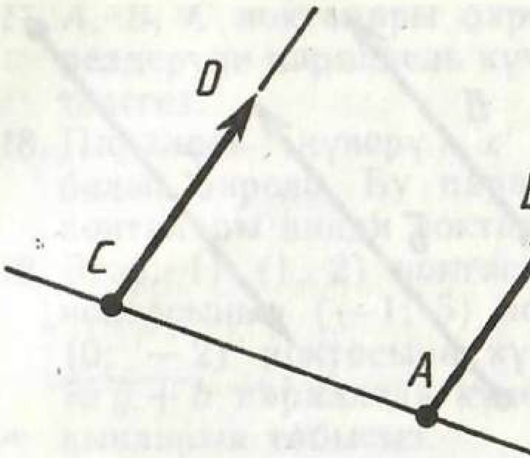
AB һәм CD ярымтурылары бердәй юнәлгән булсалар, $\overline{AB}$ һәм $\overline{CD}$ векторлары *бердәй юнәлешле,* һәм әгәр бу ярымтурылар капма-каршы юнәлгән булсалар, $\overline{AB}$ һәм $\overline{CD}$ векторлары *капма-каршы юнәлешле* дип атала. 212 нче рәсемдәге $\overline{a}$ һәм b векторлары бердәй юнәлешле, $\overline{a}$ һәм $\overline{c}$ векторлары исә капма-каршы юнәлешле.

Векторны сурәтләүче кисемтәнең озынлыгы аның *абсолют зурлыгы (модуле)* дип атала. $\overline{a}$ векторының абсолют зурлыгы $|\overline{a}|$ дип тамгалана.

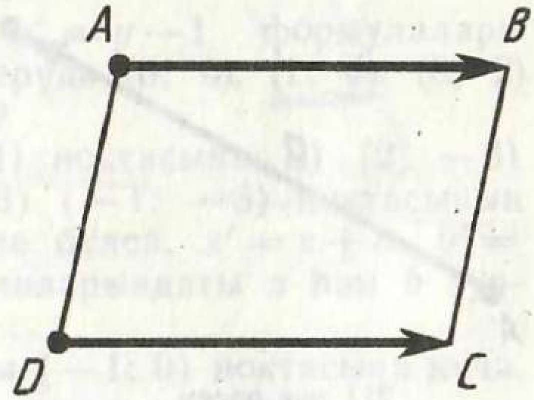
Векторның башлангычы аның ахыры белән тәңгәл килүе мөмкин. Андый векторны *нуль вектор* дип атарбыз. Нуль вектор өстенә сызык куелган нуль ($\overline{0}$) белән тамгалана. Нуль векторның юнәлеше турында төшенчә кертелми. Нуль векторның абсолют зурлыгы нульгә тигез дип санала.

92. ВЕКТОРЛАРНЫҢ ТИГЕЗЛЕГЕ

Әгәр ике вектор параллель күчерүдә тәңгәл килсәләр, алар *тигез* дип атала. Бу беренче векторның башлангычын һәм ахырын икенче векторның тиңдәшле рәвештә башлангычына һәм ахырына күчерүче параллель күчерү бар дигәнне аңлата. Моннан ***тигез векторларның юнәлешләре бердәй һәм абсолют зурлыклары тигез*** дигән нәтиҗә килеп чыга.



213 нче рәсем



214 нче рәсем

Киресенчә, ***әгәр векторлар бердәй юнәлешле һәм абсолют зурлыклары буенча тигез икән, алар тигез була.***

Чыннан да, $\overline{AB}$ һәм $\overline{CD}$ — абсолют зурлыклары буенча тигез булган бердәй юнәлешле векторлар булсын, ди (213 нче рәсем). C ноктасын A ноктасына күчерүче параллель күчерү CD ярымтурысын AB ярымтурысы белән тәңгәл итә, чөнки алар бердәй юнәлешле. Ә AB һәм CD кисемтәләре тигез булганлыктан, D ноктасы B ноктасы белән тәңгәл кылә, ягъни параллель күчерү $\overline{CD}$ векторын $\overline{AB}$ векторына күчерә. Димәк, $\overline{AB}$ һәм $\overline{CD}$ векторлары тигез, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Мәсьәлә ((2). $ABCD$ — параллелограмм. $\overline{AB}$ һәм $\overline{DC}$ векторларының тигез икәнлеген исбатлагыз.

Чишү. A ноктасы D ноктасына күчәрлек итеп, AB векторын параллель күчерәбез (214 нче рәсем). Бу күчерүдә A ноктасы AD турысы буйлап шуа, димәк, B ноктасы BC параллель турысы буйлап шуар. AB турысы параллель турыга, димәк, DC турысына күчәр. Нәтиҗәдә B ноктасы C ноктасына күчәр. Шулай итеп, безнең параллель күчерүебез $\overline{AB}$ векторын $\overline{DC}$ векторына күчерә, димәк, бу векторлар тигез.

$\bar{a}$ — вектор һәм A — ирекле нокта булсын. Ул вакытта A ноктасыннан $\bar{a}$ векторына тигез булган бер һәм бары тик бер генә $\bar{a}'$ векторын салып була.

Чыннан да, $\bar{a}$ векторының башлангычын A ноктасына күчерә торган бердәнбер параллель күчерү бар. Бу вакытта $\bar{a}$ векторы күчкән вектор $\bar{a}'$ векторы була да инде.

Практикада бирелгән ноктадан (D) бирелгән векторга ($\overline{AB}$) тигез вектор салу өчен 2 нче мәсьәләдән файдаланырга мөмкин.

93. ВЕКТОРНЫҢ КООРДИНАТАЛАРЫ

$A_1(x_1;\ y_1)$ ноктасы $\overline{a}$ векторының башлангычы, $A_2(x_2;\ y_2)$ ноктасы аның ахыры булсын. $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$ саннарын $\overline{a}$ векторының *координаталары* дип атарбыз. Векторның координаталарын аның хәрефле тамгаланышы белән рәттән куярбыз, бу очракта, $\overline{a}(a_1;\ a_2)$ яки $(\overline{a_1;\ a_2})$ рәвешендә генә язарбыз. Нуль векторның координаталары нульгә тигез.

Ике нокта арасындагы ераклыкны аларның координаталары аша күрсәтүче формуладан координаталары a_1, a_2 булган векторның абсолют зурлыгы $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ га тигезлеге килеп чыга.

Тигез векторларның тиңдәшле координаталары тигез. Һәм киресенчә, ***векторларның тиңдәшле координаталары тигез булса, векторлар тигез була.***

Чыннан да, $A_1(x_1,\ y_1)$ һәм $A_2(x_2,\ y_2)$ нокталары $\overline{a}$ векторының башлангычы һәм ахыры булсын. Аңа тигез $\overline{a}'$ векторы $\overline{a}$ векторыннан параллель күчерү ярдәмендә килеп чыкканлыктан, аның башлангычы һәм ахыры тиңдәшле рәвештә $A_1'(x_1+c;\ y_1+d)$ һәм $A_2'(x_2+c;\ y_2+d)$ нокталары булыр. Моннан $\overline{a}$ һәм $\overline{a}'$ векторларының икесенең дә координаталары бер үк: x_2-x_1, y_2-y_1 икәне күренә.

Хәзер киресен исбатлыйк. $\overline{A_1A_2}$ һәм $\overline{A_1'A_2'}$ векторларының тиңдәшле координаталары тигез булсын. Векторларның тигез икәнен исбатлыйк:

x_1' һәм y_1' A_1' ноктасының координаталары, ә x_2', y_2' A_2' ноктасының координаталары булсын. Теореманың шарты буенча $x_2-x_1=x_2'-x_1'$, $y_2-y_1=y_2'-y_1'$. Моннан $x_2'=x_2+x_1'-x_1$, $y_2'=y_2+y_1'-y_1$.

$$x'=x+x_1'-x_1,\quad y'=y+y_1'-y_1$$

формулалары белән бирелгән параллель күчерү A_1 ноктасын A_1' ноктасына, ә A_2 ноктасын A_2' ноктасына күчерә, ягъни $\overline{A_1A_2}$ һәм $\overline{A_1'A_2'}$ векторлары тигез. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (7). Өч нокта: $A(1, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 1)$ бирелгән. $\overline{AB}$ векторы $\overline{CD}$ векторына тигез булырдай $D(x, y)$ ноктасын табыгыз.

Чишү. $\overline{AB}$ векторының координаталары -2, -1 булыр. $\overline{CD}$ векторының координаталары $x-0$, $y-1$ булыр. $\overline{AB}=\overline{CD}$ булганлыктан, $x-0=-2$, $y-1=-1$. Моннан D ноктасының координаталарын табабыз: $x=-2$, $y=0$.

94. ВЕКТОРЛАРНЫ КУШУ

Координаталары a_1+b_1, a_2+b_2 булган $\overline{c}$ векторы координаталары a_1, a_2 һәм b_1, b_2 булган $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ *векторларының суммасы* дип атала, ягъни

$$\overline{a}(a_1;\ a_2)+\overline{b}(b_1;\ b_2)=\overline{c}(a_1+b_1;\ a_2+b_2).$$

Теләсә нинди $\overline{a}(a_1;\ a_2)$, $\overline{b}(b_1;\ b_2)$, $\overline{c}(c_1;\ c_2)$ векторлары өчен

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a},\ \overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}.$$

Исбатлау өчен тигезлекләрнең сул кисәкләрендә һәм уң кисәкләрендә яткан векторларның тиңдәшле координаталарын чагыштыру җитә. Без аларның тигез икәнлеген күрәбез. Ә тиңдәшле координаталары тигез булган векторлар тигез.

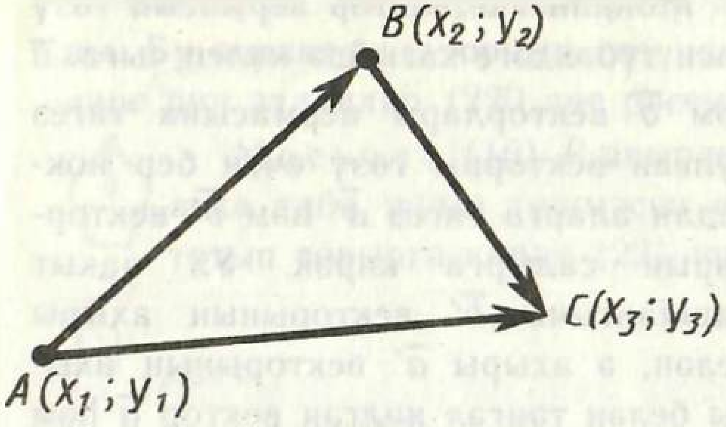
Теорема 10.1. ***Теләсә нинди A, B, C нокталары өчен***

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

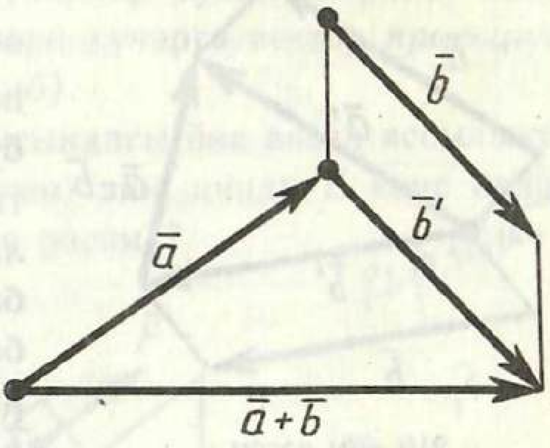
векторлы тигезлеге дөрес.

Исбатлау. $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$ — бирелгән нокталар булсын (215 нче рәсем). $\overline{AB}$ векторының координаталары x_2-x_1, y_2-y_1 булыр, $\overline{BC}$ векторының координаталары x_3-x_2, y_3-y_2 булыр. Димәк, $\overline{AB}+\overline{BC}$ векторының координаталары x_3-x_1, y_3-y_1 булыр. Ә бу $\overline{AC}$ векторының координаталары. Димәк, $\overline{AB}+\overline{BC}$ һәм $\overline{AC}$ векторлары тигез. Теорема исбатланды.

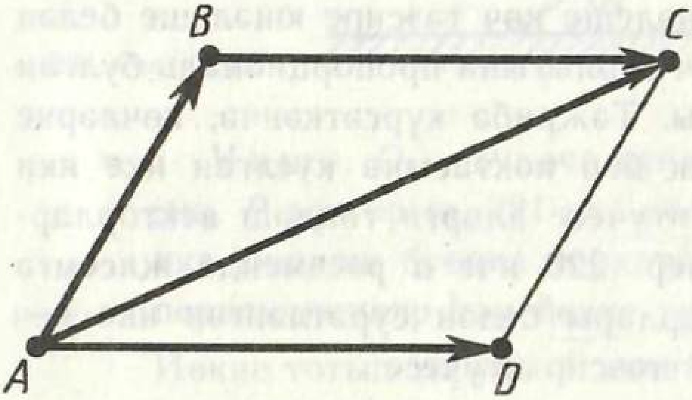
10.1 теоремасыннан ирекле $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторларының суммасын төзүнең түбәндәге ысулы килеп чыга. $\overline{a}$ векторының ахырыннан $\overline{b}$ векторына тигез булган $\overline{b}'$ векторын салырга кирәк. Ул вакытта башлангычы $\overline{a}$ векторының башлангычы белән, ә ахыры $\overline{b}'$ векторының ахыры белән тәңгәл килә торган вектор $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторларының суммасы булыр (216 нчы рәсем). Ике



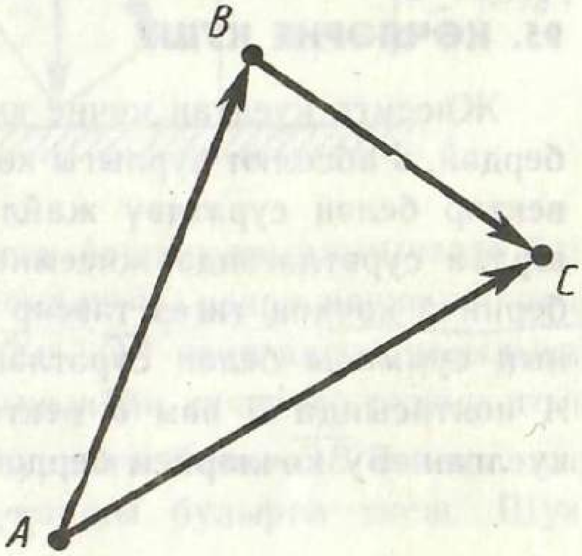
215 нче рәсем



216 нчы рәсем



217 нче рәсем



218 нче рәсем

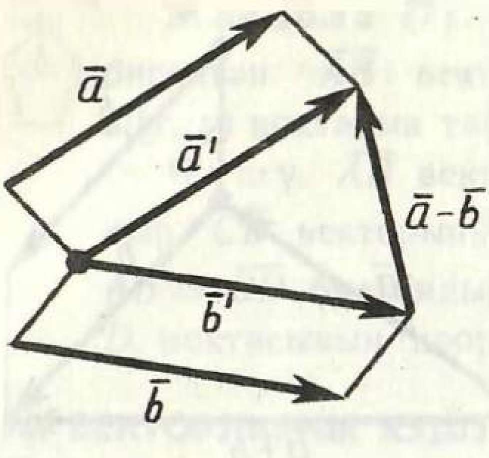
векторның суммасын табуның мондый ысулы векторларны кушуның *«өчпочмак кагыйдәсе»* дип атала.

Уртак башлангычлы векторлар өчен аларның суммасы бу векторлар өстендә төзелгән параллелограммның диагонале белән сурәтләнә (*«параллелограмм кагыйдәсе»*, 217 нче рәсем). Чынннан да, $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$, ә $\overline{BC}=\overline{AD}$. Димәк, $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$.

$\bar{a}(a_1;\ a_2)$ һәм $\bar{b}(b_1,\ b_2)$ *векторларының аермасы* дип b векторы белән суммасы $\bar{a}$ векторын бирә торган $\bar{c}(c_1,\ c_2)$ векторы атала: $\bar{b}+\bar{c}=\bar{a}$. Моннан $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$ векторының координаталарын табабыз: $c_1=a_1-b_1$, $c_2=a_2-b_2$.

Мәсьәлә (11). Уртак башлангычлы $\overline{AB}$ һәм $\overline{AC}$ векторлары бирелгән (218 нче рәсем). $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$ икәнен исбатлагыз.

Чишү. $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ икәнен беләбез. Ә бу $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$ икәнен аңлата.



219 нчы рәсем

Моннан ике вектор аермасын төзү өчен түбәндәге кагыйдә килеп чыга. $\bar{a}$ һәм $\bar{b}$ векторлары аермасына тигез булган векторны төзү өчен бер ноктадан аларга тигез $\bar{a}'$ һәм $\bar{b}'$ векторларын салырга кирәк. Ул вакыт башлангычы $\bar{b}'$ векторының ахыры белән, ә ахыры $\bar{a}'$ векторының ахыры белән тәңгәл килгән вектор $\bar{a}$ һәм $\bar{b}$ векторларының аермасы булыр (219 нчы рәсем).

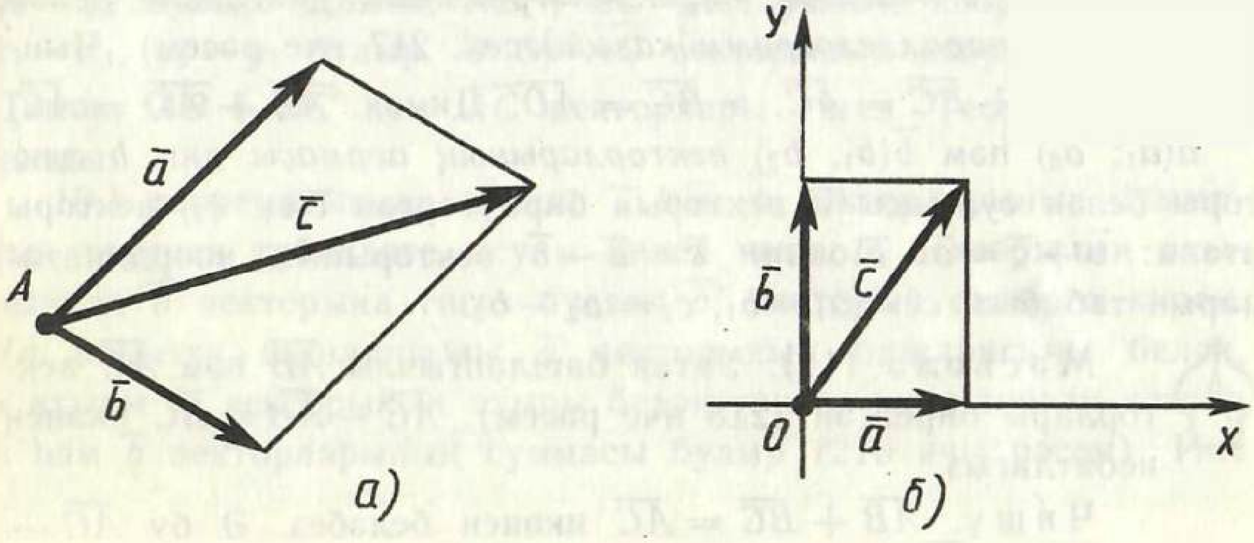
95. КӨЧЛӘРНЕ КУШУ

Җисемгә куелган көчне юнәлеше көч тәэсире юнәлеше белән бердәй, ә абсолют зурлыгы көч зурлыгына пропорциональ булган вектор белән сурәтләү җайлы. Тәҗрибә күрсәткәнчә, көчләрне шулай сурәтләгәндә җисемнең бер ноктасына куелган ике яки берничә көчнең тигез тәэсир итүчесе аларга тиңдәш векторларның суммасы белән сурәтләнер. 220 нче *а* рәсемендә җисемгә *A* ноктасында $\bar{a}$ һәм $\bar{b}$ векторлары белән сурәтләнгән ике көч куелган. Бу көчләрнең бердәй тәэсир итүчесе

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$$

векторы белән сурәтләнә.

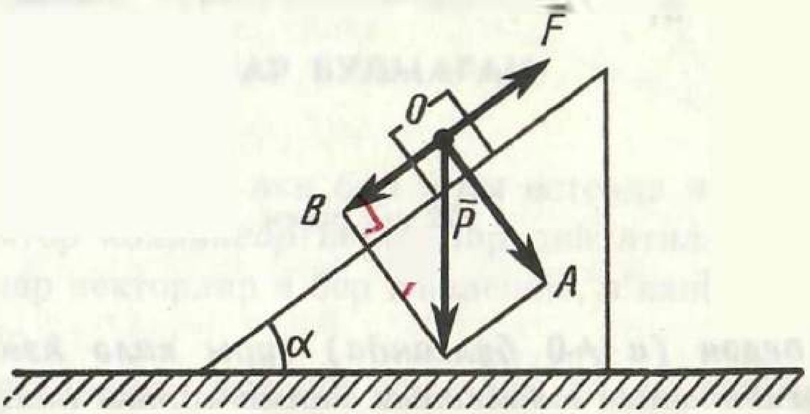
Көчне бирелгән ике юнәлештә тәэсир итүче көчләр суммасы рәвешендә күрсәтү көчне бу юнәлешләр буенча таркату дип атала. 220 нче *а* рәсемендә $\bar{c}$ көче $\bar{a}$ һәм $\bar{b}$ көчләре суммасына $\bar{c}$ көченең төзүчеләренә таркалган.



220 нче рәсем

Векторны ике перпендикуляр күчәрләр буйлап таркату жайлы. Бу очракта векторның төзүчеләре күчәргә вектор *проекцияләре* дип аталалар (220 нче рәсем, *б*).

М ә с ь ә л ә (16) P авырлыгындагы йөк авыш яссылыкта аска таба шуып төшмәсен өчен, аны нинди F көче белән тотып торырга кирәк (221 нче рәсем)?



221 нче рәсем

Ч и ш ү. O — P көче куелган йөкнең авырлык үзәге булсын. P векторын, 221 нче рәсемдәгечә, үзара перпендикуляр ике юнәлеш буенча таркатабыз. $\overline{OA}$ көче авыш яссылыкка перпендикуляр һәм йөкне урыныннан күчерүгә тәэсир итми. Йөкне тотып торучы $\overline{F}$ көче зурлыгы белән $\overline{OB}$ көченә тигез һәм юнәлеше белән капма-каршы булырга тиеш. Шуңа күрә $F = P \sin\alpha$.

96. ВЕКТОРНЫ САНГА ТАПКЫРЛАУ

$(\overline{\lambda a_1;\ \lambda a_2})$ векторы $(\overline{a_1;\ a_2})$ векторының λ санына *тапкырчыгышы* дип атала, ягъни $(\overline{a_1;\ a_2})\lambda = (\overline{\lambda a_1;\ \lambda a_2})$.

Билгеләмә буенча $(\overline{a_1;\ a_2})\lambda = \lambda(\overline{a_1;\ a_2})$.

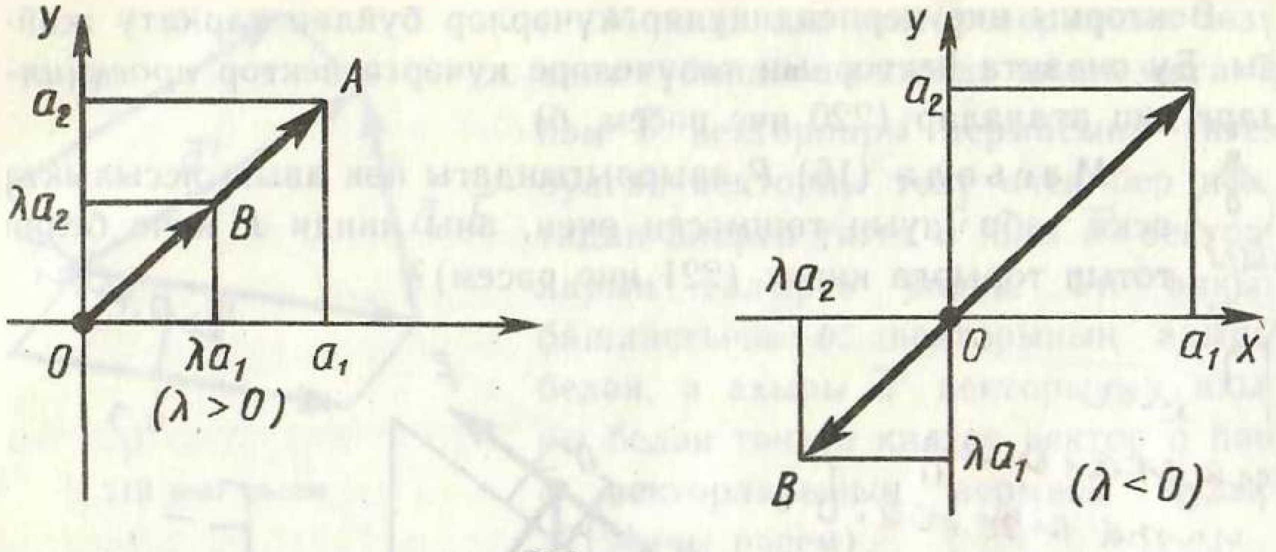
Векторны санга тапкырлау гамәле билгеләмәсеннән мондый нәтиҗә чыга: ***теләсә нинди $\overline{a}$ векторы һәм λ, μ саннары өчен***

$$(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}.$$

Теләсә нинди $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары һәм λ саны өчен

$$\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}.$$

Т е о р е м а 10.2. ***$\lambda\overline{a}$ векторының абсолют зурлыгы $|\lambda|\,|\overline{a}|$ га тигез. Әгәр $\lambda > 0$ булса, $\lambda\overline{a}$ векторының юнәлеше $\overline{a}$ векторының***



222 нче рәсем

юнәлеше белән ($a \neq 0$ булганда) туры килә һәм, әгәр $\lambda < 0$ булса, $\bar{a}$ векторының юнәлешенә капма-каршы була.

Исбатлау. Тиңдәшле рәвештә $\bar{a}$ һәм $\lambda\bar{a}$ векторларына тигез булган $\overline{OA}$ һәм $\overline{OB}$ векторлары төзик (O — координаталар башлангычы), a_1, a_2, $\bar{a}$ векторының координаталары булсын. Ул вакытта a_1, a_2 саннары A ноктасының координаталары, ә λa_1, λa_2 саннары B ноктасының координаталары булыр (222 нче рәсем). OA турысының тигезләмәсе

$$\alpha x + \beta y = 0$$

рәвешендә була. $A(a_1, a_2)$ ноктасының координаталары тигезләмәне канәгатьләндергәнгә күрә, $B(\lambda a_1, \lambda a_2)$ ноктасының координаталары да аны канәгатьләндерә. Моннан B ноктасының OA турысында ятуы аңлашыла. OA ярымтурысы өстендә яткан теләсә нинди C ноктасының c_1, c_2 координаталары A ноктасының a_1, a_2 координаталары белән бер үк тамгалы, ә OA га өстәмә ярымтурыда ятучы теләсә нинди ноктаның координаталары капма-каршы тамгалы була.

Шуңа күрә $\lambda > 0$ булса, B ноктасы OA ярымтурысы өстендә ята, димәк, $\bar{a}$ һәм $\lambda\bar{a}$ векторлары бердәй юнәлгән. Әгәр $\lambda < 0$ булса, B ноктасы өстәмә ярымтуры өстендә ята, $\bar{a}$ һәм $\lambda\bar{a}$ векторлары капма-каршы юнәлгәннәр.

$\lambda\bar{a}$ векторының абсолют зурлыгы

$$|\lambda\bar{a}| = \sqrt{|\lambda a_1|^2 + |\lambda a_2|^2} = |\lambda| \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\lambda|\,|\bar{a}|.$$

Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (17). $A(x_1, y_1)$ һәм $B(x_2, y_2)$ нокталары бирелгән. $\overline{AB}$ һәм $\overline{BA}$ векторларының капма-каршы юнәлгән икәнлеген исбатлагыз.

Чишү. $\overline{AB}$ векторының координаталары: $x_2 - x_1$ һәм $y_2 - y_1$. $\overline{BA}$ векторының координаталары: $x_1 - x_2$ һәм $y_1 - y_2$. Без $\overline{AB} = (-1)\overline{BA}$ икәнен күрәбез. Димәк, $\overline{AB}$ һәм $\overline{BA}$ векторлары капма-каршы юнәлгән.

97. ВЕКТОРНЫ КОЛЛИНЕАР БУЛМАГАН ИКЕ ВЕКТОРГА ТАРКАТУ

Параллель турыларда яки бер туры өстендә яткан нуль булмаган ике вектор *коллинеар* векторлар дип атала (223 нче рәсем). Коллинеар векторлар я бер юнәлешле, я капма-каршы юнәлешле булалар.

$\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары нульдән үзгә һәм коллинеар булсыннар.

$$\overline{b} = \lambda \overline{a}.$$

булырлык λ саны булганын исбатлыйбыз.

$\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары бер юнәлешле булсын.

$$b \text{ һәм } \left(\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\right)\overline{a}$$

векторлары бер юнәлешле һәм абсолют зурлыклары ($\overline{b}$) бертөрле. Димәк, алар тигез:

$$\overline{b} = \frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\overline{a} = \lambda\overline{a}, \ \lambda = \frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}.$$

Капма-каршы юнәлешле $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары очрагында аналогия буенча

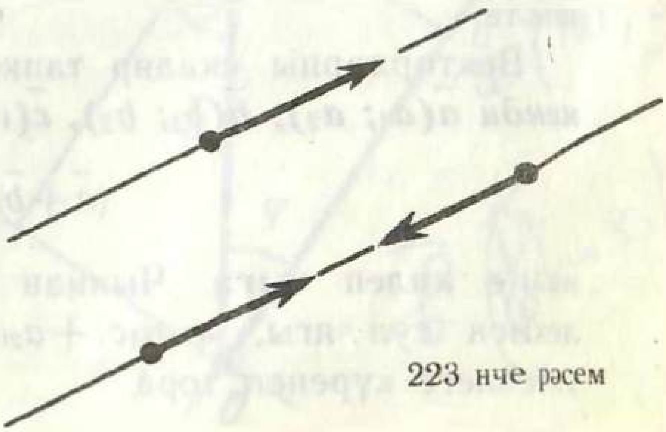
$$\overline{b} = -\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}\overline{a} = \lambda\overline{a}, \ \lambda = -\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|},$$

дигән нәтиҗә ясыйбыз. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

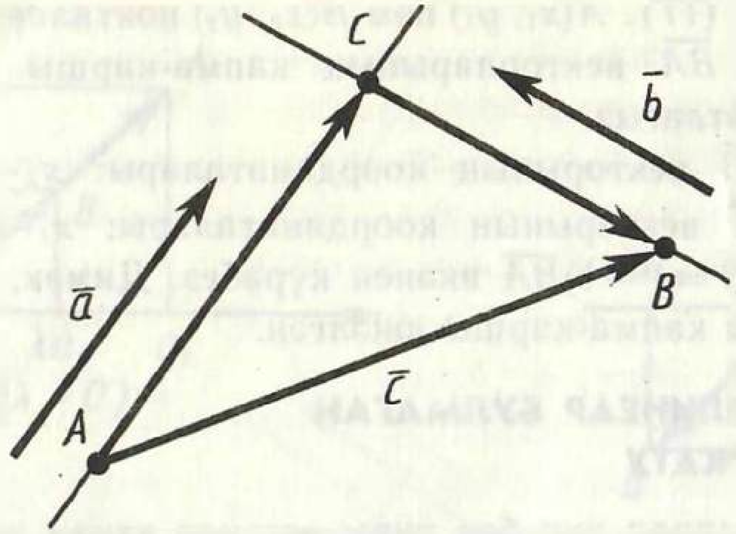
$\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ — нульдән үзгә коллинеар булмаган векторлар булсын. ***Теләсә нинди $\overline{c}$ векторын***

$$\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} \ .$$

рәвешендә күрсәтергә мөмкин икәнлеген исбатлыйбыз.



223 нче рәсем



224 нче рәсем

A һәм B — $\overline{c}$ векторының башлангычы һәм ахыры булсын (224 нче рәсем). A һәм B нокталары аша $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторларына параллель турылар үткәрәбез. Алар ниндидер C ноктасында кисешерләр.

$$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$$

була. $\overline{a}$ һәм $\overline{AC}$ векторлары коллинеар булганлыктан, $\overline{AC}=\lambda\overline{a}$. $\overline{CB}$ векторы $\overline{b}$ векторы белән коллинеар булганлыктан, $\overline{CB}=\mu\overline{b}$. Шулай итеп,

$$\overline{c}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{b},$$

шуны исбатларга кирәк иде дә.

98. ВЕКТОРЛАРНЫҢ СКАЛЯР ТАПКЫРЧЫГЫШЫ

$a_1b_1+a_2b_2$ саны $\overline{a}(a_1;\ a_2)$ һәм $\overline{b}(b_1;\ b_2)$ векторларының *скаляр тапкырчыгышы* дип атала.

Векторларның скаляр тапкырчыгышын язу өчен саннар тапкырчыгышындагы кебек үз язма кулланыла. $\overline{a}\cdot\overline{a}$ скаляр тапкырчыгышы $\overline{a}^2$ дип тамгалана. $\overline{a}^2=|\overline{a}|^2$ икәне үзеннән-үзе аңлашыла.

Векторларны скаляр тапкырлауның билгеләмәсеннән ***теләсә нинди*** $\overline{a}(a_1;\ a_2)$, $\overline{b}(b_1;\ b_2)$, $\overline{c}(c_1;\ c_2)$ ***векторлары өчен***

$$(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=\overline{a}\overline{c}+\overline{b}\overline{c}$$

икәне килеп чыга. Чыннан да, $(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2$ — тигезлекнең сул ягы, ә $a_1c_1+a_2c_2+b_1c_1+b_2c_2$ — уң ягы. Аларның тигезлеге күренеп тора.

BAC почмагы нуль булмаган $\overline{AB}$ һәм $\overline{AC}$ векторлары арасындагы *почмак* дип атала. Теләсә нинди нульдән үзгә $\bar{a}$ һәм $\bar{b}$ векторлары арасындагы *почмак* дип аларга тигез булган уртак башлангычлы векторлар арасындагы почмак атала. Бердәй юнәлешле векторлар арасындагы почмак нульгә тигез дип санала.

Теорема 10.3. ***Векторларның скаляр тапкырчыгышы аларның абсолют зурлыкларын алар арасындагы почмак косинусына тапкырлаганга тигез.***

Исбатлау. $\bar{a}$ һәм $\bar{b}$ — бирелгән векторлар һәм φ — алар арасындагы почмак булсын. Табабыз:

$$(\bar{a}+\bar{b})^2=(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}+\bar{b})=(\bar{a}+\bar{b})\bar{a}+(\bar{a}+\bar{b})\bar{b}=$$
$$=\bar{a}\bar{a}+\bar{b}\bar{a}+\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{b}=\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2,$$

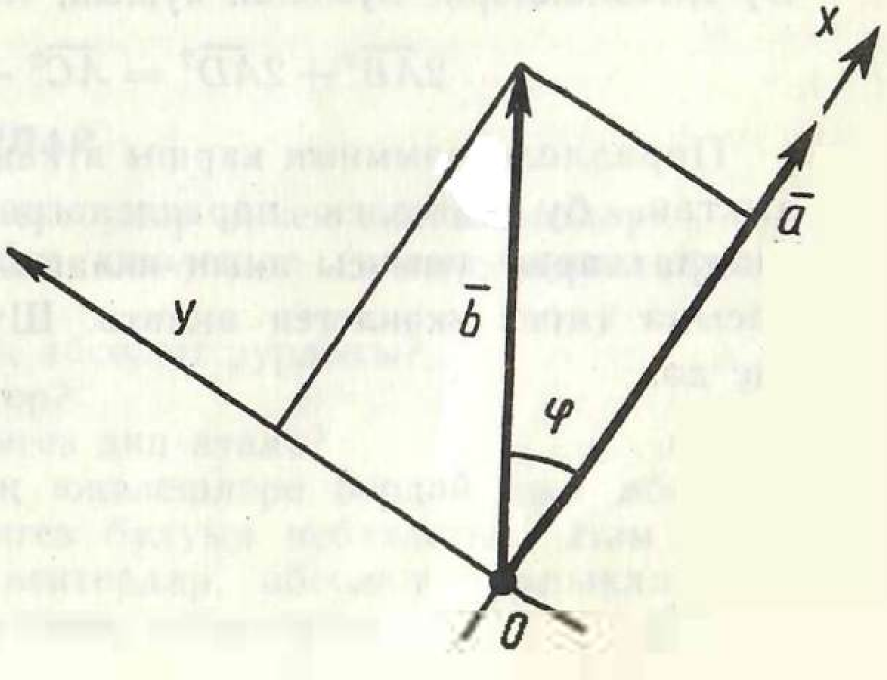
яки

$$|\bar{a}+\bar{b}|^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2\bar{a}\bar{b}.$$

Моннан $\bar{a}\bar{b}$ ның скаляр тапкырчыгышы, $\bar{a}$, $\bar{b}$ һәм $\bar{a}+\bar{b}$ векторларының озынлыклары аша күрсәтелгәне күренә, шуңа күрә координаталар системасын сайлауга бәйсез, ягъни координаталар системасын махсус рәвештә сайлаганда скаляр тапкырчыгыш үзгәрми. Координаталар системасы xy ны 225 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә алыйк. Координаталар системасын алай сайлаганда $\bar{a}$ векторының координаталары $|\bar{a}|$ һәм 0 булыр, ә $\bar{b}$ векторының координаталары $|\bar{b}|\cos\varphi$ һәм $|\bar{b}|\sin\varphi$ булыр. Скаляр тапкырчыгыш

$$\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi+0\,|\bar{b}|\sin\varphi=|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi.$$

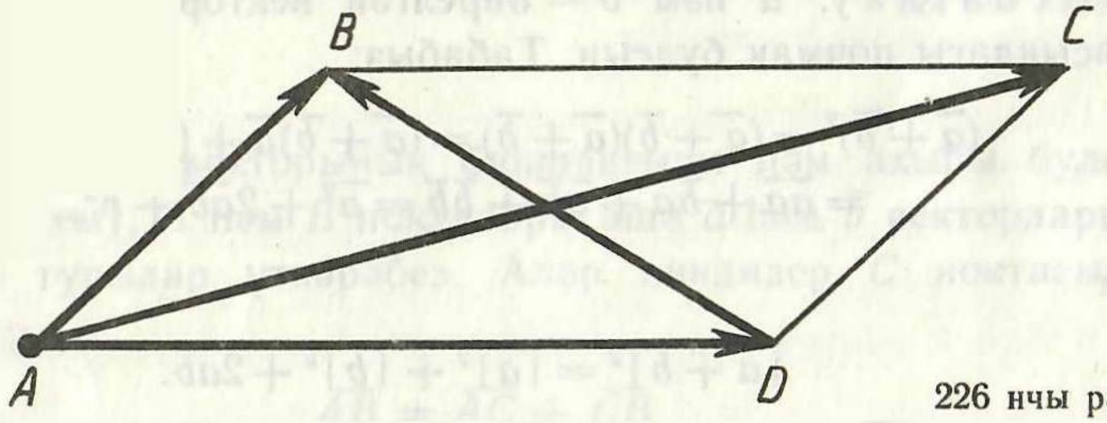
Теорема исбатланды.



225 нче рәсем

10.3. теоремасыннан ***әгәр векторлар перпендикуляр булса, аларның скаляр тапкырчыгышы нульгә тигез*** дигән нәтиҗә чыга. Һәм киресенчә, ***әгәр нульдән үзгә векторларның скаляр тапкырчыгышы нульгә тигез икән, векторлар перпендикуляр була.***

Мәсьәлә (38). Параллелограмм диагональләренең квадратлары суммасы аның яклары квадратларының суммасына тигез икәнлеген исбатлагыз.



226 нчы рәсем

Чишү. *ABCD* дүртпочмагы параллелограмм булсын (226 нчы рәсем). Түбәндәге векторлы тигезлекләрне язабыз:

$$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC},$$
$$\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}.$$

Бу тигезлекләрне квадратка күтәреп, табабыз:

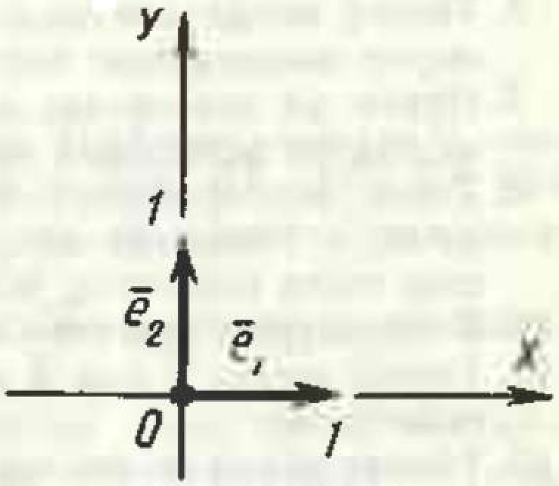
$$\overline{AB}^2 + 2\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2,$$
$$\overline{AB}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{AD}^2 = \overline{DB}^2.$$

Бу тигезлекләрне буынлап кушып, табабыз:

$$2\overline{AB}^2 + 2\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DB}^2.$$

Параллелограммның каршы яткан яклары тигез булганлыктан, бу тигезлек параллелограмм диагональләренең квадратлары суммасы аның якларының квадратлары суммасына тигез икәнлеген аңлата. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

99. ВЕКТОРНЫ КООРДИНАТАЛАР КҮЧӘРЛӘРЕ БУЙЛАП ТАРКАТУ



227 нче рәсем

Әгәр векторның абсолют зурлыгы бергә тигез булса, ул *берәмлек* вектор дип атала. Юнәлешләре координаталарның уңай ярымкүчәрләренең юнәлешләре белән туры килгән берәмлек векторлар *координаталар векторлары* яки *орталар* дип атала. Без аларны x күчәрендә $\overline{e_1}(1;\ 0)$, y күчәрендә $\overline{e_2}(0;\ 1)$ дип тамгаларбыз (227 нче рәсем).

Координаталар векторлары нульдән үзгә һәм коллинеар булмаганлыктан, теләсә нинди $\overline{a}(a_1;\ a_2)$ векторын бу векторлар буйлап таркатып була:

$$\overline{a}=\lambda\overline{e}_1+\mu\overline{e}_2. \qquad (*)$$

Бу таркатмадагы λ һәм μ коэффициентларын табабыз. (*) тигезлегенең ике ягын да e_1 векторына тапкырлыйбыз.

$\overline{a}(a_1;\ a_2)\overline{e_1}=a_1$, $\overline{e_1}\cdot\overline{e}_1=1$, $\overline{e}_2\cdot\overline{e}_1=0$ булганлыктан, $a_1=\lambda$. Шундый ук юл белән, (*) тигезлегенең ике ягын да $\overline{e}_2$ векторына тапкырлап, табабыз: $a_2=\mu$.

Шулай итеп, теләсә нинди $\overline{a}(a_1;\ a_2)$ векторы өчен

$$\overline{a}=a_1\overline{e}_1+a_2\overline{e}_2$$

таркатмасын табабыз.

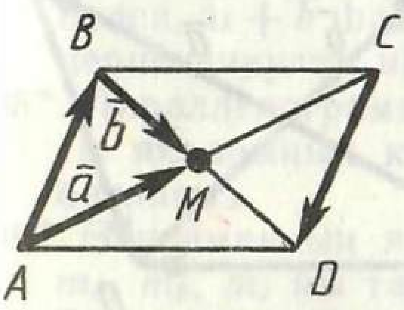
КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Нәрсә ул вектор? Векторлар ничек тамгаланалар?
2. Нинди векторлар бер юнәлешле (капма-каршы юнәлешле) дип аталалар?
3. Нәрсә ул векторның абсолют зурлыгы?
4. Нәрсә ул нуль вектор?
5. Нинди векторлар тигез дип атала?
6. Тигез векторларның юнәлешләре бердәй һәм абсолют зурлыклары буенча тигез булуын исбатлагыз. Һәм киресенчә, бердәй юнәлешле векторлар, абсолют зурлыклары буенча тигез булса, тигез икәнен исбатлагыз.

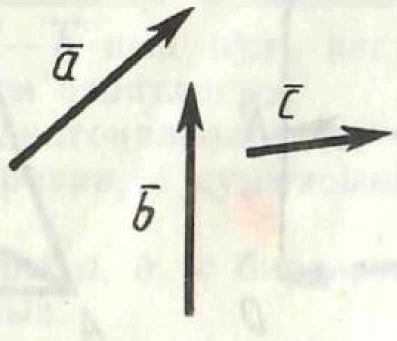
7. Теләсә нинди ноктадан бирелгән векторга тигез вектор салырга мөмкин һәм бары тик берне генә икәнен исбатлагыз.
8. Нәрсә ул векторның координаталары? Координаталары a_1, a_2 булган векторның абсолют зурлыгы күпмегә тигез?
9. Тигез векторларның тиңдәшле координаталары тигез булуын, ә тиңдәшле координаталары тигез булган векторларның тигез икәнлеген исбатлагыз.
10. Векторларны кушуга билгеләмә бирегез.
11. Теләсә нинди $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары өчен $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ икәнен исбатлагыз.
12. Теләсә нинди өч вектор: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ өчен $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$ икәнен исбатлагыз.
13. $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ векторлы тигезлеген исбатлагыз.
14. $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторларының суммасын табу өчен $\overline{a}$ векторының азагыннан $\overline{b}$ векторына тигез $\overline{b'}$ векторын салырга кирәк. Ул вакытта башлангычы $\overline{a}$ векторының башлангычы белән, ә азагы $\overline{b'}$ векторының азагы белән тәңгәл килә торган векторның $\overline{a}+\overline{b}$ га тигез икәнен исбатлагыз.
15. Векторларны кушуның «параллелограмм» кагыйдәсен төзегез.
16. Векторларның аермасына билгеләмә бирегез.
17. Векторны санга тапкырлауга билгеләмә бирегез.
18. $\lambda\overline{a}$ векторының абсолют зурлыгы $|\lambda||\overline{a}|$ га тигез икәнен, $\lambda>0$ булганда $\lambda\overline{a}(\overline{a}\neq\overline{0})$ векторының юнәлеше $\overline{a}$ векторының юнәлеше белән туры килүен, $\lambda<0$ булганда $\overline{a}$ векторына капма-каршы юнәлешле булуын исбатлагыз.
19. Нинди векторлар коллинеар дип атала?
20. Әгәр $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары нульдән үзгә һәм коллинеар булмасалар, ул вакытта теләсә нинди $\overline{c}$ векторын $\overline{c}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}$ рәвешендә китерергә мөмкин икәнен исбатлагыз.
21. Векторларның скаляр тапкырчыгышына билгеләмә бирегез.
22. Теләсә нинди өч: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ векторлары өчен $(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=\overline{a}\overline{c}+\overline{b}\overline{c}$ икәнен исбатлагыз.
23. Векторлар арасындагы почмак ничек билгеләнә?
24. Бердәй юнәлгән векторлар арасындагы почмак нәрсәгә тигез?
25. Векторларның скаляр тапкырчыгышы аларның абсолют зурлыклары белән алар арасындагы почмак косинусы тапкырчыгышына тигез икәнен исбатлагыз.
26. Әгәр векторлар перпендикуляр булса, аларның скаляр тапкырчыгышы нульгә тигез икәнен исбатлагыз. Һәм киресенчә: әгәр нульдән үзгә векторларның скаляр тапкырчыгышы нульгә тигез булса, векторларның перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

Мәсьәләләр

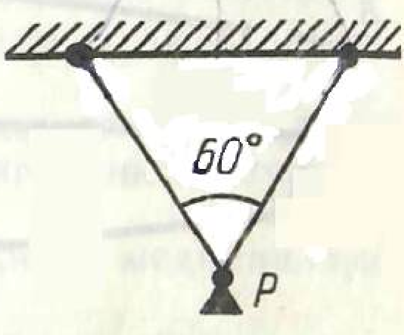
1. Туры өстендә өч нокта: A, B, C бирелгән, монда B ноктасы A һәм C нокталары арасында ята. $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BA}$ һәм $\overline{BC}$ векторлары арасында бердәй юнәлешлеләрне һәм капма-каршы юнәлешлеләрне атагыз.
2. $ABCD$ — параллелограмм. $\overline{AB}$ һәм $\overline{DC}$ векторларының тигез икәнлеген исбатлагыз.
3. $\overline{AB}$ векторы һәм C ноктасы бирелгән. Әгәр: 1) C ноктасы AB турысында ятса; 2) C ноктасы AB турысында ятмаса, C ноктасыннан $\overline{AB}$ векторына тигез вектор салыгыз.
4. $\overline{a}(2;\ 4)$; $\overline{b}(-1;\ 2)$ һәм $\overline{c}(c_1;\ c_2)$ векторлары координаталар башлангычыннан салынганнар. Аларның ахырларының координаталары күпмегә тигез?
5. $\overline{a}(5;\ m)$ векторының абсолют зурлыгы 13 кә, ә $\overline{b}(n;\ 24)$ векторыныкы 25 кә тигез. m һәм n ны табыгыз.
6. $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 0)$, $C(1;\ 2)$, $D(2;\ 1)$ нокталары бирелгән. $\overline{AB}$ һәм $\overline{CD}$ векторларының тигез икәнлеген исбатлагыз.
7. Өч нокта: $A(1;\ 1)$, $B(-1;\ 0)$, $C(0;\ 1)$ бирелгән. $\overline{AB}$ һәм $\overline{CD}$ векторлары тигез булырдай $D(x;\ y)$ ноктасын табыгыз.
8. Әгәр: 1) $\overline{a}(1;\ -4)$, $\overline{b}(-4;\ 8)$; 2) $\overline{a}(2;\ 5)$, $\overline{b}(4;\ 3)$ булса, $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторларының суммасына тигез булган $\overline{c}$ векторын һәм $\overline{c}$ векторының абсолют зурлыгын табыгыз.
9. ABC өчпочмагы бирелгән. 1) $\overline{AC}$ һәм $\overline{CB}$; 2) $\overline{AB}$ һәм $\overline{CB}$; 3) $\overline{AC}$ һәм $\overline{AB}$; 4) $\overline{CA}$ һәм $\overline{CB}$ векторларының суммасын табыгыз.
10. Әгәр: 1) $\overline{a}(1;\ -4)$, $\overline{b}(-4;\ 8)$; 2) $\overline{a}(-2;\ 7)$, $\overline{b}(4;\ -1)$ булса, $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$ векторын һәм аның абсолют зурлыгын табыгыз.
11. Уртак башлангычлы $\overline{AB}$ һәм $\overline{AC}$ векторлары бирелгән. $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$ икәнен исбатлагыз.
12. $ABCD$ параллелограммының диагональләре M ноктасында кисешәләр. $\overline{AB}$ һәм $\overline{CD}$ векторларын $\overline{a}=\overline{AM}$, $\overline{b}=\overline{BM}$ векторлары аша күрсәтегез (228 нче рәсем).



228 нче рәсем



229 нчы рәсем



230 нчы рәсем

13. 229 нчы рәсемдәгечә итеп ирекле $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларын сызыгыз. Аннан соң 1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; 3) $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ на тигез векторлар төзегез.

14. 1) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ һәм $\overline{AC}$ векторлары өчен $|\overline{AC}| \leqslant |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$ тигезсезлегенең дөрес икәнен исбатлагыз.

2) Теләсә нинди $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары өчен $|\vec{a}+\vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$ тигезсезлегенең дөрес икәнлеген исбатлагыз.

15. Горизонталь матчага ике тигез җеп белән P авырлыгындагы йөк эленеп куелган. Җепләрнең тартылу көчләрен табыгыз (230 нчы рәсем).

16. P авырлыгындагы йөк авыш яссылыкта аска таба шумасын өчен, аны нинди F көче белән тотып торырга кирәк?

17. $A(x_1;\ y_1)$ һәм $B(x_2;\ y_2)$ нокталары бирелгән. $\overline{AB}$ һәм $\overline{BA}$ векторларының капма-каршы юнәлешле икәнен исбатлагыз.

18. $\vec{a}(1;\ 2)$ һәм $\vec{b}(0{,}5;\ 1)$ векторлары бер юнәлешле, ә $\vec{c}(-1;\ 2)$ һәм $\vec{d}(0{,}5;\ -1)$ векторлары капма-каршы юнәлешле икәнен исбатлагыз.

19. $\vec{a}(3;\ 2)$ һәм $\vec{b}(0;\ -1)$ векторлары бирелгән. $\vec{c}=-2a+4b$ векторын һәм аның абсолют зурлыгын табыгыз.

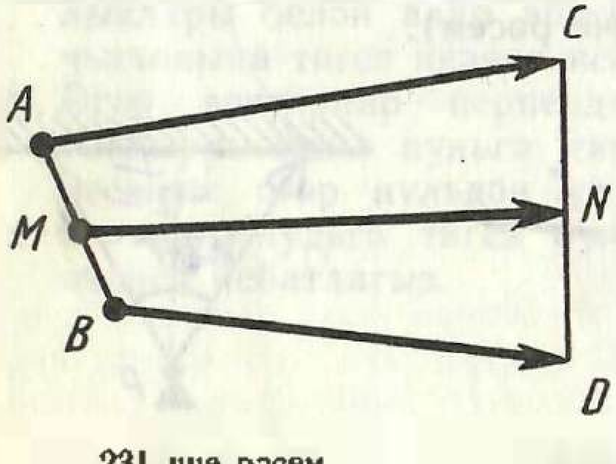
20. $\lambda\vec{a}$ векторының абсолют зурлыгы 5 кә тигез. Әгәр: 1) $\vec{a}(-6;\ 8)$; 2) $\vec{a}(3;\ -4)$? 3) $\vec{a}(5;\ 12)$ булса, λ ны табыгыз.

21. ABC өчпочмагында AM медианасы үткәрелгән. $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$ икәнен исбатлагыз.

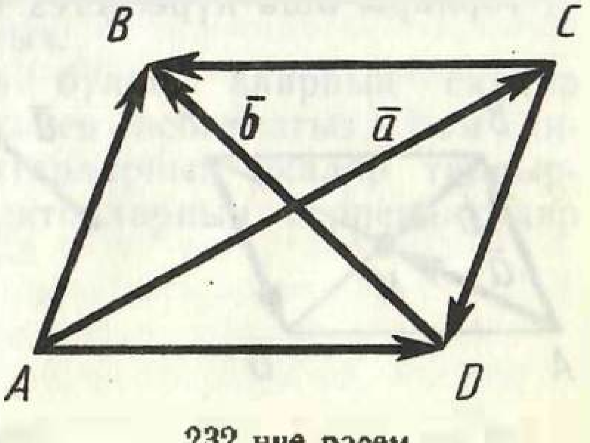
22. M һәм N нокталары AB һәм CD кисемтәләренең тиңдәшле урталары булып торалар. $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BD})$ (231 нче рәсем) векторлы тигезлеген исбатлагыз.

23. $ABCD$ параллелограммы, $\overline{AC}=\vec{a}$, $\overline{DB}=\vec{b}$ бирелгән (232 нче рәсем). $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ һәм $\overline{AD}$ векторларын $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ аша күрсәтегез.

24*. Коллинеар векторларның тиңдәшле координаталары про-



231 нче рәсем



232 нче рәсем

порциональ икәнен исбатлагыз. Һәм киресенчә: әгәр нульдән үзгә ике векторның тиңдәшле координаталары пропорциональ булсалар, бу векторлар коллинеар була.

25. $\overline{a}(2;\ -4)$, $\overline{b}(1;\ 1)$, $\overline{c}(1;\ -2)$, $\overline{d}(-2;\ -4)$ векторлары бирелгән.
Коллинеар векторларның парларын күрсәтегез. Бирелгән векторларның кайсылары бердәй юнәлешле, ә кайсылары капма-каршы юнәлешле?

26. $\overline{a}(1;\ -1)$ һәм $\overline{b}(-2;\ m)$ векторларының коллинеар икәне билгеле. m күпмегә тигез?

27. $\overline{a}(1,\ 0)$, $\overline{b}(1,\ 1)$ һәм $\overline{c}(-1,\ 0)$ векторлары бирелгән. Векторлы $\overline{c}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}$ тигезлеге дөрес булырдай λ һәм μ саннарын табыгыз.

28. Теләсә нинди $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары өчен $(\overline{a}\overline{b})^2\leqslant\overline{a}^2\overline{b}^2$ тигезсезлеген исбатлагыз.

29. $\overline{a}(1,\ 2)$, $\overline{b}\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$ векторлары арасындагы почмакны табыгыз.

30*. $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары бирелгән. Әгәр $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторларының абсолют зурлыклары 1 гә тигез, ә алар арасындагы почмак 60° ка тигез булса, $\overline{a}+\overline{b}$ векторының абсолют зурлыгын табыгыз.

31. Алдагы мәсьәләдәге $\overline{a}$ һәм $\overline{a}+\overline{b}$ векторлары арасындагы почмакны табыгыз.

32. Өчпочмак түбәләре $A\ (1,\ 1)$, $B\ (4,\ 1)$, $C\ (4,\ 5)$ бирелгән. Өчпочмак почмаклары косинусларын табыгыз.

33. Түбәләре $A\ (0;\ \sqrt{3})$, $B\ (2;\ \sqrt{3})$; $C\left(\frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ булган өчпочмакның почмакларын табыгыз.

34. $\overline{a}(m;\ n)$ һәм $\overline{b}(-n;\ m)$ векторларының перпендикуляр яки нульгә тигез икәнен исбатлагыз.

35. $\overline{a}\,(3;\ 4)$ һәм $\overline{b}(m;\ 2)$ векторлары бирелгән. m нинди кыйммәт алганда бу векторлар перпендикуляр булыр?

36. $\overline{a}(1;\ 0)$ һәм $\overline{b}(1;\ 1)$ векторлары бирелгән. $\overline{a}+\lambda\overline{b}$ векторы $\overline{a}$ векторына перпендикуляр булырдай λ санын табыгыз.

37. Әгәр $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ коллинеар булмаган берәмлек векторлар булса, $\overline{a}+\overline{b}$ һәм $\overline{a}-\overline{b}$ ның нуль векторлар булмавын һәм перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

38*. Параллелограмм диагональләренең квадратлары суммасы якларының квадратлары суммасына тигез икәнлеген исбатлагыз.

39*. Өчпочмакның яклары a, b, c бирелгән. Аның медианалары m_a, m_b, m_c ны табыгыз.

40. Бирелгән ике ноктадан ераклыкларының квадратлары сум-

масы даими булган нокталарның геометрик урыны үзәге бирелгән ике ноктаны тоташтыручы кисемтәнең уртасында булган әйләнә икәнен исбатлагыз.

41. $\overline{a}+\overline{b}$ һәм $\overline{a}-\overline{b}$ векторлары перпендикуляр. $|\overline{a}|=|\overline{b}|$ икәнен исбатлагыз.

42. Векторлар ярдәмендә ромбның диагональләре перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

43. Дүрт нокта: $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(0;\ 4)$, $D(-1;\ 2)$ бирелгән. $ABCD$ дүртпочмагының турыпочмаклык икәнен исбатлагыз.

44. Дүрт нокта: $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 1)$, $C(0;\ 2)$, $D(-1;\ 1)$ бирелгән. $ABCD$ дүртпочмагының квадрат икәнен исбатлагыз.

45. $\overline{a}\left(-\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)$, $\overline{b}\left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$, $\overline{c}(0;\ -1)$, $\overline{d}\left(\frac{3}{5};\ -\frac{4}{5}\right)$ векторлары арасында берәмлек векторларны табыгыз һәм аларның кайсылары коллинеар икәнен күрсәтегез.

46. $\overline{a}(6;\ 8)$ векторына коллинеар һәм аның белән бер юнәлешле берәмлек векторын табыгыз.

47. Координаталар векторлары $\overline{e}_1(1;\ 0)$ һәм $\overline{e}_2(0;\ 1)$ бирелгән. $2\overline{e}_1-3\overline{e}_2$ векторының координаталары күпмегә тигез?

48. 1) Өч нокта: O, A, B бирелгән. X ноктасы AB кисемтәсен A дан башлап $\lambda:\mu$ чагыштырмасында бүлә. OX векторын $\overline{OA}=\overline{a}$ һәм $\overline{OB}=\overline{b}$ векторлары аша күрсәтегез.

2) Өчпочмакның медианалары һәр медиананы тиндәшле түбәдән башлап 2 : 1 чагыштырмасында бүлүче бер ноктада кисешкәнен исбатлагыз.

49. $\overline{c}$ векторының координаталар векторы $\overline{e}(1;\ 0)$ белән абсциссалар күчәренә проекциясе $\overline{a}$

$$\overline{a}=k\overline{e}_1,\ \text{монда}\ k=\overline{c}\overline{e}_1,$$

формуласы белән бирелгәнен исбатлагыз.

50. Векторлар суммасының күчәргә проекциясе кушылучыларның шул ук күчәргә проекцияләре суммасына тигез икәнлеген исбатлагыз.

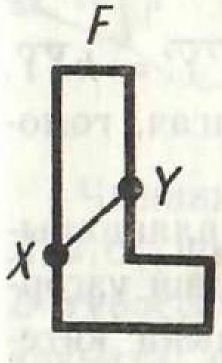
9 нчы сыйныф

§ 11. ФИГУРАЛАРНЫҢ ОХШАШЛЫГЫ

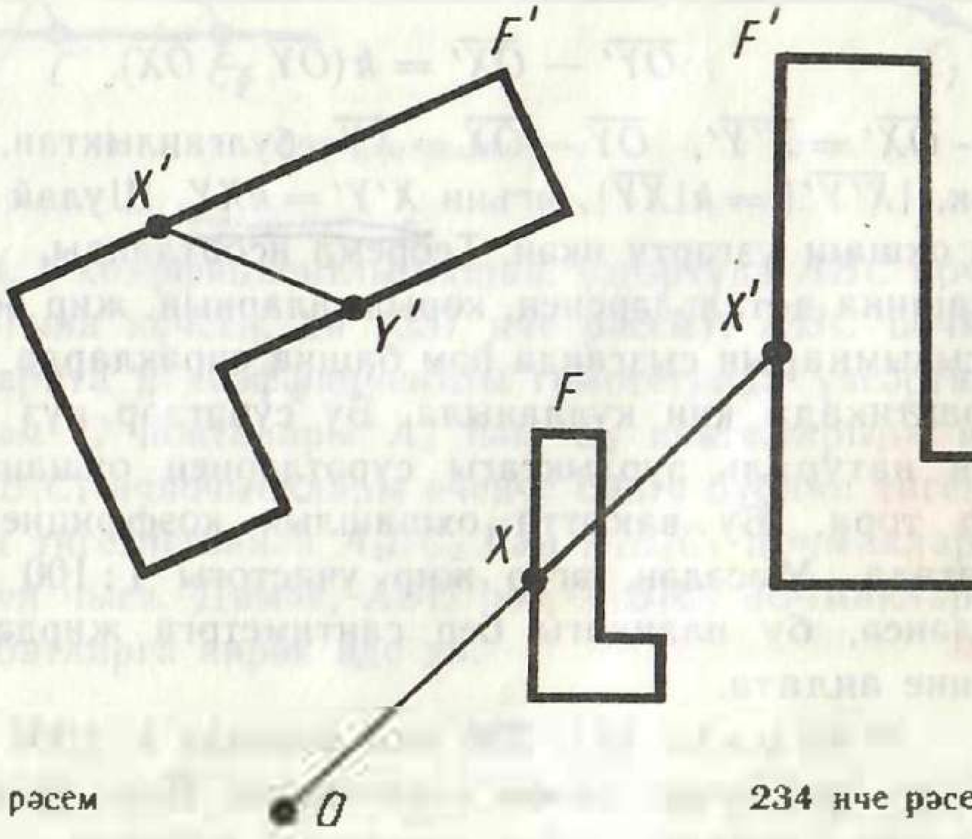
100. ОХШАШ ҮЗГӘРТҮ

Әгәр F фигурасын F' фигурасына үзгәрткәндә нокталар арасындагы ераклыклар бер үк сан тапкыр үзгәрсә, бу үзгәртү *охшаш үзгәртү* дип атала (233 нче рәсем). Бу шуны күрсәтә, әгәр F фигурасының ирекле X, Y нокталары охшаш үзгәртү вакытында F' фигурасының X', Y' нокталарына күчсәләр, ул чакта $X'Y' = k \cdot XY$, өстәвенә барлык X, Y нокталары өчен k бер үк сан. k саны *охшашлык коэффициенты* дип атала. $k = 1$ булганда охшаш үзгәртү хәрәкәт була.

F — бирелгән фигура һәм O — билгеләнгән нокта булсын (234 нче рәсем). F фигурасының ирекле X ноктасы аша OX нурын үткәрәбез һәм анда $k \cdot OX$ ка (k — уңай сан) тигез булган OX' кисемтәсен салабыз. Күрсәтелгән ысул белән F фигурасының һәр X ноктасын X' ноктасына күчереп үзгәртү *O үзәгенә*



233 нче рәсем

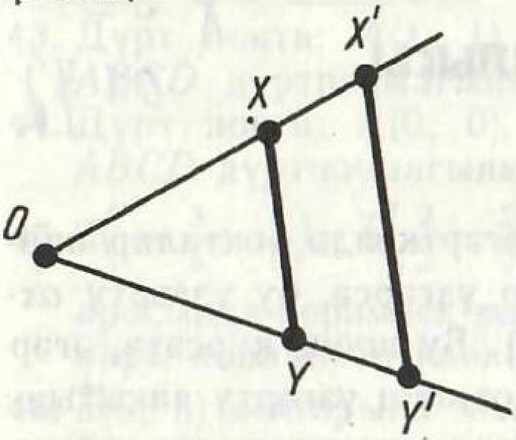


234 нче рәсем

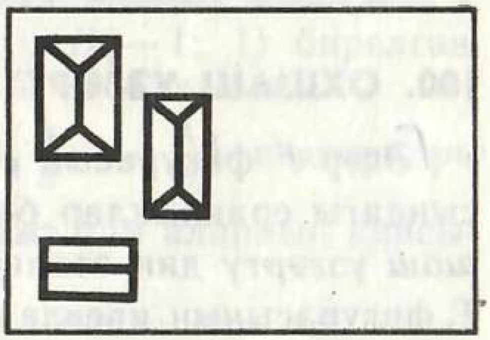
карата гомотетия дип атала. k саны — гомотетия коэффициенты, F һәм F_1 фигуралары *гомотетик фигуралар* дип аталалар.

Теорема 1.1. ***Гомотетия охшаш үзгәртү була.***

Исбатлау. O — гомотетия үзәге, k — гомотетия коэффициенты, X һәм Y фигураның ике ирекле ноктасы булсын (235 нче рәсем).



235 нче рәсем



236 нчы рәсем

Гомотетия вакытында X һәм Y нокталары тиндәшле рәвештә OX һәм OY нурларындагы, өстәвенә $OX' = k \cdot OX$, $OY' = k \cdot OY$ булырдай, X' һәм Y' нокталарына күчәләр. Моннан түбәндәге векторлы тигезлекләр чыга:

$$\overline{OX'} = k\,\overline{OX}, \quad \overline{OY} = k\,\overline{OY}.$$

Бу тигезлекләрне буынлап алсак, табабыз:

$$\overline{OY'} - \overline{OX'} = k(\overline{OY} - \overline{OX}).$$

$\overline{OY'} - \overline{OX'} = \overline{X'Y'}$, $\overline{OY} - \overline{OX} = \overline{XY}$ булганлыктан, $\overline{X'Y'} = k\overline{XY}$. Димәк, $|\overline{X'Y'}| = k|\overline{XY}|$, ягъни $X'Y' = kXY$. Шулай булгач, гомотетия охшаш үзгәртү икән. Теорема исбатланды.

Машина детальләренең, корылмаларның, җир өсте планнарының сызымнарын сызганда һәм башка очракларда охшаш үзгәртү практикада киң кулланыла. Бу сурәтләр күз алдына китерелгән натураль зурлыктагы сурәтләрнең охшаш үзгәртүләре булып тора. Бу вакытта охшашлык коэффициенты масштаб дип атала. Мәсәлән, әгәр җир участогы 1 : 100 масштабында сурәтләнсә, бу пландагы бер сантиметрга җирдәге 1 м туры килгәнне аңлата.

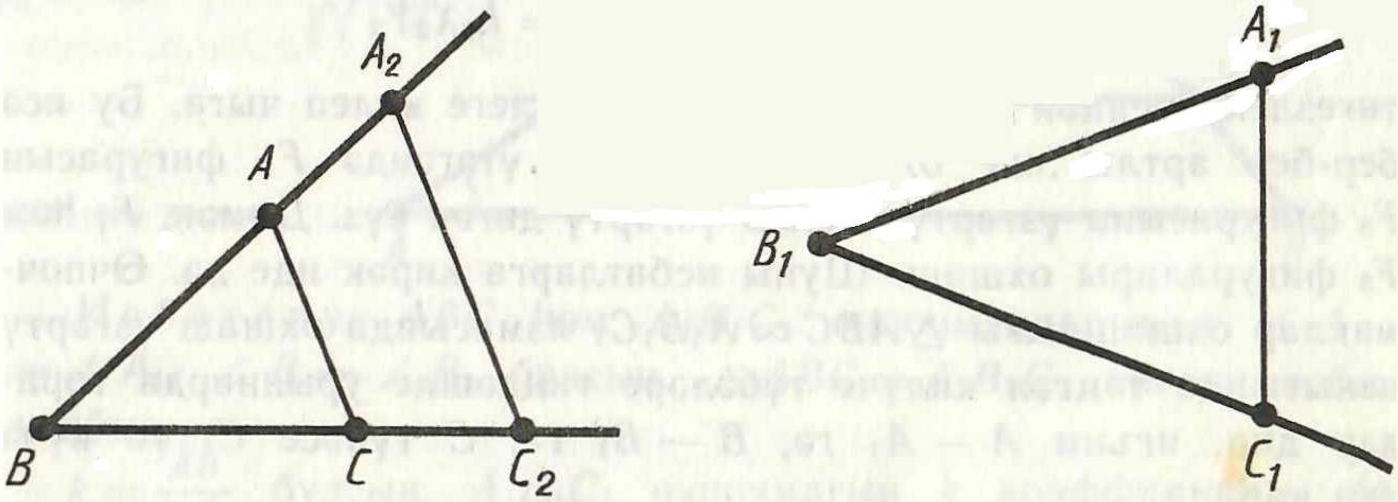
Мәсьәлә (4). 236 нчы рәсемдә 1 : 1000 масштабында йорт урынының планы сурәтләнгән. Йорт урынының үлчәмнәрен (озынлыгын һәм киңлеген) табыгыз.

Чишү. Планда йорт урынының озынлыгы һәм киңлеге 4 см һәм 2,7 см га тигез. План 1 : 1000 масштабында сызылганлыктан, йорт урынының үлчәмнәре тиндәшле рәвештә $2{,}7 \times 1000$ см $=27$ (м), 4×1000 см $=40$ (м) га тигез.

101. ОХШАШ ҮЗГӘРТҮНЕҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ

Охшаш үзгәртүдә бер туры өстендә ятучы өч нокта: A, B, C ның шулай ук бер туры өстендә ятучы A_1, B_1, C_1 нокталарына күчүе хәрәкәттәге кебек исбатлана. Өстәвенә, әгәр B ноктасы A һәм C нокталары арасында ятса, B_1 ноктасы A_1 һәм C_1 нокталары арасында ята. Моннан болай килеп чыга: ***охшаш үзгәртү турыларны — турыларга, ярымтурыларны — ярымтурыларга, кисемтәләрне кисемтәләргә күчерә.***

Охшаш үзгәртүнең ярымтурылар арасындагы почмакларны саклаганын исбатлыйк.



237 нче рәсем

Чыннан да, k коэффициентлы охшаш үзгәртүдә ABC почмагы $A_1B_1C_1$ почмагына күчсен, ди (237 нче рәсем). ABC почмагын B түбәсенә карата k коэффициентлы гомотетиядә үзгәртик. Ул вакытта A һәм C нокталары A_2 һәм C_2 нокталарына күчәр. A_2BC_2 һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары өченче билге буенча тигез. Өчпочмакларның тигезлегеннән A_2BC_2 һәм $A_1B_1C_1$ почмакларының тигезлеге килеп чыга. Димәк, ABC һәм $A_1B_1C_1$ почмаклары тигез. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

102. ФИГУРАЛАРНЫҢ ОХШАШЛЫГЫ

Охшаш үзгәртүдә берсе икенчесенә күчә торган фигуралар *охшаш фигуралар* дип атала. Фигураларның охшашлыгын тамгалау өчен махсус тамга кулланыла: ∞. $F \infty F'$ язмасы болай укыла: «F фигурасы F' фигурасына охшаш».

Әгәр F_1 фигурасы F_2 фигурасына охшаш, ә F_2 фигурасы F_3 фигурасына охшаш булса, ул вакытта F_1 һәм F_3 фигураларының да охшаш икәнен исбатлыйк.

X_1 һәм Y_1 — F_1 фигурасының ирекле ике ноктасы булсын. F_1 фигурасын F_2 фигурасына күчерүче охшаш үзгәртү бу нокталарны $X_2Y_2 = k_1X_1Y_1$ тигезлеге үтәлердәй X_2, Y_2 нокталарына күчерә.

F_2 фигурасын F_3 фигурасына күчерүче охшаш үзгәртү X_2, Y_2 нокталарын $X_3Y_3 = k_2X_2Y_2$ булырлык X_3, Y_3 нокталарына күчерә.

$$X_2Y_2 = k_1X_1Y_1, \quad X_3Y_3 = k_2X_2Y_2$$

тигезлекләреннән $X_3Y_3 = k_1k_2X_1Y_1$ тигезлеге килеп чыга. Бу исә бер-бер артлы ике охшаш үзгәртүне үтәгәндә F_1 фигурасын F_3 фигурасына үзгәртү охшаш үзгәртү дигән сүз. Димәк, F_1 һәм F_3 фигуралары охшаш. Шуны исбатларга кирәк иде дә. Өчпочмаклар охшашлыгы $\triangle ABC \infty A_1B_1C_1$ язмасында охшаш үзгәртү вакытында тәңгәл килүче түбәләре тиңдәшле урыннарда торалар дип, ягъни A — A_1 гә, B — B_1 гә, C түбәсе C_1 гә күчә дип карала.

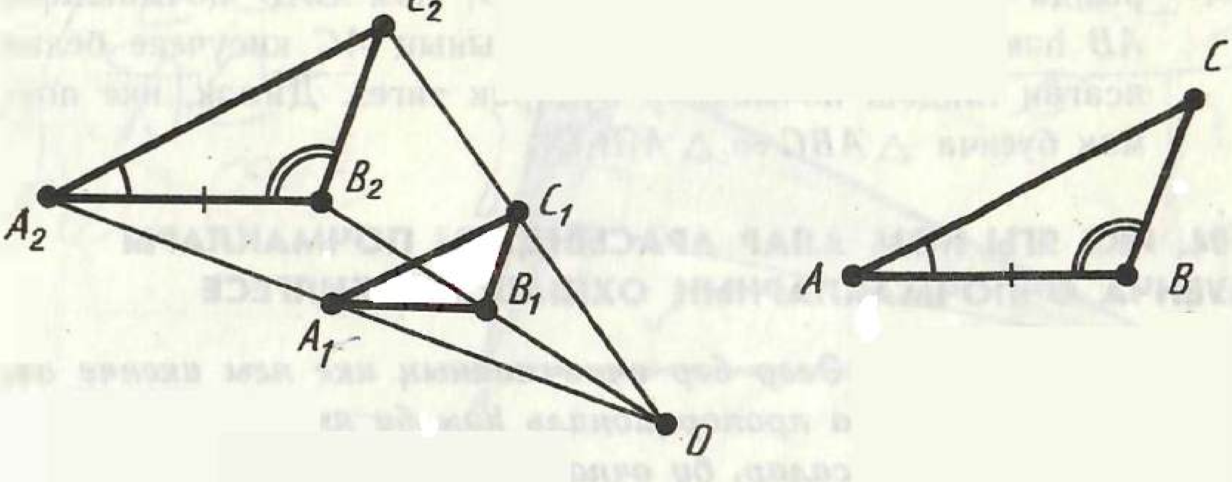
Охшаш үзгәртүнең үзлекләреннән ***охшаш фигураларның тиңдәш почмакларының тигезлеге, ә тиңдәш кисемтәләренең пропорциональлеге килеп чыга.*** Аерым алганда, ***охшаш ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында***

$$\angle A = \angle A_1, \ \angle B = \angle B_1, \ \angle C = \angle C_1;$$

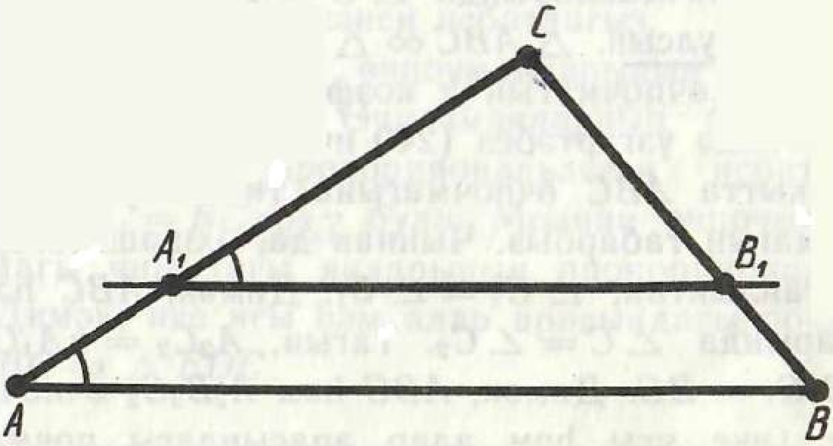
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

103. ӨЧПОЧМАКЛАРНЫҢ ИКЕ ПОЧМАГЫ БУЕНЧА ОХШАШЛЫК БИЛГЕСЕ

Теорема 11.2. ***Әгәр бер өчпочмакның ике почмагы икенче өчпочмакның ике почмагына тигез булса, андый өчпочмаклар охшаш була.***



238 нче рәсем



239 нчы рәсем

Исбатлау. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ булсын. $\triangle ABC \infty A_1B_1C_1$ икәнен исбатлыйбыз.

$k = \frac{AB}{A_1B_1}$ булсын. $A_1B_1C_1$ өчпочмагын k коэффициенты белән охшаш, мәсәлән, гомотетиядә үзгәртәбез (238 нче рәсем). Ул вакытта ABC өчпочмагына тигез булган $A_2B_2C_2$ өчпочмагы табарбыз. Чыннан да, охшаш үзгәртү почмакларны саклаганлыктан, $\angle A_2 = \angle A_1$, $\angle B_2 = \angle B_1$. Димәк, ABC һәм $A_2B_2C_2$ өчпочмакларында $\angle A = \angle A_2$, $\angle B = \angle B_2$. Тагын, $A_2B_2 = kA_1B_1 = AB$. Димәк, ABC һәм $A_2B_2C_2$ өчпочмаклары икенче билге буенча тигез (ягы һәм аның янындагы почмаклары буенча).

$A_1B_1C_1$ һәм $A_2B_2C_2$ өчпочмаклары гомотетик буларак охшашлар, ә $A_2B_2C_2$ һәм ABC өчпочмаклары тигез буларак, охшашлар. Шуңа күрә $A_1B_1C_1$ һәм ABC өчпочмаклары охшаш. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (15). ABC өчпочмагының AB ягына параллель туры AC ягын A_1 ноктасында, ә BC ягын B_1 ноктасында кисә. $\triangle ABC \infty \triangle A_1B_1C$ икәнен исбатлагыз.

Чишү. (239 нчы рәсем). ABC һәм A_1B_1C өчпочмакла-

рында C почмагы уртак, ә CA_1B_1 һәм CAB почмаклары AB һәм A_1B_1 параллель турыларының AC кисүчесе белән ясаган тиндәш почмаклар буларак тигез. Димәк, ике почмак буенча $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

104. ИКЕ ЯГЫ ҺӘМ АЛАР АРАСЫНДАГЫ ПОЧМАКЛАРЫ БУЕНЧА ӨЧПОЧМАКЛАРНЫҢ ОХШАШЛЫК БИЛГЕСЕ

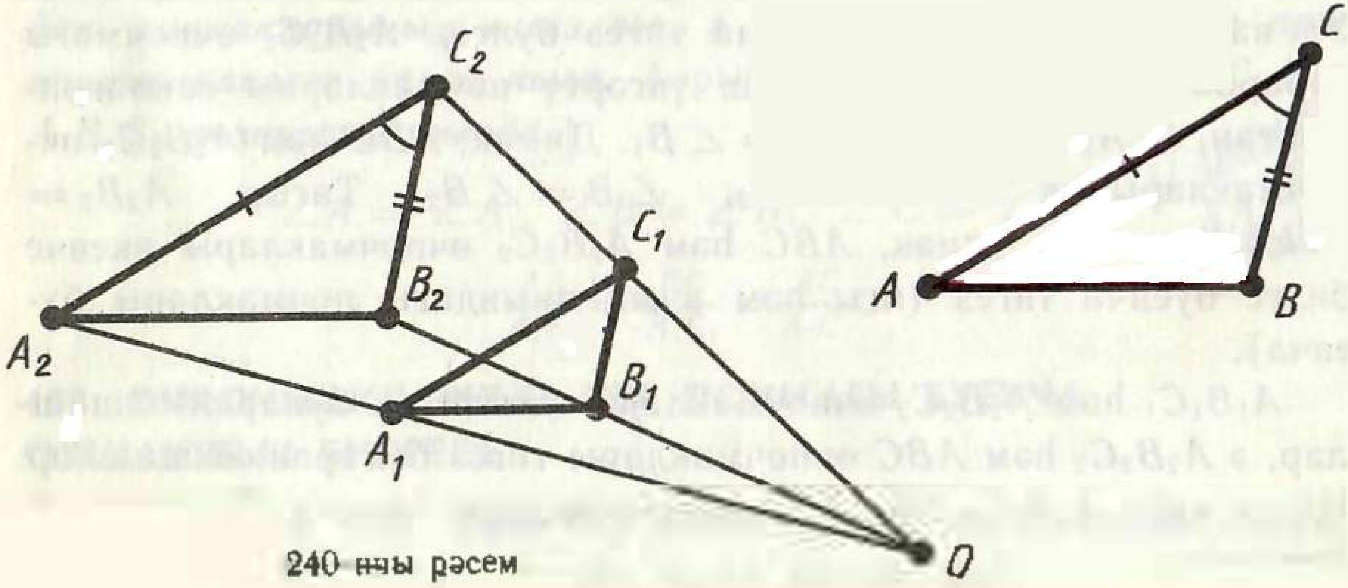
Теорема 11.3. ***Әгәр бер өчпочмакның ике ягы икенче өчпочмакның ике ягына пропорциональ һәм бу яклар арасындагы почмаклар тигез булсалар, бу өчпочмаклар охшаш булалар.***

Исбатлау (11.2 теоремасын исбатлау кебек). ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында $\angle C = \angle C_1$ һәм $AC = kA_1C_1$, $BC = kB_1C_1$ булсын. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ икәнен исбатлыйбыз.

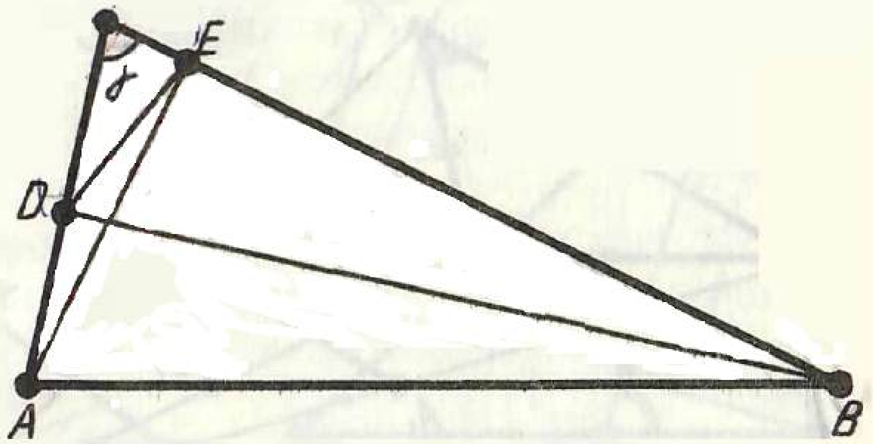
$A_1B_1C_1$ өчпочмагын k коэффициенты белән охшаш, мәсәлән гомотетиядә үзгәртәбез (240 нчы рәсем).

Бу вакытта ABC өчпочмагына тигез булган ниндидер $A_2B_2C_2$ өчпочмагын табарбыз. Чыннан да, охшаш үзгәртү почмакларны саклаганлыктан, $\angle C_2 = \angle C_1$. Димәк, ABC һәм $A_2B_2C_2$ өчпочмакларында $\angle C = \angle C_2$. Тагын, $A_2C_2 = kA_1C_1 = AC$. $B_2C_2 = kB_1C_1 = BC$. Димәк, ABC һәм $A_2B_2C_2$ өчпочмаклары беренче билге (ике ягы һәм алар арасындагы почмагы) буенча тигез.

$A_1B_1C_1$ һәм $A_2B_2C_2$ өчпочмаклары гомотетик булганлыктан, охшашлар, ә $A_2B_2C_2$ һәм ABC өчпочмаклары тигез буларак охшашлар. Шуңа күрә $A_1B_1C_1$ һәм ABC өчпочмаклары охшаш. Теорема исбатланды.



240 нчы рәсем



241 нче рәсем

Мәсьәлә (31). C почмагы кысынкы булган ABC өчпочмагында AE һәм BD биеклекләре үткәрелгән (241 нче рәсем). $\triangle ABC \backsim \triangle EDC$ икәнен исбатлагыз.

Чишү. ABC һәм EDC өчпочмакларының C түбәсе янындагы почмагы уртак. Өчпочмакларның бу почмак янындагы якларының пропорциональлеген исбатлыйк. $EC = AC \cos \gamma$, $DC = BC \cos \gamma$ була. Моннан өчпочмакларның C почмагы янындагы якларының пропорциональлеге аңлашыла. Димәк, ике ягы һәм алар арасындагы почмагы буенча $\triangle ABC \backsim \triangle EDC$.

105. ӨЧПОЧМАКЛАРНЫҢ ӨЧ ЯГЫ БУЕНЧА ОХШАШЛЫК БИЛГЕСЕ

Теорема 11.4. ***Әгәр бер өчпочмакның яклары икенче өчпочмакның якларына пропорциональ булса, андый өчпочмаклар охшаш булалар.***

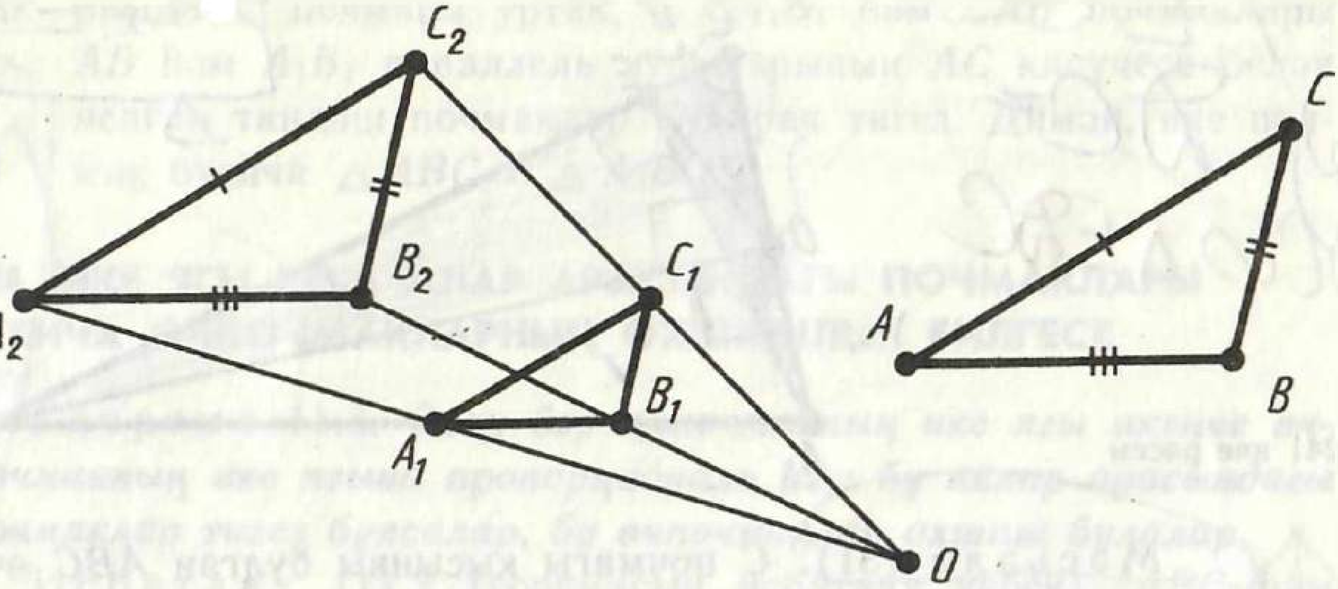
Исбатлау (11.2 теоремасын исбатлау кебек). ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында $AB = kA_1B_1$, $AC = kA_1C_1$, $BC = kB_1C_1$ булсын. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ икәнен исбатлыйбыз.

$A_1B_1C_1$ өчпочмагын k коэффициенты белән охшаш, мәсәлән гомотетиядә үзгәртәбез (242 нче рәсем). Бу вакытта ABC өчпочмагына тигез $A_2B_2C_2$ өчпочмагын табарбыз. Чынлап та, бу өчпочмакларның тиңдәшле яклары тигез:

$$A_2B_2 = kA_1B_1 = AB,\ A_2C_2 = kA_1C_1 = AC,$$
$$B_2C_2 = kB_1C_1 = BC.$$

Димәк, өчпочмаклар өченче билге (өч ягы) буенча тигез.

$A_1B_1C_1$ һәм $A_2B_2C_2$ өчпочмаклары гомотетик буларак, охшашлар, ә $A_2B_2C_2$ һәм ABC өчпочмаклары тигез буларак, ох-



242 нче рәсем

шашлар. Шуңа күрә $A_1B_1C_1$ һәм ABC өчпочмаклары охшаш. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (36). Охшаш өчпочмакларның периметрлары тиңдәш яклары кебек чагыштырылганын исбат итегез.

Чишү. ABC һәм $A_1B_1C_1$ — охшаш өчпочмаклар булсын. Ул вакытта $A_1B_1C_1$ өчпочмагының яклары ABC өчпочмагының якларына пропорциональ була, ягъни $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$. Бу тигезлекләрне буыннап кушсак, табабыз:

$$A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = k(AB + BC + AC).$$

Моннан

$$\frac{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1}{AB + BC + AC} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC},$$

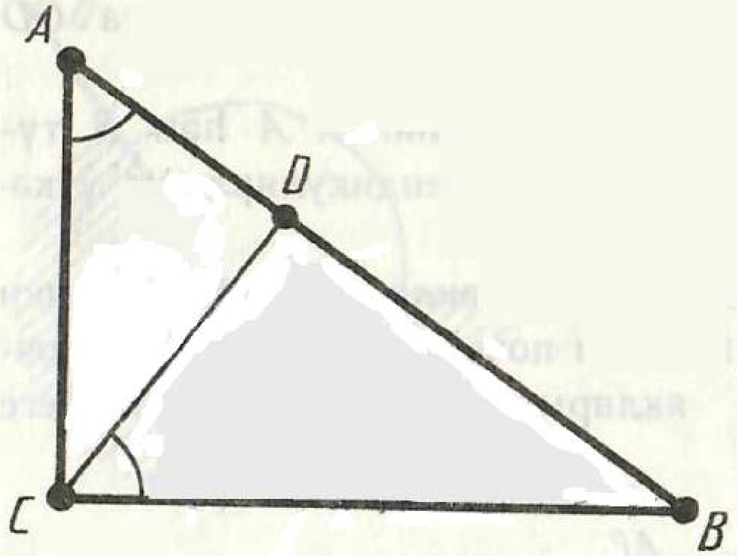
ягъни, өчпочмакларның периметрлары тиңдәш яклар кебек чагыштырылалар.

106. ТУРЫПОЧМАКЛЫ ӨЧПОЧМАКЛАРНЫҢ ОХШАШЛЫГЫ

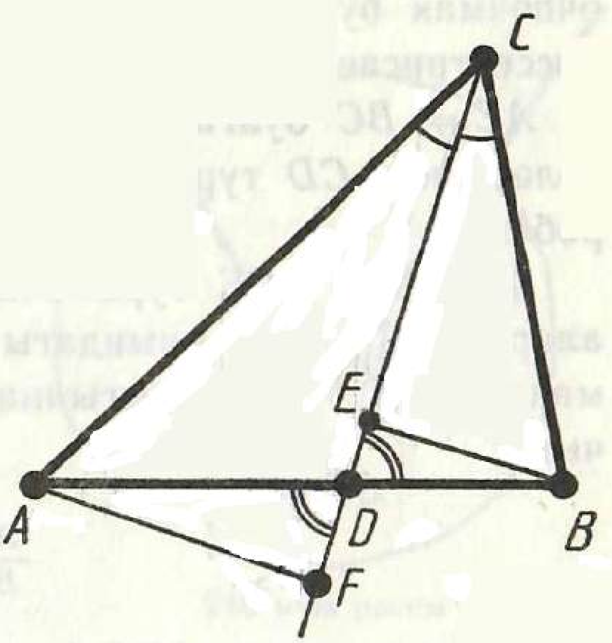
Турыпочмаклы өчпочмакларның бер почмагы туры. Шуңа күрә 11.2 теоремасы буенча ***ике турыпочмаклы өчпочмакның охшаш булуы өчен, аларның берәр кысынкы почмакларының тигезлеге җитә.***

Турыпочмаклы өчпочмаклар охшашлыгының бу билгесенә таянып, өчпочмаклардагы кайбер бәйләнешләрне исбатлыйбыз.

ABC өчпочмагы C почмагы туры булган турыпочмаклы өч-



243 нче рәсем



244 нче рәсем

почмак булсын. Туры почмак түбәсеннән CD биеклеген үткәрәбез (243 нче рәсем).

ABC һәм CBD өчпочмакларының B түбәсе янындагы почмаклары уртак. Димәк, алар охшаш: $\triangle ABC \infty \triangle CBD$. Өчпочмакларның охшашлыгыннан тиңдәшле якларының пропорциональлеге чыга:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}, \text{ яки } BC = \sqrt{AB \cdot BD}.$$

Бу бәйләнешне гадәттә болай әйтәләр: ***турыпочмаклы өчпочмакның катеты гипотенуза һәм бу катетның гипотенузага проекциясе арасында урта пропорциональ була.***

ACD һәм CBD өчпочмаклары шулай ук охшаш. Аларның A һәм C түбәләре янындагы кысынкы почмаклары тигез. Бу өчпочмакларның охшашлыгыннан аларның якларының пропорциональлеге килеп чыга:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}, \text{ яки } CD = \sqrt{AD \cdot BD}.$$

Бу бәйләнешне гадәттә болай әйтәләр: ***турыпочмаклы өчпочмакның туры почмагы түбәсеннән үткәрелгән биеклеге катетларның гипотенузага проекцияләре арасында урта пропорциональ була.***

Өчпочмак биссектрисасының түбәндәге үзлеген исбатлыйбыз: ***өчпочмакның биссектрисасы каршы яткан якны калган ике якка пропорциональ кисәкләргә бүлә.***

$CD - ABC$ өчпочмагының биссектрисасы булсын (244 нче рәсем). Әгәр ABC өчпочмагы нигезе AB булган тигезьянлы

өчпочмак булса, әйтелгән үзлек дөрес, чөнки бу очракта CD биссектрисасы медиана да булып тора.

$AC \neq BC$ булган гомуми очракны карыйбыз. A һәм B түбәләреннән CD турысына AF һәм BE перпендикулярлары үткәрәбез.

ACF һәм BCE турыпочмаклы өчпочмаклары охшаш, чөнки аларның C түбәсе янындагы кысынкы почмаклары тигез. Өчпочмакларның охшашлыгыннан якларының пропорциональлеге чыга:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AF}{BE}.$$

Турыпочмаклы ADF һәм BDE өчпочмаклары шулай ук охшаш. Аларның D түбәсе янындагы почмаклары вертикаль буларак тигез. Өчпочмакларның охшашлыгыннан якларының пропорциональлеге килеп чыга:

$$\frac{AF}{BE}=\frac{AD}{BD}.$$

Бу тигезлекне алдагы тигезлек белән чагыштырып, табабыз:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD} \text{ яки } \frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD},$$

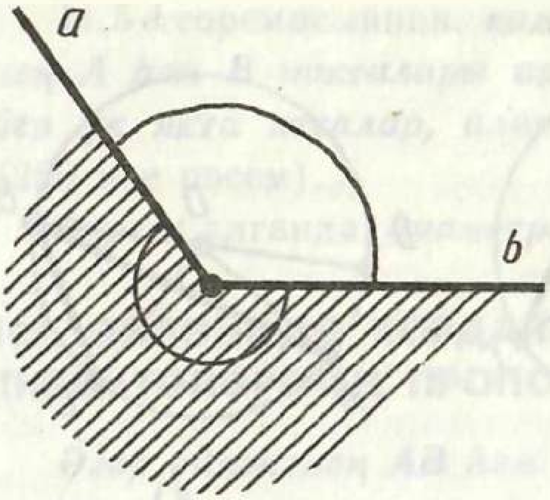
ягъни, AD һәм BD кисемтәләре AC һәм BC якларына пропорциональ. Шуны исбатларга кирәк иде.

107. ӘЙЛӘНӘГӘ КАМАУЛЫ ПОЧМАКЛАР

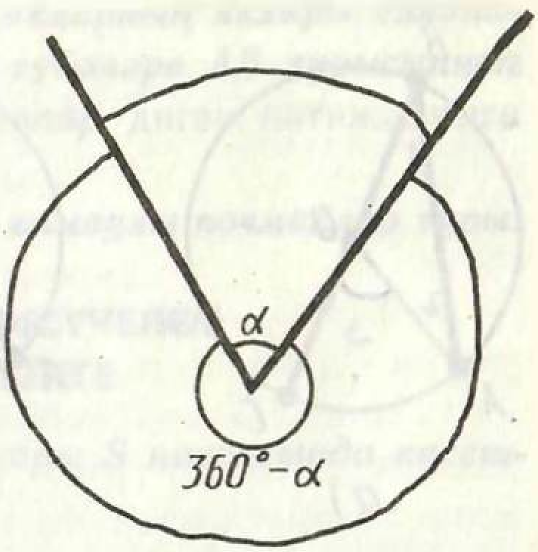
Почмак яссылыкны ике кисәккә бүлә. Кисәкләрнең һәркайсы *яссы почмак* дип атала. 245 нче рәсемдә яклары a һәм b булган ике яссы почмакның берсе штрихланган. Яклары уртак булган яссы почмаклар *әстәмә* дип аталалар.

Әгәр яссы почмак ярымъяссылык өлеше булса, ул вакытта аның градуслы үлчәме дип гадәттәге шул ук яклы почмакның градуслы үлчәме атала. Әгәр яссы почмак эчендә ярымъяссылык булса, ул вакытта аның градуслы үлчәме итеп $360° - \alpha$ кабул ителгән. Монда α әстәмә яссы почмакның градуслы үлчәме (246 нчы рәсем).

Түбәсе әйләнә үзәгендә булган яссы почмак әйләнәнең *үзәк почмагы* дип атала. Әйләнәнең яссы почмак эченә кергән бу



245 нче рәсем



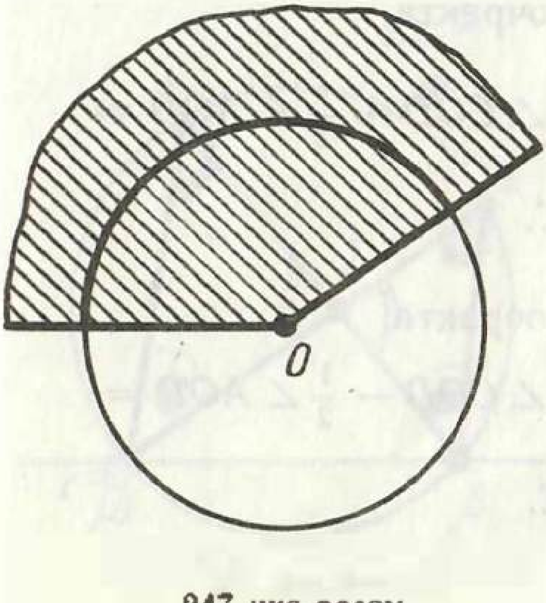
246 нчы рәсем

үзәк почмакка тиңдәшле кисәге әйләнә *дугасы* дип атала (247 нче рәсем). Әйләнә *дугасының градуслы үлчәме* дип тиңдәшле үзәк почмакның градуслы үлчәме атала

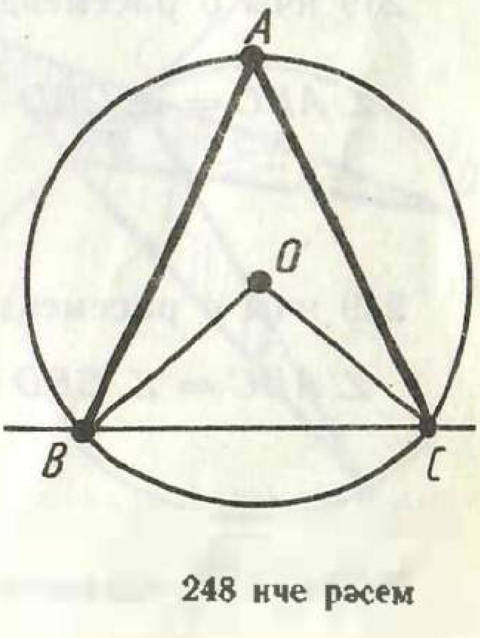
Түбәсе әйләнәдә яткан, ә яклары әйләнәне кисеп үткән почмак *әйләнәгә камаулы почмак* дип атала. 248 нче рәсемдәге *BAC* почмагы әйләнәгә камаулы. Аның түбәсе *A* әйләнәдә ята, яклары әйләнәне *B* һәм *C* нокталарында кисеп үтә. *A* почмагы *BC* хордасына таяна дип тә әйтәләр. *BC* турысы әйләнәне ике дугага бүлә. Бу дугаларның *A* ноктасын эченә алмаган тиңдәш үзәк почмагы *бирелгән камаулы почмакка тиңдәш* үзәк почмак дип атала.

Теорема 11.5. ***Әйләнәгә камаулы почмак тиңдәш үзәк почмакның яртысына тигез.***

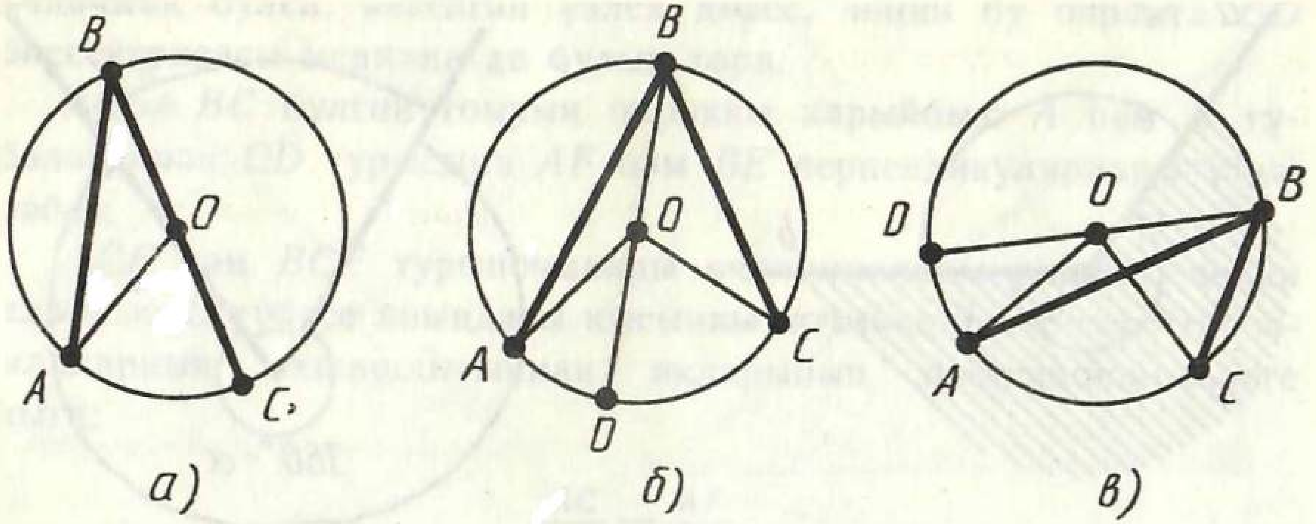
Исбатлау. Башта камаулы почмакның бер ягы әйләнә үзә-



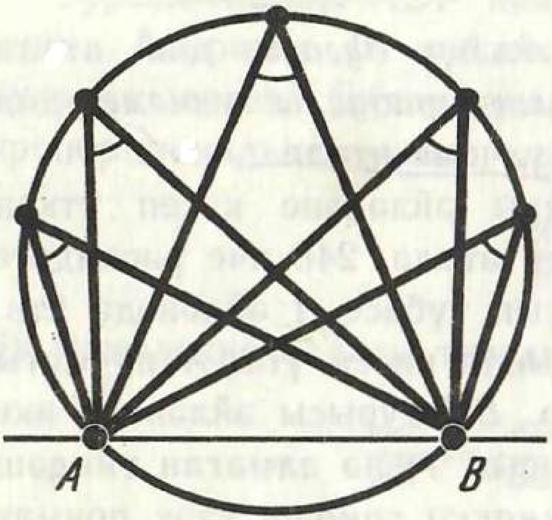
247 нче рәсем



248 нче рәсем



249 нчы рәсем



250 нче рәсем

ге аша үткән аерым очракны карыйбыз (249 нчы рәсем, *а*). *AOB* өчпочмагы тигезьянлы, чөнки аның *OA* һәм *OB* яклары радиус буларак, тигез. Шунлыктан өчпочмакның *A* һәм *B* почмаклары тигез. Ә аларның суммасы өчпочмакның *O* түбәсе янындагы тышкы почмакка тигез булганлыктан, өчпочмакның *B* почмагы *AOC* почмагының яртысына тигез. Шуны исбатларга кирәк иде.

Гомуми очрак ярдәмче *BD* диаметрын үткәреп каралган аерым очракка китерелә (249 нчы *б, в* рәсемнәре).

249 нчы *б* рәсемендә күрсәтелгән очракта,

$$\angle ABC = \angle CBD + \angle ABD = \frac{1}{2}\angle COD + \frac{1}{2}\angle AOD =$$

$$= \frac{1}{2}\angle AOC.$$

249 нчы *в* рәсемендә күрсәтелгән очракта,

$$\angle ABC = \angle CBD - \angle ABD = \frac{1}{2}\angle COD - \frac{1}{2}\angle AOD =$$

$$= \frac{1}{2}\angle AOC.$$

Теорема тулысынча исбатланды.

11.5 теоремасыннан, ***камаулы почмакларның яклары әйләнәнең A һәм B нокталары аша үтсә, ә түбәләре AB турысыннан бер үк якта ятсалар, алар тигез булалар*** дигән нәтиҗә чыга (250 нче рәсем).

Аерым алганда, ***диаметрга таянган камаулы почмаклар туры.***

108. ӘЙЛӘНӘДӘ ХОРДАЛАР ҺӘМ КИСҮЧЕЛӘР КИСЕМТӘЛӘРЕНЕҢ ПРОПОРЦИОНАЛЬЛЕГЕ

Әгәр әйләнәнең AB һәм CD хордалары S ноктасында кисешсәләр,

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS$$

була.

Башта, ASD һәм CSB өчпочмакларының охшашлыгын исбатлыйк (251 нче рәсем). 11.5 теоремасының нәтиҗәсе буенча камаулы DCB һәм DAB почмаклары тигез. ASD һәм BSC почмаклары вертикаль буларак, тигез. Күрсәтелгән почмакларның тигезлегеннән ASD һәм CSB өчпочмакларының охшашлыгы чыга.

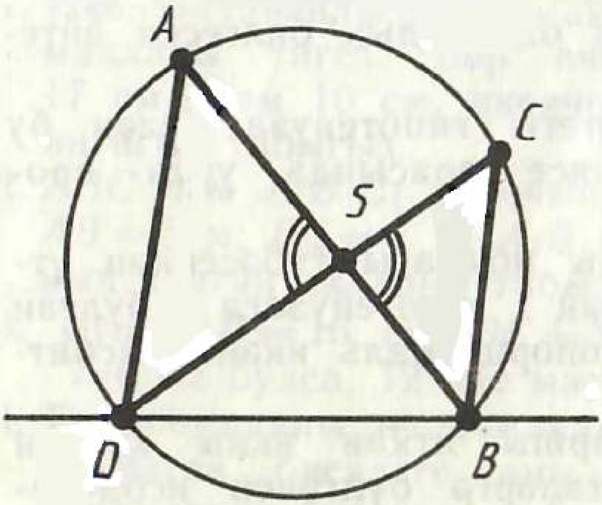
Өчпочмаклар охшашлыгыннан

$$\frac{DS}{BS} = \frac{AS}{CS}$$

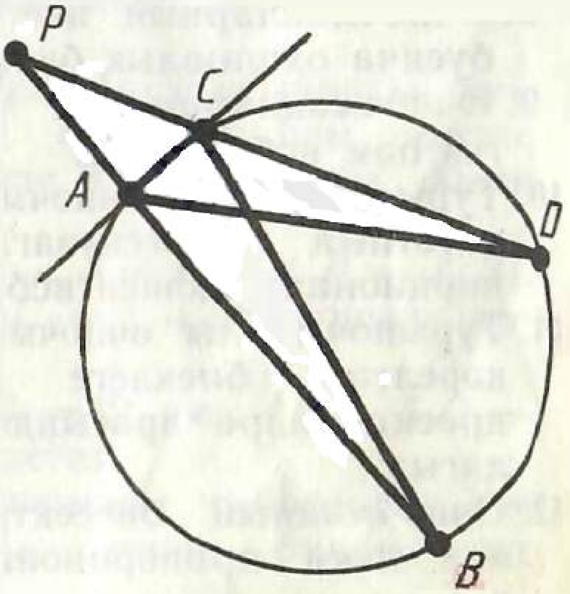
пропорциясе чыга. Моннан

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$

Шуны исбатларга кирәк иде.



251 нче рәсем



252 нче рәсем

Әгәр P ноктасыннан әйләнәне тиңдәшле рәвештә A, B һәм C, D нокталарында кисеп үтүче ике кисүче үткәрелгән булса,

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP$$

була.

A һәм *C* нокталары — кисүче белән әйләнә кисешү нокталарының *P* ноктасына якынрак ятканнары булсын (252 нче рәсем). *PAD* һәм *PCB* өчпочмаклары охшаш. Аларның *P* түбәсе янындагы почмаклары уртак, ә *B* һәм *D* түбәләре янындагы почмаклары әйләнәгә камаулы почмакларның үзлекләре буенча тигезләр. Өчпочмаклар охшашлыгыннан түбәндәге пропорция чыга:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}.$$

Моннан $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Шуны исбатларга кирәк иде.

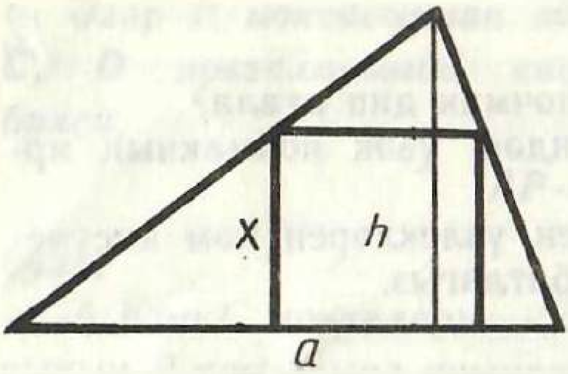
? КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Нәрсә ул охшаш үзгәртү?
2. Нәрсә ул гомотетия (гомотетиянең үзәге, гомотетиянең коэффициенты)?
3. Гомотетиянең охшаш үзгәртү икәнен исбатлагыз.
4. Сез охшаш үзгәртүнең нинди үзлекләрен беләсез? Охшаш үзгәртү ярымтурылар арасындагы почмакларны саклаганын исбатлагыз.
5. Нинди фигуралар охшаш дип аталалар?
6. Фигураларның охшашлыгы нинди тамга белән тамгалана? Өчпочмакларның охшашлыгы ничек языла?
7. Өчпочмакларның ике почмагы буенча охшашлык билгесен әйтегез һәм исбатлагыз.
8. Өчпочмакларның ике ягы һәм алар арасындагы почмагы буенча охшашлык билгесен әйтегез һәм исбатлагыз.
9. Өчпочмакларның өч ягы буенча охшашлык билгесен әйтегез һәм исбатлагыз.
10. Турыпочмаклы өчпочмакның катеты гипотенуза белән бу катетның гипотенузага проекциясе арасында урта пропорциональ икәнен исбатлагыз.
11. Турыпочмаклы өчпочмакның туры почмагы түбәсеннән үткәрелгән биеклеге катетларның гипотенузага булган проекцияләре арасында урта пропорциональ икәнен исбатлагыз.
12. Өчпочмакның биссектрисасы каршы яткан якны калган ике якка пропорциональ кисемтәләргә бүлгәнен исбатлагыз.

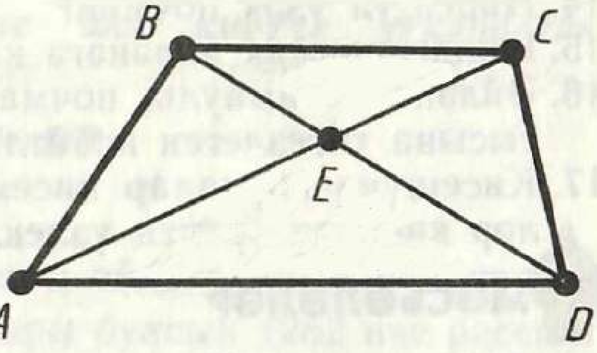
13. Нәрсә ул яссы почмак?
14. Нәрсә ул үзәк почмак?
15. Нинди почмак әйләнәгә камаулы почмак дип атала?
16. Әйләнәгә камаулы почмакның тиңдәш үзәк почмакның яртысына тигезлеген исбатлагыз.
17. Кисешүче хордалар кисемтәләренең үзлекләрен һәм кисүчеләр кисемтәләренең үзлекләрен исбатлагыз.

Мәсьәләләр

1. Гомотетиядә X ноктасы X' ноктасына, ә Y ноктасы Y' ноктасына күчә. Әгәр X, X', Y, Y' нокталары бер турыда ятмаса гомотетия үзәген ничек табарга?
2. Гомотетиядә X ноктасы X' ноктасына күчә. Әгәр гомотетия коэффициенты 2 гә тигез булса, гомотетия үзәген төзегез.
3. Өчпочмак сызыгыз. Аның түбәләренең берсен гомотетия үзәге итеп, ә гомотетия коэффициентын 2 гә тигез дип алып, бу өчпочмакка гомотетик өчпочмак төзегез.
4. 236 нчы рәсемдә $1:1000$ масштабында йорт планы сурәтләнгән. Йортның үлчәмнәрен (озынлыгын һәм киңлеген) билгеләгез.
5. Өчпочмакка охшаш фигура нинди була?
6. Охшаш ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында $\angle A=30°$, $AB=1$ м, $BC=2$ м, $B_1C_1=3$ м. A_1 почмагы һәм A_1B_1 ягы нәрсәгә тигез?
7. Әйләнәгә охшаш фигураның әйләнә булганын исбатлагыз.
8*. Почмак һәм аның эчендә A ноктасы бирелгән. Почмакның якларына орынучы һәм A ноктасы аша үтүче әйләнә төзегез.
9*. Ике түбәсе бирелгән өчпочмакның бер ягында, ә калган икесе өчпочмакның башка якларында ята торган өчпочмакка камаулы квадрат төзегез.
10. Нигезләренә каршы ятучы түбәләре янындагы почмаклары тигез булган тигезьянлы өчпочмакларның охшаш икәнен исбатлагыз.
11. Ике тигезьянлы өчпочмакның ян яклары арасындагы почмаклары тигез. Бер өчпочмакның ян ягы һәм нигезе 17 см һәм 10 см, икенчесенең нигезе 8 см га тигез. Аның ян ягын табыгыз.
12. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында: $\angle A=A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $AB=5$ м, $BC=7$ м, $A_1B_1=10$ м, $A_1C_1=8$ м. Өчпочмакларның калган якларын табыгыз.
13. Әгәр $AB=16$ см, $BC=20$ см, $A_1B_1=12$ см, $AC-A_1C_1=$ $=6$ см булса, 12 нче мәсьәләне чишегез.
14. Турыпочмаклы өчпочмакның туры почмагы түбәсеннән төшерелгән биеклеге аны бирелгәнгә охшаш булган ике өчпочмакка бүлгәнен исбатлагыз.



253 нче рәсем



254 нче рәсем

15. ABC өчпочмагында AB ягына параллель итеп үткәрелгән туры AC ягын A_1 ноктасында, ә BC ягын B_1 ноктасында кисеп үтә. ABC һәм A_1B_1C өчпочмакларының охшаш икәнен исбатлагыз.

16. Нигезе a һәм биеклеге h булган өчпочмак эченә, ике түбәсе нигездә, ә калган икесе ян якларында ятарлык итеп, квадрат камалган (253 нче рәсем). Квадратның ягын исәпләгез.

17. ABC өчпочмагында AB ягына параллель итеп үткәрелгән туры C түбәсеннән башлап AC ягын $m:n$ чагыштырмасында бүлә. BC ягын ул нинди чагыштырмада бүлә?

18. ABC өчпочмагында AC ягына параллель итеп DE кисемтәсе үткәрелгән (кисемтәнең D очы AB ягында, ә E BC ягында ята). Әгәр $AB=16$ см, $AC=20$ см һәм $DE=15$ см булса, AD ны табыгыз.

19. Әгәр 18 нче мәсьәләдә $AC:DE=55:28$ икәне билгеле булса, $AD:BD$ чагыштырмасын табыгыз.

20. Әгәр 1) $AC=20$ см, $AB=17$ см һәм $BD=11{,}9$ см; 2) $AC=18$ дм, $AB=15$ дм һәм $AD=10$ дм булса, 18 нче мәсьәләдәге DE кисемтәсенең озынлыгын табыгыз.

21. $ABCD$ трапециясенең диагональләре E ноктасында кисешәләр (254 нче рәсем). BCE һәм DAE өчпочмакларының охшашлыгын исбатлагыз.

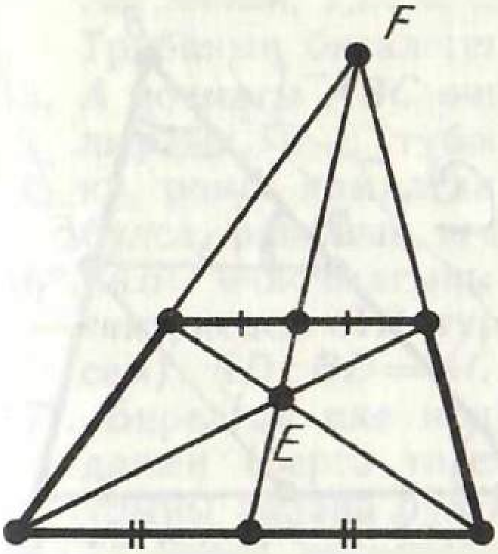
22. Әгәр трапециянең нигезләре $m:n$ чагыштырмасында булса, бер диагональнең икенче диагональ белән кисешү ноктасы бүлүдән килеп чыккан кисемтәләрнең чагыштырмасын табыгыз.

23. Трапециянең диагональләре кисешү ноктасы аша үтүче туры нигезләренең берсен $m:n$ чагыштырмасында бүлә. Ул икенче нигезне нинди чагыштырмада бүләр?

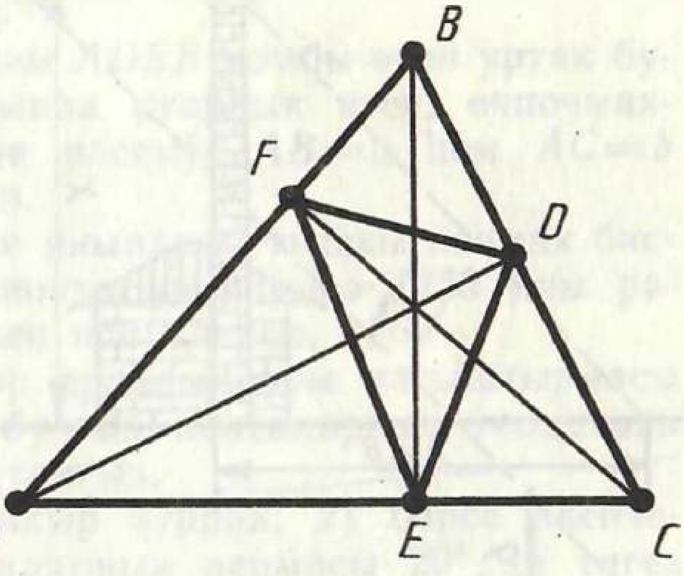
24. AC диагонале бирелгән $ABCD$ трапециясендә ABC һәм ACD почмаклары тигез. BC һәм AD нигезләре тиңдәшле рәвештә 12 м һәм 27 м булса, AC диагоналең табыгыз.

25. Трапециянең нигезләренә параллель булган туры бер ян якны $m:n$ чагыштырмасында бүлә. Ул икенче ян якны нинди чагыштырмада бүләр?

26. $ABCD$ трапециясенең AB һәм CD ян якларының дәвамнары



255 нче рәсем



256 нчы рәсем

E ноктасында кисешәләр. Әгәр $AB=5$ см, $BC=10$ см, $CD=6$ см, $AD=15$ см булса, AED өчпочмагының якларын табыгыз.

27. Әгәр 26 нчы мәсьәләдә $BC=7$ см, $AD=21$ см һәм трапециянең биеклеге 3 см булса, AED өчпочмагының биеклеген табыгыз.

28*. Трапециянең диагональләре E ноктасында, ә ян якларының дәвамнары F ноктасында кисешәләр. EF турысы нигезләрне урталай бүлгәнен исбатлагыз (255 нче рәсем).

29*. Нигезе AC һәм каршы яткан почмагы $36°$ булган тигезьянлы ABC өчпочмагында AD биссектрисасы үткәрелгән.
1) ABC һәм CAD өчпочмакларының охшашлыгын исбатлагыз.
2) Әгәр ABC өчпочмагының ян ягы a булса, аның нигезен табыгыз.

30. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларының B һәм B_1 почмаклары тигез. ABC өчпочмагының B почмагы янындагы яклары, $A_1B_1C_1$ өчпочмагының B_1 почмагы янындагы якларыннан 2,5 тапкыр зуррак. Әгәр AC һәм A_1C_1 якларының суммасы 4,2 гә тигез булса, бу якларны табыгыз.

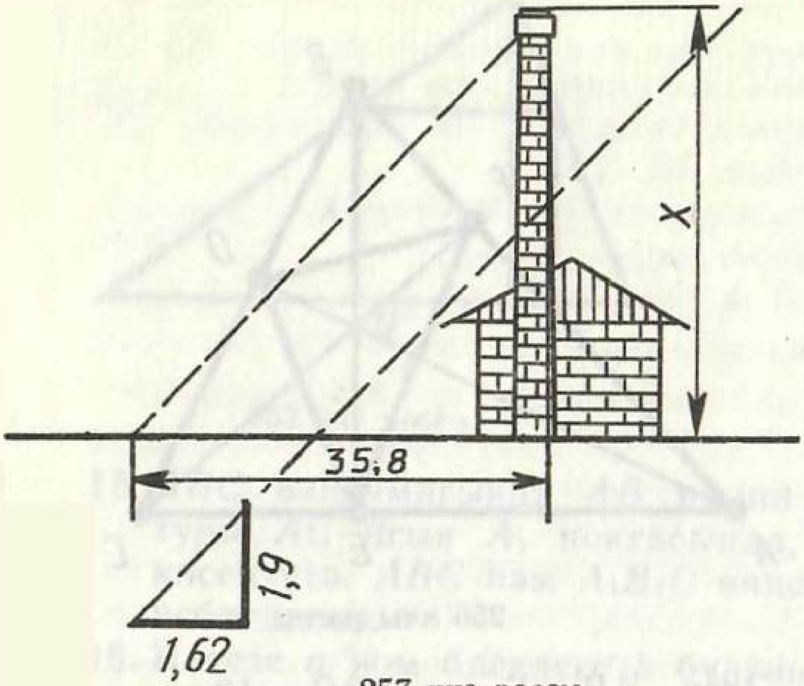
31. C почмагы кысынкы булган ABC өчпочмагында AE һәм BD биеклекләре үткәрелгән. $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ икәнен исбатлагыз.

32*. Кысынкы почмаклы ABC өчпочмагында AD, BE, CF биеклекләре үткәрелгән. ABC өчпочмагының почмаклары билгеле булганда, DEF өчпочмагының почмакларын табыгыз (256 нчы рәсем).

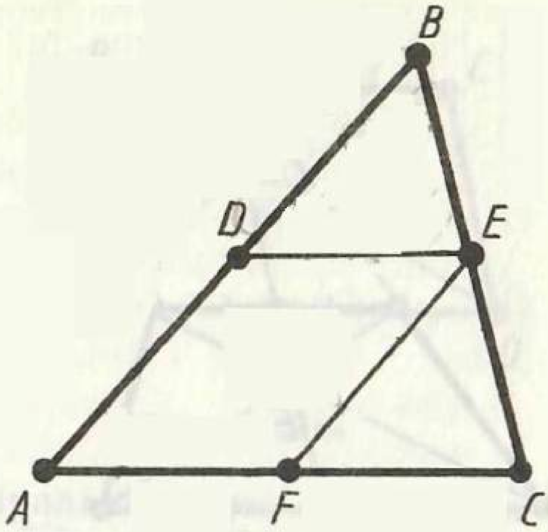
33*. 32 нче мәсьәләдәге DEF өчпочмагының биссектрисалары ABC өчпочмагының биеклекләрендә ятканын исбатлагыз.

34. Ике тигезьяклы өчпочмак охшаш буламы?

35. 1) $AB=1$ м, $AC=1{,}5$ м, $BC=2$ м; $A_1B_1=10$ см, $A_1C_1=15$ см, $B_1C_1=20$ см;



257 нче рәсем



258 нче рәсем

2) $AB=1$ м, $AC=2$ м, $BC=1{,}5$ м; $A_1B_1=8$ дм, $A_1C_1=$ $=16$ дм, $B_1C_1=12$ дм;

3) $Ab=1$ м, $AC=2$ м, $BC=1{,}25$ м; $A_1B_1=10$ см, $A_1C_1=$ $=20$ см, $B_1C_1=13$ см булса, ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары охшаш булырмы?

36. Охшаш өчпочмакларның периметрлары тиңдәш яклары кебек чагыштырылганын исбатлагыз.

37. Бер өчпочмакның яклары 0,8 м, 1,6 м һәм 2 м га тигез. Аңа охшаш өчпочмакның периметры 5,5 м га тигез. Икенче өчпочмакның якларын табыгыз.

38. Бер өчпочмакның периметры аңа охшаш өчпочмак периметрының $\frac{11}{13}$ ен тәшкил итә. Ике тиңдәш якның аермасы 1 м га тигез. Бу якларны табыгыз.

39. Берсенең 40° лы, ә икенчесенең: 1) 50° лы; 2) 60° лы почмагы булган ике турыпочмаклы өчпочмак охшашмы?

40. Турыпочмаклы өчпочмакның гипотенузасына төшерелгән биеклекнең нигезе аны 9 см һәм 16 см озынлыгындагы кисемтәләргә бүлә. Өчпочмакның якларын табыгыз.

41. Турыпочмаклы өчпочмакның гипотенузасы 25 см га, ә катетларның берсе 10 см га тигез. Икенче катетның гипотенузага проекциясен табыгыз.

42. Охшаш өчпочмакларның тиңдәшле биеклекләре тиңдәшле яклары кебек чагыштырылганын исбатлагыз.

43. Турыпочмаклы өчпочмакның катетлары $m:n$ чагыштырмасында булалар. Катетларның гипотенузага проекцияләре ничек чагыштырылалар?

44. Фабрика трубасының күләгәсе 35,8 м га тигез; шушы ук вакытта җиргә вертикаль кадалган һәм биеклеге 1,9 м бул-

ган казык, 1,62 м озынлыктагы күләгә бирә (257 нче рәсем). Трубаның биеклеген табыгыз.

45. A почмагы ABC өчпочмагы һәм $ADEF$ ромбы өчен уртак булырлык, ә E түбәсе BC ягында ятарлык итеп, өчпочмакка ромб камалган (258 нче рәсем). $AB=c$ һәм $AC=b$ булса, ромбның ягын табыгыз.

46*. ABC өчпочмагының C түбәсе янындагы тышкы почмак биссектрисасы AB турысын D ноктасында кисә (259 нчы рәсем). $AD:BD=AC:BC$ икәнен исбатлагыз.

47*. Бирелгән ике ноктага кадәр ераклыклары чагыштырмасы даими (бергә тигез түгел) булган нокталарның геометрик урыны әйләнә булганын исбатлагыз.

48. 1) Берсе икенчесеннән 5 тапкыр зуррак; 2) берсе икенчесеннән 100° ка зуррак; 3) аларның аермасы 20° ка тигез икәнен белеп, өстәмә яссы почмакларны табыгыз.

49. A, B, C нокталары әйләнәдә яталар. ABC почмагы 30° ка, ә әйләнәнең диаметры 10 см га тигез булса, AC хордасы күпмегә тигез булыр?

50. A, B, C нокталары әйләнәдә яталар. Әгәр AC хордасы әйләнә радиусына тигез булса, ABC почмагы күпмегә тигез булыр? (Ике очрак.)

51. Турыпочмаклы өчпочмакны камаучы әйләнәнең үзәге гипотенузаның уртасында ятканын исбатлагыз.

52. Турыпочмаклы өчпочмакның гипотенузасына үткәрелгән медианасы аны тигезьянлы ике өчпочмакка бүлгәнен исбатлагыз.

53. Гипотенузасы һәм туры почмак түбәсеннән гипотенузага төшерелгән биеклеге буенча турыпочмаклы өчпочмак төзегез.

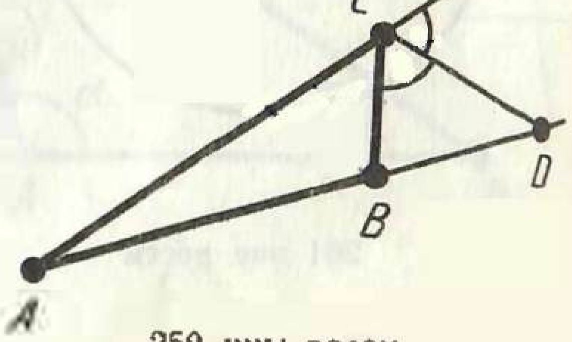
54. Әйләнәдә A, B, C, D нокталары билгеләнгән. Әгәр ABC почмагы α га тигез булса, ADC почмагы күпмегә тигез булыр? (Ике очрак.)

55. Әйләнәнең AD һәм BC хордалары кисешәләр. ABC почмагы 50° ка, ACD почмагы 80°ка тигез. CAD почмагын табыгыз.

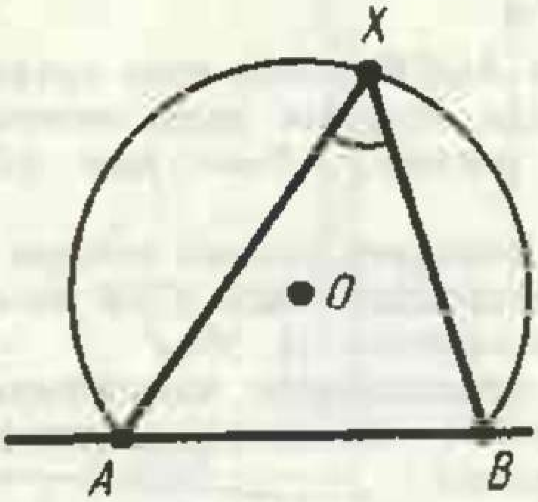
56. Әйләнәгә камаулы дүртпочмакның каршы яткан почмаклары суммасы 180° ка тигез икәнен исбатлагыз.

57. Яклары бирелгән ике нокта аша үтүче туры почмаклар түбәләренең геометрик урыны әйләнә булганын исбатлагыз.

58. Яклары бирелгән ике нокта аша үтүче, ә түбәләре бу нокталарны тоташтыручы турыдан бер якта ятучы, градуслы ул-



259 нчы рәсем



260 нчы рәсем

чәме бирелгән почмаклар түбәләренең геометрик урыны — очлары әлеге нокталарда яткан әйләнә дугасы булганын исбатлагыз (260 нчы рәсем).

59. Әйләнәнең бер үк ноктасыннан үткәрелгән хорда белән орынма арасындагы почмак кысынкы булса, ул почмак хорданың очларына үткәрелгән радиуслар арасындагы почмакның яртысына тигезлеген исбатлагыз (261 нче рәсем).

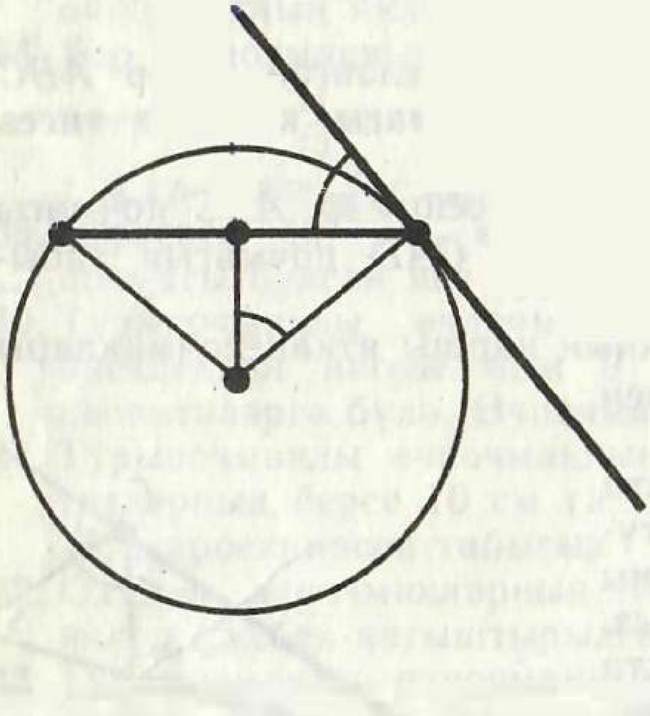
60. Ягы, бу якка каршы яткан почмагы һәм бу почмак түбәсеннән төшерелгән биеклеге буенча өчпочмак төзегез.

61. Әйләнәдәге C ноктасыннан AB диаметрына CD перпендикуляры үткәрелгән. $CD^2 = AD \cdot BD$ икәнен исбатлагыз.

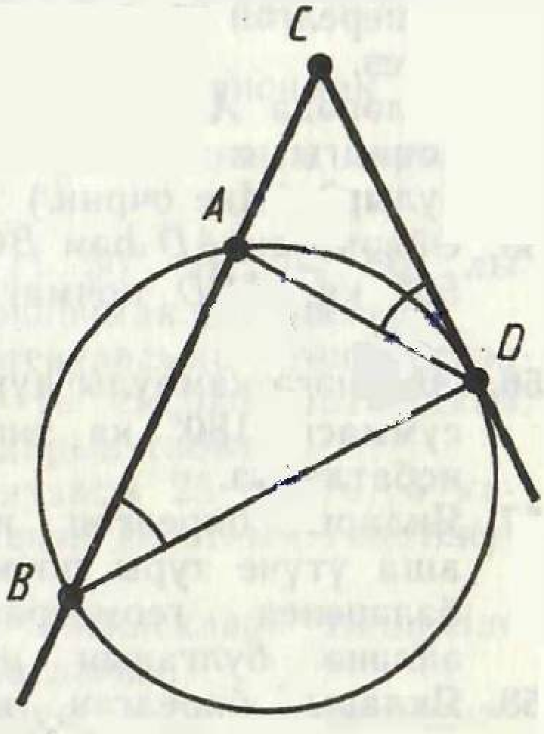
62. Әйләнә кисүчесенең кисемтәләре тапкырчыгышы шул ук ноктадан үткәрелгән орынма квадратына тигез икәнен исбатлагыз: $AC \cdot BC = CD^2$ (262 нче рәсем).

63. Әгәр җирнең радиусы 6370 км булса, Җирдән 4 км биеклектә оча торган самолеттан нинди ераклык күренер?

64. Биеклеге 537 м булган Останкинодагы телебашнядан күренү горизонтының радиусын исәпләгез.



261 нче рәсем



262 нче рәсем

§ 12. ӨЧПОЧМАКЛАРНЫ ЧИШҮ

109. КОСИНУСЛАР ТЕОРЕМАСЫ

Теорема 12.1 (косинуслар теоремасы). ***Өчпочмакның теләсә кайсы ягының квадраты калган ике ягының квадратлары суммасыннан бу яклар белән алар арасындагы почмак косинусы тапкырчыгышының икеләтелгәнен алганга тигез була.***

Исбатлау. ABC — бирелгән өчпочмак булсын (263 нче рәсем). $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$ икәнен исбатлыйк.

$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$ векторлы тигезлеген язабыз. Бу тигезлекне скаляр квадратка күтәреп, табабыз:

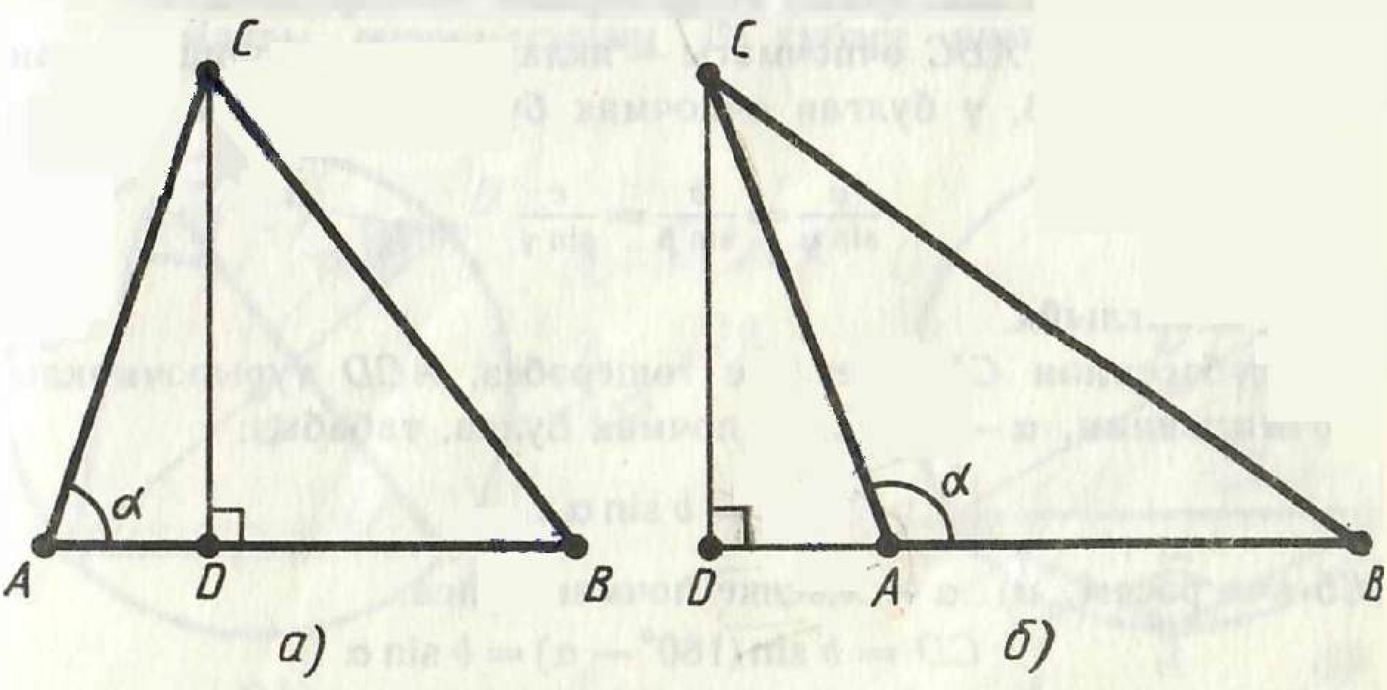
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC},$$

яки

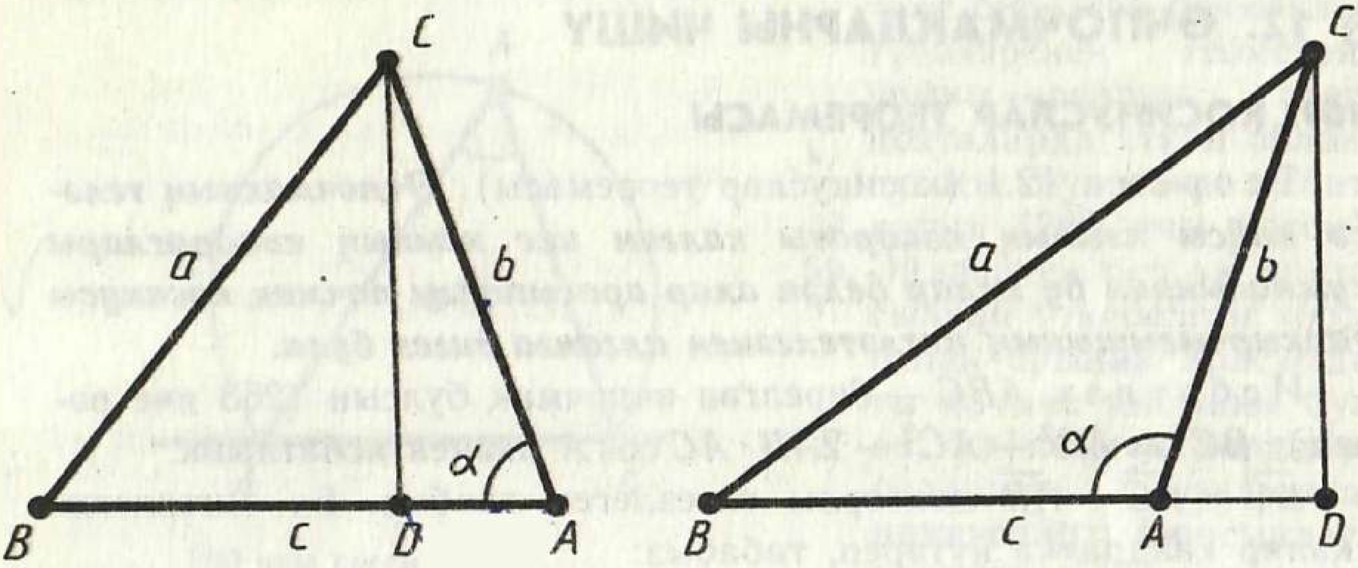
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A,$$

Теорема исбатланды.

$AC \cdot \cos A$ абсолют зурлыгы буенча AC ягының AB ягына (263 нче рәсем, *а*) яки аның дәвамына (263 нче рәсем, *б*) булган проекциясе AD га тигез икәнен искәртик. $AC \cdot \cos A$ ның тамгасы A почмагына бәйле: A почмагы кысынкы булса, «+», A почмагы җәенке булса, «—». Моннан шундый нәтиҗә чыга: ***өчпочмак ягының квадраты калган ике ягының квадратлары суммасына «±» шул якларның берсе белән икенчесе проекциясенең икеләтелгән тапкырчыгышына тигез була. Каршы яткан почмак җәенке булганда «+» тамгасы, ә кысынкы булганда «—» тамгасы алырга кирәк.***



263 нче рәсем



264 нче рәсем

Мәсьәлә (7). Өчпочмакның яклары a, b, c бирелгән. Өчпочмакның c ягына төшерелгән биеклеген табыгыз.

Чишү. $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2c \cdot AD$ (264 нче рәсем).

Моннан $AD = \pm\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$. Пифагор теоремасы буенча

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2}.$$

110. СИНУСЛАР ТЕОРЕМАСЫ

Теорема 12.2 (синуслар теоремасы). ***Өчпочмакның яклары каршы яткан почмакларның синусларына пропорциональ.***

Исбатлау. ABC өчпочмагы — яклары a, b, c, каршы яткан почмаклары α, β, γ булган өчпочмак булсын (265 нче рәсем).

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

икәнен исбатлыйк.

C түбәсеннән CD биеклеге төшерәбез. ACD турыпочмаклы өчпочмагыннан, α — кысынкы почмак булса, табабыз:

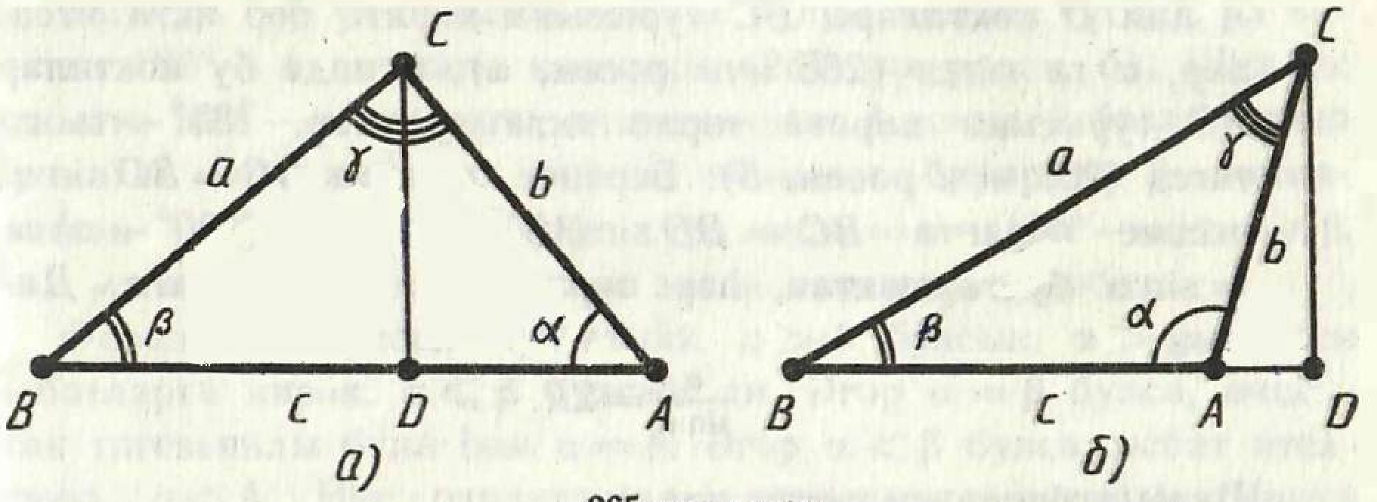
$$CD = b\sin\alpha$$

(265 нче рәсем, *а*). α — җәенке почмак булса,

$$CD = b\sin(180^\circ - \alpha) = b\sin\alpha$$

(265 нче рәсем, *б*). Аналогия буенча BCD өчпочмагыннан

$$CD = a\sin\beta.$$



265 нче рәсем

Шулай итеп, $a \sin \beta = b \sin \alpha$. Моннан

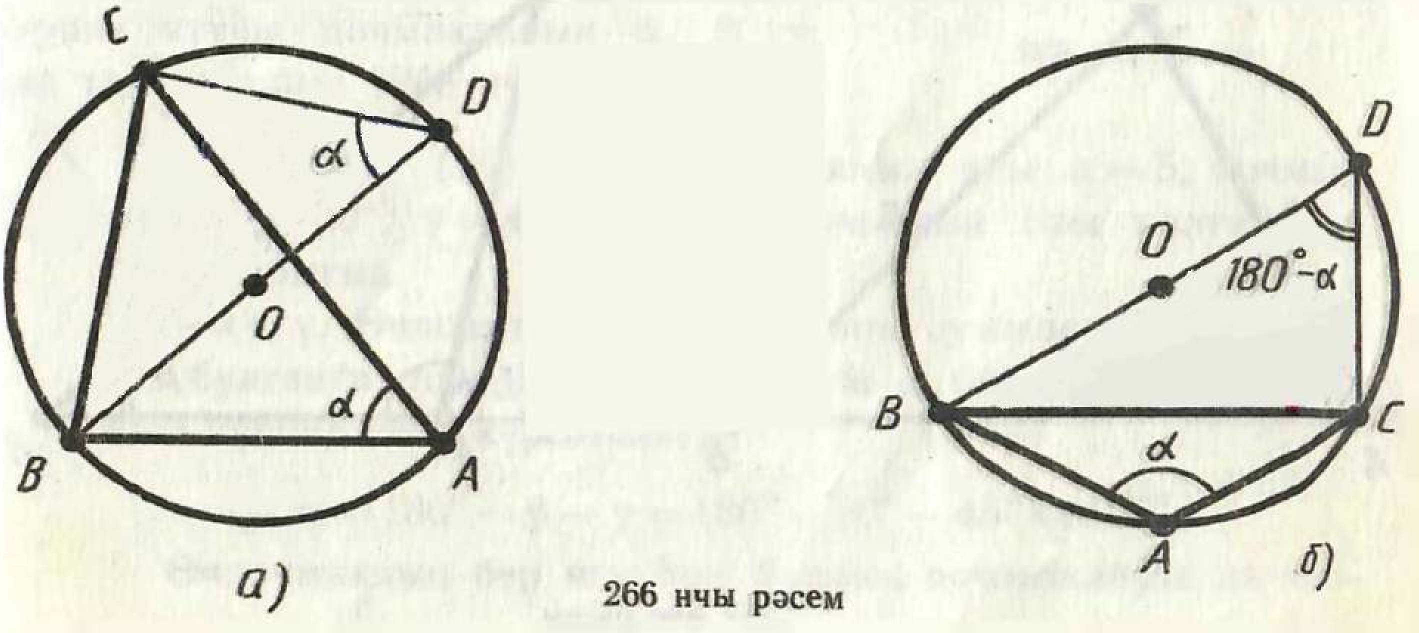
$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

тигезлеге дә шулай ук исбатлана. Исбатлау өчен өчпочмакның A түбәсеннән биеклек үткәрергә кирәк. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (13). Синуслар теоремасындагы $\frac{a}{\sin \alpha}$, $\frac{b}{\sin \beta}$, $\frac{c}{\sin \gamma}$ чагыштырмаларының һәркайсы $2R$ га тигез икәнлеген исбатлагыз, монда R — өчпочмакны камаучы әйләнәнең радиусы.

Чишү. BD диаметры үткәрәбез (266 нчы рәсем). Әйләнәгә камаулы почмакларның үзлеге буенча, BCD турыпочмаклы өчпочмагының D түбәсе янындагы почмагы,



266 нчы рәсем

A һәм D нокталары BC турысына карата бер якта ятсалар, α га тигез (266 нчы рәсем, *а*), ә инде бу нокталар BC турысына карата төрле якта ятсалар, $180° - \alpha$ га тигез (266 нчы рәсем, *б*). Беренче очракта $BC = BD \sin \alpha$, икенче очракта $BC = BD \sin (180° - \alpha)$. $\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha$ булганлыктан, һәр очракта да $a = 2R \sin \alpha$. Димәк,

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R.$$

Шуны исбатларга кирәк иде дә.

111. ӨЧПОЧМАКНЫҢ ПОЧМАКЛАРЫ БЕЛӘН КАРШЫ ЯТКАН ЯКЛАРЫ АРАСЫНДАГЫ БӘЙЛӘНЕШ

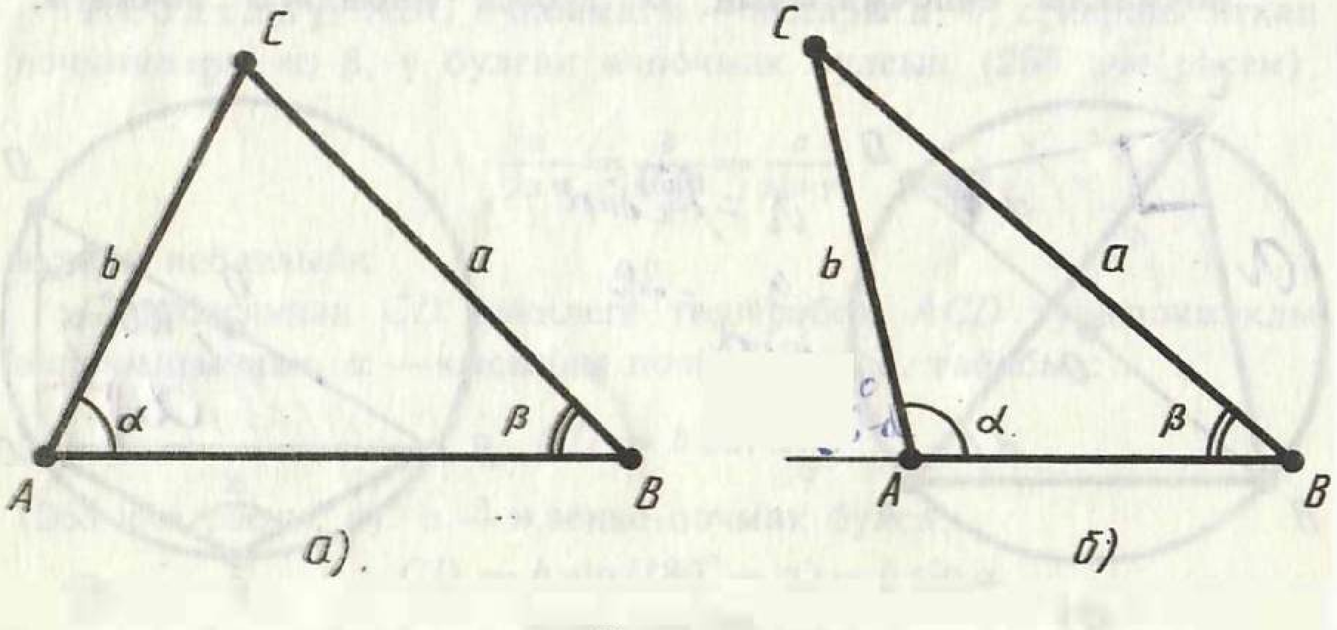
Өчпочмакта зуррак почмакка каршы зуррак як, зуррак якка каршы зуррак почмак ята.

a һәм b — өчпочмакның ике ягы, α, β — аларга каршы яткан почмаклар булсын. $\alpha > \beta$ булса, ул вакытта $a > b$ икәнен исбатлыйк. Һәм киресенчә: әгәр $a > b$ булса, ул вакытта $\alpha > \beta$.

α һәм β кысынкы почмаклар булсалар (267 нче рәсем, *а*), ул вакытта $\alpha > \beta$ булганда $\sin \alpha > \sin \beta$. Ә

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$$

булганга күрә, $a > b$ була. Әгәр α почмагы җәенке булса (ике



267 нче рәсем

почмагы да бер үк вакытта җәенке булуы мөмкин түгел), ул вакытта $180° - \alpha$ почмагы кысынкы (267 нче рәсем, *б*). Шул ук вакытта $180° - \alpha$ почмагы, өчпочмакның β почмагы белән янәшә булмаган почмагының тышкы почмагы буларак, β почмагыннан зуррак була. Шуңа күрә $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) > \sin\beta$. Һәм моннан без яңадан $a > b$ дигән нәтиҗәгә киләбез.

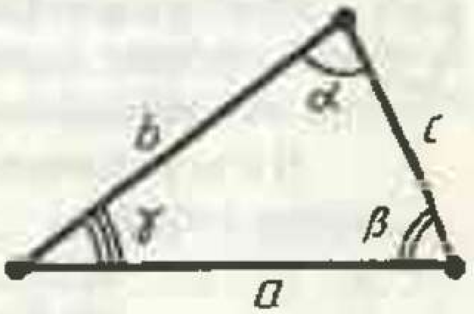
Фаразның киресен исбатлыйк. $a > b$ булсын. $\alpha > \beta$ икәнен исбатларга кирәк. $\alpha \leqslant \beta$ булсын ди. Әгәр $\alpha = \beta$ булса, өчпочмак тигезьянлы була һәм $a = b$. Әгәр $\alpha < \beta$ булса, исбат ителгәнчә, $a < b$. Ике очракта да каршылыкка очрадык, чөнки фараз итү буенча $a > b$, шулай булгач, $\alpha > \beta$. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Мәсьәлә (17). Өчпочмакның җәенке почмагы булса, аңа каршы яткан як иң зуры икәнен исбатлагыз.

Чишү. Өчпочмакта бары тик бер генә җәенке почмак була ала. Шуңа күрә ул калган почмакларның теләсә кайсыннан зуррак. Ә шулай булгач, аңа каршы яткан як өчпочмакның калган ике ягының теләсә кайсыннан зуррак.

112. ӨЧПОЧМАКЛАРНЫ ЧИШҮ

Өчпочмакларны чишү өчпочмакның билгесез якларын һәм почмакларын аның билгеле яклары һәм почмаклары аша табудан гыйбарәт. Өчпочмакның якларын *a*, *b*, *c* дип, ә аларга каршы ятучы почмакларын α, β, γ дип тамгаларбыз (268 нче рәсем).



268 нче рәсем

Мәсьәлә (26). 1) Өчпочмакның ягы $a = 5$, почмаклары $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$. Өченче почмагын һәм калган ике ягын табыгыз.

Чишү. Өчпочмакның почмаклары суммасы 180° ка тигез булганга, аның өченче почмагы α бирелгән почмаклар аша түбәндәгечә күрсәтелә:

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 30° - 45° = 105°.$$

Өчпочмакның бер ягы һәм барлык почмаклары да бил-

геле булганда, аның калган ике ягын синуслар теоремасын кулланып түбәндәгечә табабыз:

$$b = a\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 5\frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} \approx 5\cdot\frac{0{,}500}{0{,}966} \approx 2{,}59,$$

$$c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx 5\cdot\frac{0{,}707}{0{,}966} \approx 3{,}66.$$

Мәсьәлә (27). 1) Өчпочмакның ике ягы: $a=12$, $b=8$ һәм алар арасындагы почмагы $\gamma=60^\circ$ бирелгән. Калган ике почмагын һәм өченче ягын табыгыз.

Чишү. Өченче якны косинуслар теоремасын кулланып табабыз:

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}=\sqrt{144+64-2\cdot 12\cdot 8\cdot 0{,}500}=$$
$$=\sqrt{112}\approx 10{,}6.$$

Хәзер өч ягы да билгеле булгач, косинуслар теоремасы ярдәмендә билгесез почмакларның косинусларын, аннары почмакларның үзләрен табабыз: $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\approx 0{,}191$, моннан $\alpha\approx 79^\circ$, $\beta=180^\circ-\alpha-\gamma\approx 41^\circ$.

Мәсьәлә (28). 5) Өчпочмакның ике ягы: $a=6$, $b=8$ һәм a ягына каршы яткан почмагы $\alpha=30^\circ$ бирелгән. Калган ике почмагын һәм өченче ягын табыгыз.

Чишү. Синуслар теоремасын кулланып, $\sin\beta$ ның кыйммәтен табабыз:

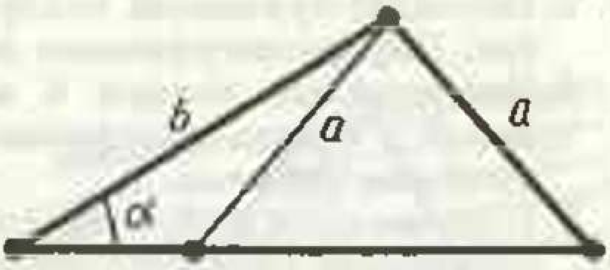
$$\sin\beta=\frac{b}{a}\cdot\sin\alpha=\frac{8}{6}\cdot\sin 30^\circ\approx 0{,}667.$$

Синусның әлеге кыйммәтенә ике почмак тиңдәш: $\beta_1\approx 42^\circ$ һәм $\beta_2\approx 138^\circ$.

Башта $\beta_1\approx 42^\circ$ почмагын карыйк. Аның буенча өченче почмакны $\gamma_1=180^\circ-\alpha-\beta\approx 108^\circ$ ны һәм синуслар теоремасы нигезендә өченче якны табабыз:

$$c_1=\frac{a\cdot\sin\gamma_1}{\sin\alpha}\approx 6\cdot\frac{\sin 108^\circ}{\sin 30^\circ}\approx 6\cdot\frac{0{,}951}{0{,}500}\approx 11{,}4.$$

$\beta_2=138^\circ$ почмагы ярдәмендә аналогия буенча $\gamma_2=12^\circ$ һәм $c_2\approx 2{,}49$ табыла.



269 нчы рәсем

Искәрмә. Алдагы мәсьәләләрдән аермалы буларак, бу мәсьәләнең ике чишелеше бар (269 нчы рәсем). Башка санча кыйммәтләр өчен, мәсьәләдән $\alpha \geqslant 90°$ булганда, мәсьәләнең бер генә чишелеше булуы яки бөтенләй чишелеше булмавы да мөмкин.

Мәсьәлә (29). 1) Өчпочмакның өч ягы бирелгән: $a=2$, $b=3$, $c=4$. Аның почмакларын табыгыз.

Чишү. Почмаклар косинуслар теоремасы ярдәмендә табыла:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{7}{8} = 0{,}875, \text{ моннан } \alpha \approx 29°.$$

$\cos\beta = 0{,}688$ аналогик рәвештә табыла, моннан $\beta \approx 47°$ һәм $\gamma = 180° - 47° - 29° = 104°$.

КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Косинуслар теоремасын исбатлагыз.
2. Өчпочмак ягының квадраты аның калган ике ягының квадратлары суммасына «$\pm$» шул якларның берсе белән икенчесе проекциясенең икеләтелгән тапкырчыгышына тигез икәнен исбатлагыз. «+» яки «−» тамгасы нәрсәгә бәйле?
3. Синуслар теоремасын исбатлагыз.
4. Теләсә нинди өчпочмакта зуррак якка каршы зуррак почмак ятканын һәм зуррак почмакка каршы зуррак як ятканын исбатлагыз.

МӘСЬӘЛӘЛӘР

1. Өчпочмакның яклары 5 м, 6 м, 7 м. Өчпочмак почмакларының косинусларын табыгыз.
2. Өчпочмакның ике ягы 5 м һәм 6 м га, ә алар арасындагы почмагының синусы 0,6 га тигез. Өченче ягын табыгыз.
3. Өчпочмакның яклары a, b, c га тигез. Әгәр $a^2+b^2>c^2$ булса, c ягына каршы ятучы почмакның кысынкы, ә $a^2+b^2<c^2$ булса, c ягына каршы ятучы почмакның җәенке икәнен исбатлагыз.
4. Параллелограммның диагональләре c, d һәм алар арасындагы почмагы α бирелгән. Параллелограммның якларын табыгыз.

5. Параллелограммның яклары a, b һәм бер почмагы α бирелгән. Параллелограммның диагональләрен табыгыз.

6. Өчпочмакның яклары 4 м, 5 м һәм 6 м. Озынлыгы 4 м һәм 5 м булган якларының 6 м лы ягы яткан турыга проекцияләрен табыгыз.

7. Өчпочмакның a, b, c яклары бирелгән. Өчпочмакның c ягына төшерелгән биеклеген табыгыз.

8. 1 нче мәсьәләдәге өчпочмакның биеклекләрен табыгыз.

9. 1 нче мәсьәләдәге өчпочмакның медианаларын табыгыз.

10*. 1 нче мәсьәләдәге өчпочмакның биссектрисаларын табыгыз.

11*. ABC өчпочмагының AC һәм BC якларының озынлыклары үзгәрешсез калып, C почмагы зурайганда AB ягы ничек үзгәрә (270 нче рәсем)?

12. ABC өчпочмагында $AB=15$ см, $AC=10$ см. $\sin\beta=\frac{3}{4}$ булуы мөмкинме?

13. Синуслар теоремасындагы $\frac{a}{\sin\alpha}$, $\frac{b}{\sin\beta}$, $\frac{c}{\sin\gamma}$ чагыштырмаларының һәркайсы $2R$ га тигез икәнен исбатлагыз, биредә R — өчпочмакны камаучы әйләнәнең радиусы.

14. Өчпочмакның яклары билгеле булганда, аны камаучы әйләнәнең радиусын ничек табарга? Яклары 5 м, 6 м, 7 м булган өчпочмакны камаучы әйләнәнең радиусын табыгыз.

15. AC ераклыгы һәм α, β почмаклары билгеле булганда, A ноктасыннан алып, янына якын килеп булмый торган B ноктасына кадәрге ераклыкны ничек табарга икәнен аңлатып бирегез (271 нче рәсем).

16. α, β почмаклары һәм a ераклыгы буенча йортның биеклеге x ны ничек табарга икәнен аңлатып бирегез (272 нче рәсем).

17. Өчпочмакта җәенке почмак булса, аңа каршы яткан як иң зурысы икәнен исбатлагыз.

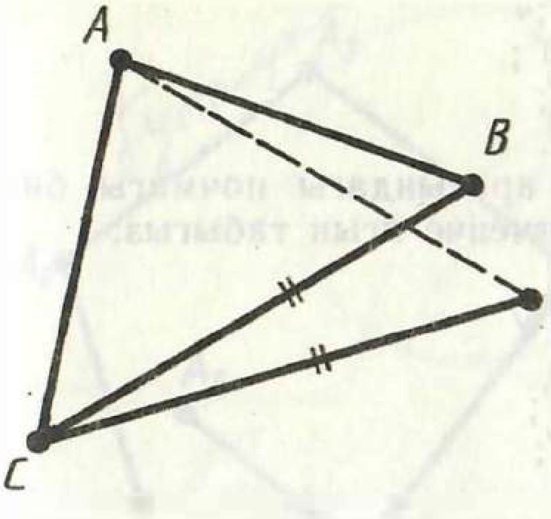
18. ABC өчпочмагында $\angle A=40^\circ$, $\angle B=60^\circ$, $\angle C=80^\circ$. Өчпочмак якларының кайсысы иң зуры, кайсысы иң кечкенәсе?

19. ABC өчпочмагының яклары $AB=5{,}1$ м, $BC=6{,}2$ м, $AC=7{,}3$ м. Өчпочмак почмакларының кайсысы иң зуры, кайсысы иң кечкенәсе?

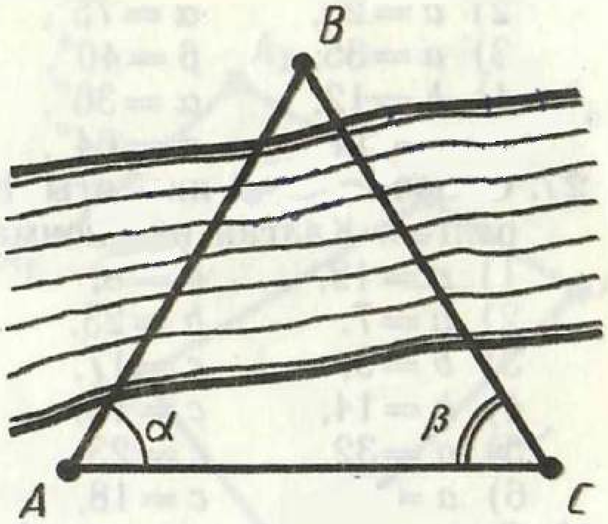
20. Тигезьянлы өчпочмакның нигез янындагы почмагы 60° тан зуррак булса, кайсысы зуррак була: нигеземе яки ян ягымы?

21. ABC өчпочмагының C почмагы җәенке. Әгәр X ноктасы AC ягы өстендә ятса, $BX<AB$ икәнен исбатлагыз.

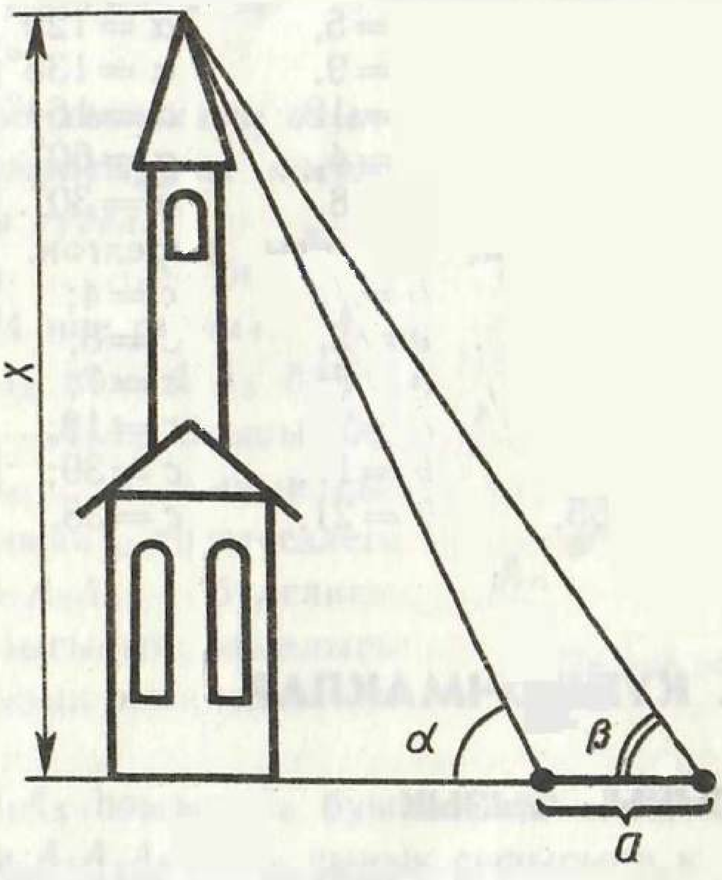
22. ABC өчпочмагының C почмагы җәенке. Әгәр X ноктасы — AC ягында, ә Y ноктасы BC ягында ятса, $XY<AB$ икәнен исбатлагыз.



270 нче рәсем



271 нче рәсем



272 нче рәсем

23. ABC өчпочмагының AB ягында D ноктасы билгеләнгән. CD кисемтәсе AC яки BC ягының кимендә берсеннән кечерәк икәнен исбатлагыз.

24*. ABC өчпочмагы бирелгән. CD — аның AB ягына үткәрелгән медианасы. Әгәр $AC > BC$ булса, ACD почмагының BCD почмагыннан кечерәк икәнен исбатлагыз.

25*. Өчпочмакның биссектрисасы шул ук түбәдән үткәрелгән биеклегеннән кечкенә түгел һәм медианасыннан зур түгел икәнен исбатлагыз.

26. Өчпочмакның ягы һәм ике почмагы бирелгән. Өченче почмагын һәм калган ике ягын табыгыз:

1) $a = 5$, $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$;

2) $a=20$, $\alpha=75°$, $\beta=60°$;
3) $a=35$, $\beta=40°$, $\gamma=120°$;
4) $b=12$, $\alpha=36°$, $\beta=25°$;
5) $c=14$, $\alpha=64°$, $\beta=48°$.

27. Өчпочмакның ике ягы һәм алар арасындагы почмагы бирелгән. Калган ике почмагын һәм өченче ягын табыгыз:
1) $a=12$, $b=8$, $\gamma=60°$;
2) $a=7$, $b=23$, $\gamma=130°$;
3) $b=9$, $c=17$, $\alpha=95°$;
4) $b=14$, $c=10$, $\alpha=145°$;
5) $a=32$, $c=23$, $\beta=152°$;
6) $a=24$, $c=18$, $\beta=15°$.

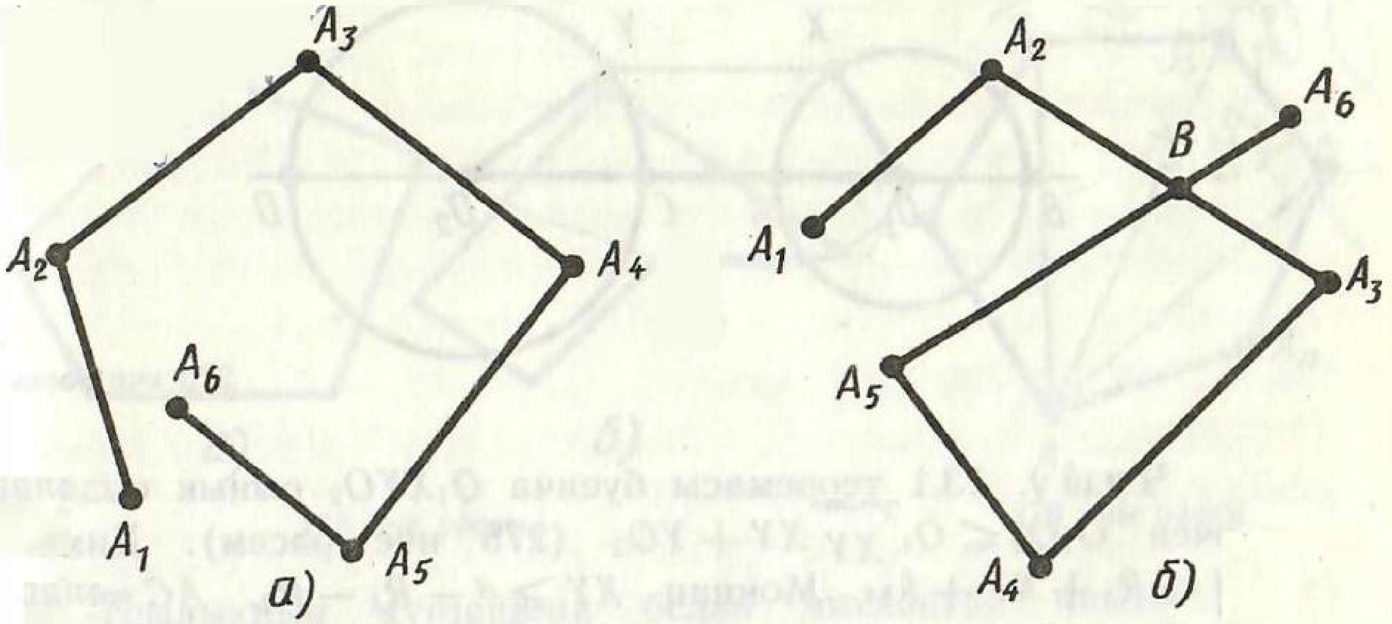
28. Өчпочмакның ике ягы һәм якларының берсенә каршы ятучы почмагы бирелгән. Өчпочмакның калган почмакларын һәм ягын табыгыз:
1) $a=12$, $b=5$, $\alpha=120°$;
2) $a=27$, $b=9$, $\alpha=138°$;
3) $a=34$, $b=12$, $\alpha=164°$;
4) $a=2$, $b=4$, $\alpha=60°$;
5) $a=6$, $b=8$, $\alpha=30°$.

29. Өчпочмакның өч ягы бирелгән. Почмакларын табыгыз:
1) $a=2$, $b=3$, $c=4$;
2) $a=7$, $b=2$, $c=8$;
3) $a=4$, $b=5$, $c=7$;
4) $a=15$, $b=24$, $c=18$;
5) $a=23$, $b=17$, $c=39$;
6) $a=55$, $b=21$, $c=38$.

§ 13. КҮППОЧМАКЛАР

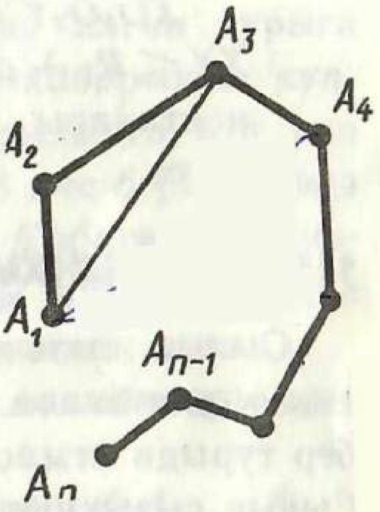
113. СЫНЫК СЫЗЫК

A_1, A_2, ..., A_n нокталарыннан һәм аларны тоташтыручы A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ кисемтәләреннән торган фигура $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ *сынык сызыгы* дип атала. A_1, A_2, ... A_n нокталары сынык сызыкның *түбәләре* дип, ә A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ кисемтәләре *буыннары* дип атала. Әгәр сынык сызыкның үзкисешү нокталары булмаса, ул *гади* сынык сызык дип атала. 273 нче *а* рәсемендә гади сынык сызык, ә 273 нче *б* рәсемендә үзкисешү ноктасы (*B* ноктасы) булган сынык сызык сурәтләнгән. Буыннарының озынлыклары суммасы *сынык сызыкның озынлыгы* дип атала.



273 нче рәсем

Теорема 13.1. ***Сынык сызыкның озынлыгы аның очларын тоташтыручы кисемтә озынлыгыннан кечкенә түгел.***



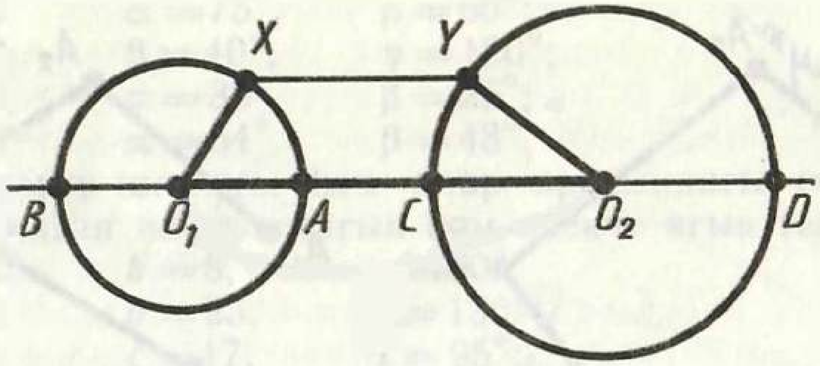
274 нче рәсем

Исбатлау. $A_1A_2A_3\ \dots\ A_n$ — бирелгән сынык сызык булсын (274 нче рәсем).

Сынык сызыкның A_1A_2 һәм A_2A_3 буыннарын бер буын белән — A_1A_3 буыны белән алыштырыйк. $A_1A_3A_4\ \dots\ A_n$ сынык сызыгы табылыр. Өчпочмак тигезсезлеге буенча $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$ булганга $A_1A_3A_4\ \dots\ A_n$ сынык сызыгының озынлыгы башта бирелгән сынык сызык озынлыгыннан зур түгел.

Шул ук юл белән A_1A_3 һәм A_3A_4 буыннарын A_1A_4 буыны белән алмаштырабыз һәм $A_1A_4A_5\ \dots\ A_n$ сынык сызыгына күчәбез. Аның озынлыгы шулай ук бирелгән сынык сызыкның озынлыгыннан зур түгел. Алга таба шулай дәвам итәбез. Нәтиҗәдә без сынык сызыкның очларын тоташтыручы A_1A_n кисемтәсенә килеп җитәбез. Моннан башта бирелгән сынык сызыкның озынлыгы A_1A_n кисемтәсенең озынлыгыннан кечкенә түгеллеге килеп чыга. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (1). Радиуслары R_1 һәм R_2 һәм үзәкләре арасындагы ераклык $d > R_1 + R_2$ булган ике әйләнә бирелгән. Бу әйләнәләрнең X һәм Y нокталары арасындагы иң зур һәм иң кечкенә ераклыклар нәрсәгә тигез?



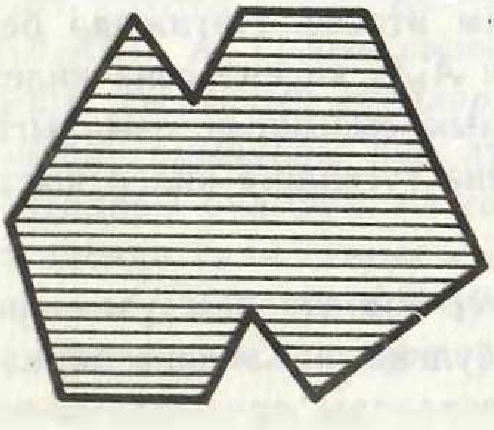
275 нче рәсем

Чишү. 13.1 теоремасы буенча O_1XYO_2 сынык сызыгы өчен $O_1O_2 \leqslant O_1X + XY + YO_2$ (275 нче рәсем). Димәк, $d \leqslant R_1 + XY + R_2$. Моннан $XY \geqslant d - R_1 - R_2$. $AC = d - R_1 - R_2$, шуңа күрә әйләнә нокталары арасындагы иң кечкенә ераклык $d - R_1 - R_2$ гә тигез.

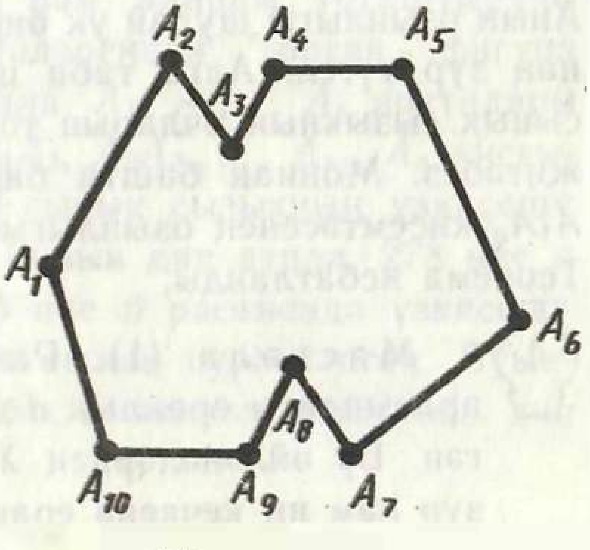
XO_1O_2Y сынык сызыгы өчен шул ук теорема нигезендә $XY \leqslant R_1 + d + R_2$. $BD = d + R_1 + R_2$, шуңа күрә әйләнә нокталары арасындагы иң зур ераклык $d + R_1 + R_2$ гә тигез.

114. КАБАРЫНКЫ КҮППОЧМАКЛАР

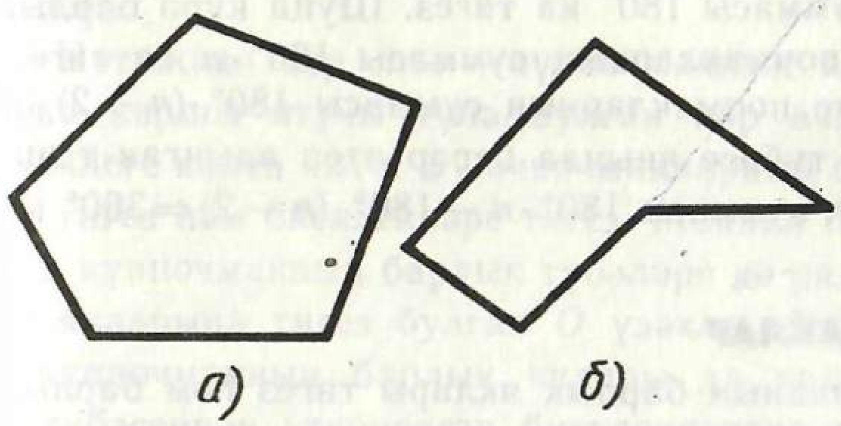
Сынык сызыкның очлары тәңгәл килсә, ул *йомык сынык сызык* дип атала. Гади йомык сынык сызыкның күрше буыннары бер турыда ятмасалар, ул *күппочмак* дип атала (276 нчы рәсем). Сынык сызыкның түбәләре — *күппочмакның түбәләре* дип, ә сынык сызыкның буыннары *күппочмакның яклары* дип атала. Күппочмакның күрше булмаган түбәләрен тоташтыручы кисемтәләр аның *диагональләре* дип атала. *n* түбәсе һәм, димәк, *n* ягы булган күппочмак *n-почмак* дип атала.



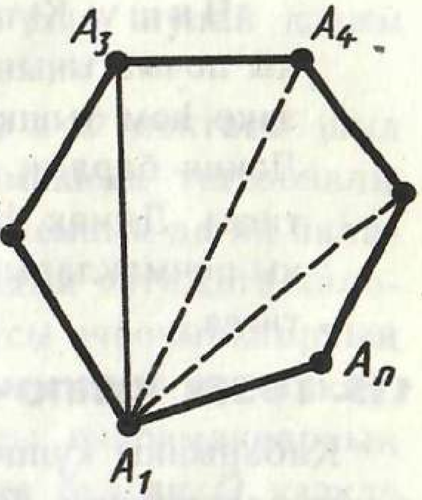
276 нчы рәсем



277 нче рәсем



278 нче рәсем



279 нчы рәсем

Яссылыкның күппочмак белән чикләнгән чикле өлкәсе *яссы күппочмак* яки *күппочмаклы өлкә* дип атала (277 нче рәсем).

Күппочмакның теләсә кайсы ягын үз эченә алган турыга карата бер ярымъяссылыкта яткан күппочмак *кабарынкы күппочмак* дип атала. Биредә туры үзе ярымъяссылыкта ята дип исәпләнә. 278 нче *а* рәсемендә — кабарынкы, 278 нче *б* рәсемендә кабарынкы булмаган күппочмак сурәтләнгән. *Кабарынкы күппочмакның* бирелгән түбәсе янындагы *почмагы* дип аның шул үбәдә очраша торган яклары белән төзелгән почмак атала.

Теорема 13.2. ***Кабарынкы n-почмакның почмаклары суммасы 180° (n — 2) гә тигез.***

Исбатлау. $n=3$ очрагы өчен теорема дөрес. $A_1A_2 \dots A_n$ — бирелгән кабарынкы күппочмак һәм $n>3$ булсын (279 нчы рәсем). $n-3$ диагональ үткәрәбез: A_1A_3, A_1A_4, ..., A_1A_{n-1}. Күппочмак кабарынкы булганлыктан, бу диагональләр аны $n-2$ өчпочмакка бүлә: $\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle A_1A_3A_4$, ..., $\triangle A_1A_{n-1}A_n$. $A_1A_2 \dots A_n$ күппочмагының почмаклары суммасы барлык бу өчпочмакларның почмаклары суммасы белән тәңгәл килә. Һәр өчпочмакның почмаклары суммасы 180° ка, ә бу өчпочмакларның саны $n-2$ гә тигез. Шуңа күрә кабарынкы $A_1A_2 \dots A_n$ n-почмагының почмаклары суммасы $180°\cdot(n-2)$ гә тигез. Теорема исбатланды.

Кабарынкы күппочмакның бирелгән түбәсенең *тышкы почмагы* дип күппочмакның шул түбә янындагы эчке почмакка чиктәш почмагы атала.

Мәсьәлә (9). Кабарынкы n-почмакның һәр түбәсе янында берәр итеп алынган тышкы почмакларының суммасы нәрсәгә тигез?

Чишү. Күппочмакның эчке почмагы белән чиктәш тышкы почмагының суммасы 180° ка тигез. Шуңа күрә барлык эчке һәм тышкы почмакларның суммасы $180^\circ \cdot n$ га тигез. Ләкин барлык эчке почмакларның суммасы $180^\circ \cdot (n-2)$ гә тигез. Димәк, һәр түбәсе янында берәр итеп алынган тышкы почмакларының суммасы $180^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot (n-2) = 360^\circ$ ка тигез.

115. ТӨЗЕК КҮППОЧМАКЛАР

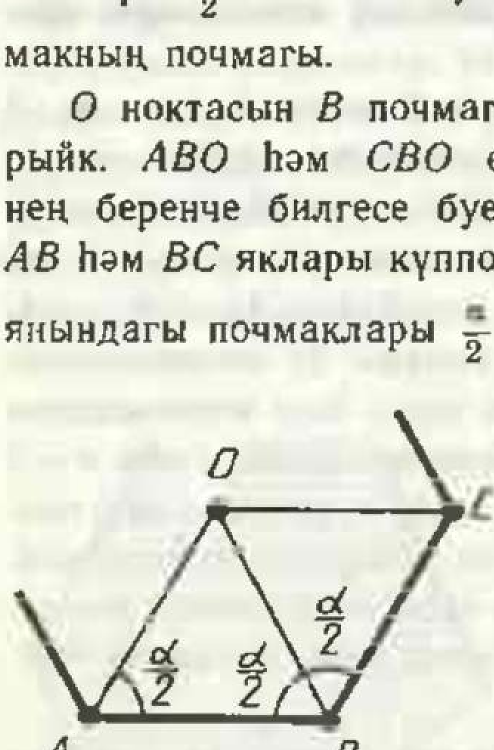
Кабарынкы күппочмакның барлык яклары тигез һәм барлык почмаклары тигез булса, ул *төзек күппочмак* дип атала.

Күппочмакның барлык түбәләре нинди дә булса бер әйләнәдә ятса, ул *камаулы күппочмак* дип атала. Күппочмакның барлык яклары нинди дә булса бер әйләнәгә орынса, ул *камаучы күппочмак* дип атала.

Теорема 13.3. ***Кабарынкы төзек күппочмакка камаулы һәм аны камаучы әйләнә үткәрергә мөмкин.***

Исбатлау. A һәм B — күппочмакның ике күрше түбәсе булсын (280 нче рәсем). A һәм B түбәләреннән күппочмак почмакларының биссектрисаларын үткәрик. O — аларның кисешү ноктасы булсын. AOB — нигезе AB га һәм нигез янындагы почмаклары $\frac{\alpha}{2}$ гә тигез булган тигезьянлы өчпочмак, α — күппочмакның почмагы.

O ноктасын B почмагына күрше C ноктасы белән тоташтырыйк. ABO һәм CBO өчпочмаклары өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесе буенча тигез. Аларның OB ягы — уртак, AB һәм BC яклары күппочмак яклары буларак тигез, ә B түбәсе янындагы почмаклары $\frac{\alpha}{2}$ гә тигез. Бу өчпочмакларның тигезлегеннән OBC өчпочмагының C түбәсе янындагы почмагы $\frac{\alpha}{2}$ гә тигез булган тигезьянлы өчпочмак икәнлеге килеп чыга, ягъни CO C почмагының биссектрисасы була.



280 нче рәсем

Аннары O ноктасын C түбәсенә күрше D түбәсе белән тоташтырабыз да COD — тигезьянлы өчпочмак һәм DO күппочмакның D почмагы-

ның биссектрисасы икәнлеген исбатлыйбыз. Һәм шулай дәвам итәбез.

Нәтиҗәдә бер ягы — күппочмакның ягы, ә O ноктасы шул якка каршы ятучы түбә булган һәр өчпочмакның тигезьянлы икәнлеге килеп чыга. Бу өчпочмакларның барысының да ян яклары тигез һәм биеклекләре тигез. Моннан шундый нәтиҗәгә киләбез: күппочмакның барлык түбәләре дә радиусы өчпочмакларның ян якларына тигез булган O үзәкле әйләнә өстендә урнашкан, ә күппочмакның барлык яклары да радиусы өчпочмакларның O түбәсеннән үткәрелгән биеклекләренә тигез булган O үзәкле әйләнәгә орыналар. Теорема исбатланды.

Төзек күппочмакка камаулы һәм аны камаучы әйләнәләрнең үзәге бер үк була. Аны *күппочмакның үзәге* дип атыйлар. Төзек күппочмакның ягын аның үзәгеннән күрү почмагы күппочмакның *үзәк почмагы* дип атала.

116. ТӨЗЕК КҮППОЧМАКЛАРГА КАМАУЛЫ ҺӘМ АЛАРНЫ КАМАУЧЫ ӘЙЛӘНӘЛӘРНЕҢ РАДИУСЛАРЫ ӨЧЕН ФОРМУЛАЛАР

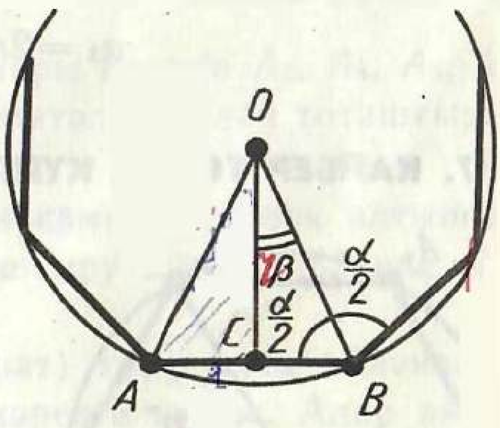
Ягы a га, яклар саны n га тигез булган төзек күппочмак өчен камаучы әйләнә R радиусын һәм камаулы әйләнә r радиусын табыйк (281 нче рәсем).

Табабыз:

$$\beta=\frac{180^\circ}{n},$$

$$R=OB=\frac{CB}{\sin\beta}=\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}};$$

$$r=OC=\frac{CB}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$



281 нче рәсем

Төзек (тигезьяклы) өчпочмак өчен $n=3$, $\beta=\frac{180^\circ}{3}=60^\circ$,

$$R=\frac{a}{2\sin 60^\circ}=\frac{a}{\sqrt{3}};\quad r=\frac{a}{2\operatorname{tg}60^\circ}=\frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Төзек дүртпочмак (квадрат) өчен $n=4$, $\beta=\frac{180^\circ}{4}=45^\circ$,

$$R=\frac{a}{2\sin 45^\circ}=\frac{a}{\sqrt{2}};\quad r=\frac{a}{2\operatorname{tg}45^\circ}=\frac{a}{2}.$$

Төзек алтыпочмак өчен $n=6$, $\beta=\frac{180^\circ}{6}=30^\circ$,

$$R=\frac{a}{2\sin 30^\circ}=a,\quad r=\frac{a}{2\operatorname{tg}30^\circ}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Мәсьәлә (16). Төзек n-почмакның ягы a_n өчен аны камаучы әйләнәнең радиусы R аша һәм аңа камалган әйләнәнең радиусы r аша күрсәтелгән аңлатма табыгыз. a_n ны $n=3$; 4; 6 булганда исәпләп чыгарыгыз.

Чишү. $R=\frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$ булганлыктан, моннан

$$a_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$$

икәнлеге килеп чыга. Аерым алганда,

$$a_3=R\sqrt{3},\ a_4=R\sqrt{2},\ a_6=R.$$

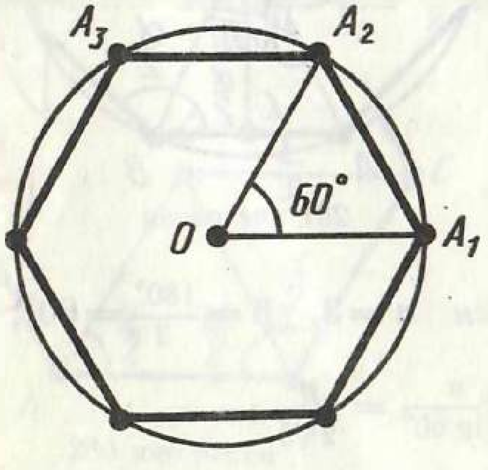
$r=\frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$ булганлыктан, моннан

$$a_n=2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$$

икәнлеге килеп чыга. Аерым алганда,

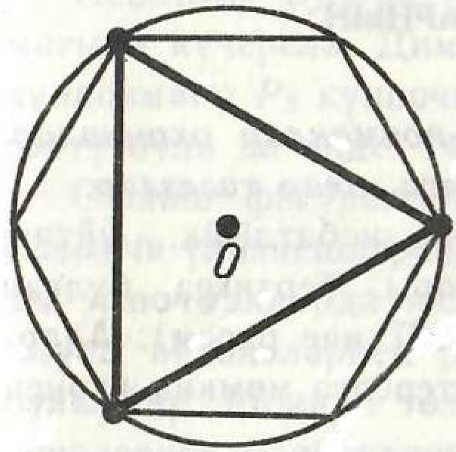
$$a_3=2r\sqrt{3},\ a_4=2r,\ a_6=\frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

117. КАЙБЕР ТӨЗЕК КҮППОЧМАКЛАРНЫ ТӨЗҮ

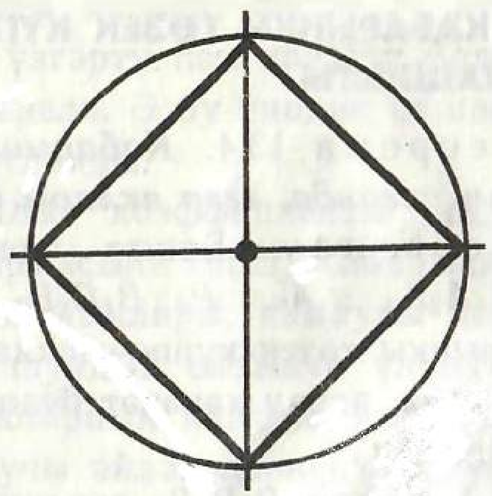


282 нче рәсем

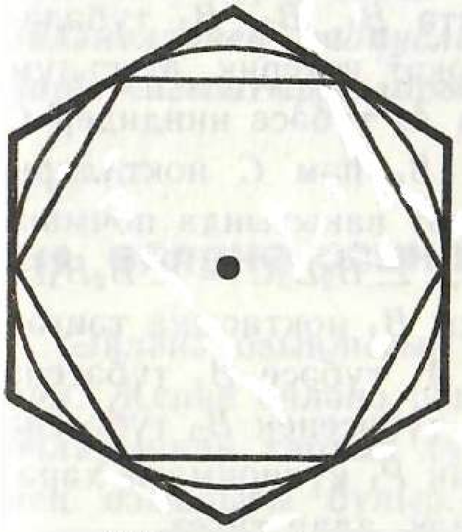
Әйләнәгә камаулы төзек күппочмак төзү өчен аның үзәк почмагын төзү җитә. Төзек алтыпочмакта андый почмак $\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$ ка тигез. Шуңа күрә төзек алтыпочмак төзү өчен аның бер түбәсен (A_1) әйләнәдә ирекле рәвештә алабыз. Шул ноктаны үзәк итеп алабыз да, әйләнә радиусына тигез радиус белән әйләнәне кистереп, A_2



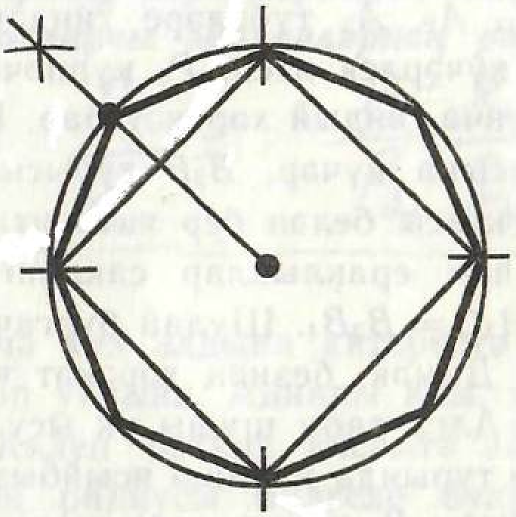
283 нче рәсем



284 нче рәсем



285 нче рәсем



286 нчы рәсем

түбәсен табабыз (282 нче рәсем). Аннары калган A_3, A_4, A_5, A_6 түбәләрен шулай ук төзеп, аларны кисемтәләр белән тоташтырабыз.

Камаулы төзек өчпочмак төзү өчен камаулы төзек алтыпочмакның түбәләрен бер түбә аша тоташтыру җитә (283 нче рәсем).

Камаулы төзек дүртпочмак (квадрат) төзү өчен әйләнәнең үзәге аша перпендикуляр турылар үткәрергә кирәк. Алар әйләнәне квадрат түбәләрендә кисеп үтәр (284 нче рәсем).

Камаучы төзек күппочмак төзү өчен камаулы төзек күппочмакның түбәләре аша әйләнәгә орынмалар үткәрү җитә. Камаулы төзек күппочмакның түбәләре аша үткәрелгән орынмалар камаучы төзек күппочмакның түбәләрендә кисешәләр (285 нче рәсем).

Әйләнәгә төзек n-почмак камалган булса, камаулы төзек $2n$-почмакны төзү кыен түгел, 286 нчы рәсемдә төзек сигезпочмакны төзү күрсәтелгән.

118. КАБАРЫНКЫ ТӨЗЕК КҮППОЧМАКЛАРНЫҢ ОХШАШЛЫГЫ

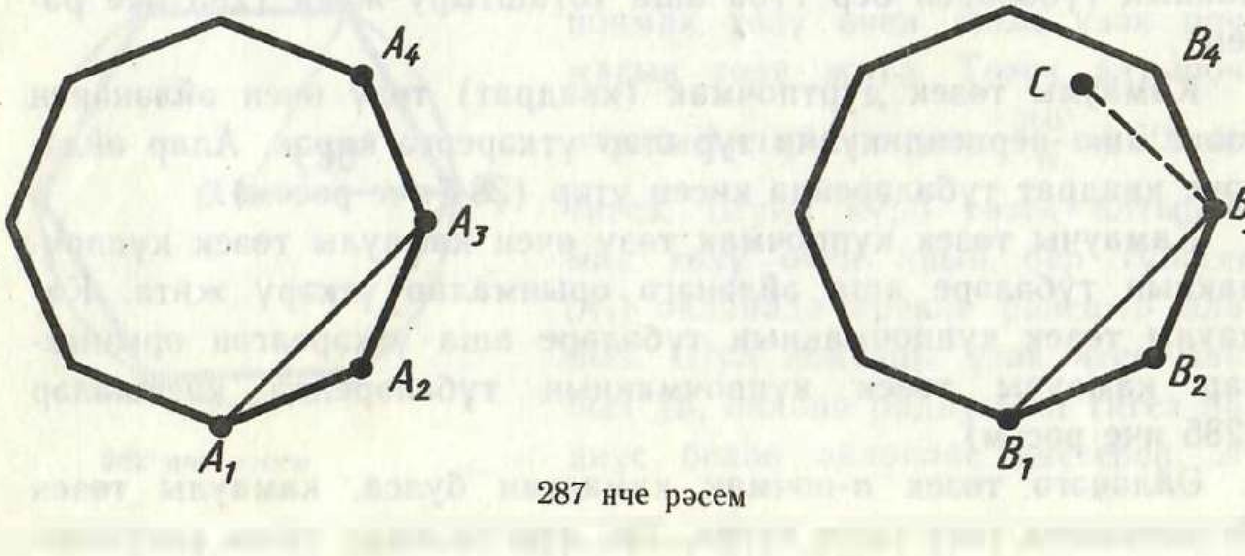
Теорема 13.4. ***Кабарынкы төзек n-почмаклар охшашлар. Аерым алганда, әгәр яклары бертигез булса, алар тигезләр.***

Исбатлау. Башта икенче фикерне исбатлыйк. Әйтик, $P_1: A_1A_2A_3 \dots A_n$, $P_2: B_1B_2B_3 \dots B_n$ — яклары бертигез булган кабарынкы төзек күппочмаклар булсын (287 нче рәсем). Аларның тигез, ягъни хәрәкәт белән тәңгәл китерергә мөмкин икәнен исбатлыйк.

$A_1A_2A_3$ һәм $B_1B_2B_3$ өчпочмаклары өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесе буенча тигез. Аларда $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$ һәм $\angle A_1A_2A_3 = \angle B_1B_2B_3$.

A_1, A_2, A_3 түбәләре тиңдәшле рәвештә B_1, B_2, B_3 түбәләренә күчәрлек итеп, P_1 күппочмагын хәрәкәт иттерик. Мәгълүм булганча, андый хәрәкәт бар. Бу вакытта A_4 түбәсе ниндидер C ноктасына күчәр. B_2B турысына карата B_4 һәм C нокталары B_1 ноктасы белән бер якта яталар. Хәрәкәт вакытында почмаклар һәм ераклыклар сакланганга күрә, $\angle B_2B_3C = \angle B_2B_3B_4$ һәм $B_3C = B_3B_4$. Шулай булгач, C ноктасы B_4 ноктасына тәңгәл килә. Димәк, безнең хәрәкәт вакытында A_4 түбәсе B_4 түбәсенә күчә. Алга таба шушы ук ысул белән A_5 түбәсенең B_5 түбәсенә күчүе турында нәтиҗә ясыйбыз һ. б. Ягъни P_1 күппочмагы хәрәкәт белән P_2 күппочмагына күчерелә, димәк, алар тигез.

Теореманың беренче өлешен исбатлау өчен, башта P_1 күппочмагын охшаш үзгәртүгә, мәсәлән, охшашлык коэффициенты $k = \frac{B_1B_2}{A_1A_2}$ белән гомотетия үзгәрешенә китерәбез. Бу вакытта яклары P_2 неке кебек үк булган P' күппочмагы табарбыз.



287 нче рәсем

Исбатлау буенча P' күппочмагы хәрәкәт белән P_2 күппочмагына күчерелә. Димәк, охшаш үзгәртү һәм хәрәкәт белән P_1 күппочмагы P_2 күппочмагына күчерелә. Ә бу яңадан охшаш үзгәртү була да инде. Теорема исбатланды.

Охшаш фигураларның охшашлык коэффициенты тиңдәшле сызыкча үлчәнешләренең чагыштырмасына тигез. Қабарынкы төзек n-почмакларда якларының озынлыклары, камаулы һәм камаучы әйләнәләрнең радиуслары шундый сызыкча үлчәнешләр булырлар. Моннан төзек n-почмакларның яклары, камаулы әйләнәләрнең радиуслары һәм камаучы әйләнәләрнең радиуслары чагыштырмалары тигез икәнлеге килеп чыга. n-почмакларның периметрлары чагыштырмасы яклары чагыштырмасына тигез булганга күрә, ***төзек n-почмакларның периметрлары, камаулы әйләнәләрнең радиуслары һәм камаучы әйләнәләрнең радиуслары чагыштырмалары тигезләр.***

119. ӘЙЛӘНӘ ОЗЫНЛЫГЫ

Әйләнә озынлыгын түбәндәгечә күз алдына китерергә мөмкин. Җепне әйләнә рәвешендә дип уйлыйк. Аннары аны, кисеп, очларыннан тартып турайтыйк. Килеп чыккан кисемтә әйләнәнең озынлыгы булыр. Әйләнәнең радиусы билгеле булганда, озынлыгын ничек табарга? Шунысы ачык, әйләнәгә камаулы төзек күппочмакның яклары санын чикләнмәгән рәвештә арттырганда аның периметры әйләнә озынлыгына чиксез нык якынлаша (288 нче рәсем). Шуннан чыгып, әйләнә озынлыгының кайбер үзлекләрен исбатларбыз.

Теорема 13.5. ***Әйләнә озынлыгының үзенең диаметрына чагыштырмасы әйләнәгә бәйле түгел, ягъни теләсә нинди ике әйләнә өчен бер үк.***

Исбатлау. Теләсә нинди ике әйләнә алыйк. R_1 һәм R_2 — аларның радиуслары, ә l_1 һәм l_2 — әйләнәләрнең озынлыклары булсын. Теореманың раславы дөрес түгел

288 нче рәсем

Архимед — борынгы грек галиме (безнең эрага кадәр III г.).

һәм $\frac{l_1}{2R_1} \neq \frac{l_2}{2R_2}$ дип фараз итик, мәсәлән,

$$\frac{l_1}{2R_1} < \frac{l_2}{2R_2}. \qquad (*)$$

Бу әйләнәләргә яклар саны n бик зур булган камаулы кабарынкы төзек күппочмаклар сызыйк. Әгәр n бик зур булса, безнең әйләнәләрнең озынлыклары камаулы күппочмакларның периметрлары p_1 һәм p_2 дән бик аз аерылыр. Шуңа күрә (*) тигезсезлегендә l_1 не p_1 гә, ә l_2 не p_2 гә алмаштырудан тигезсезлек үзгәрмәс:

$$\frac{p_1}{2R_1} < \frac{p_2}{2R_2}. \qquad (**)$$

Ләкин, белгәнебезчә, төзек n-почмакларның периметрлары чагыштырмасы камаучы әйләнәләрнең радиуслары чагыштырмасына тигез:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Моннан $\frac{p_1}{R_1} = \frac{p_2}{R_2}$. Ә бу (**) тигезсезлегенә каршы килә. Теорема исбатланды.

Әйләнә озынлыгының үзенең диаметрына чагыштырмасын грек алфавиты хәрефе π («пи» дип укыла) белән тамгалау кабул ителгән:

$$\frac{l}{2R} = \pi.$$

π — иррациональ сан. Якынча кыйммәте

$$\pi \approx 3{,}1416.$$

π санының якынча кыйммәте борынгы грекларга ук инде билгеле була. π нең бик гади якынча кыйммәтен Архимед таба. Ул $\frac{22}{7}$ гә тигез. Бу π нең төгәл кыйммәтеннән 0,002 дән дә кимрәккә аерыла.

$\frac{l}{2R} = \pi$ булганга күрә, әйләнә озынлыгы $l = 2\pi R$ формуласы буенча исәпләнә.

120. ПОЧМАКНЫҢ РАДИАНЛЫ ҮЛЧӘМЕ

$n°$ лы үзәк почмакка тиңдәшле булган әйләнә дугасының озынлыгын табыйк (289 нчы рәсем). Җәелгән почмакка ярымәйләнә озынлыгы πR тиңдәш була. Шулай булгач, $1°$ лы почмакка $\frac{\pi R}{180}$ озынлыгындагы дуга тиңдәш, ә $n°$ лы почмакка

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot n$$

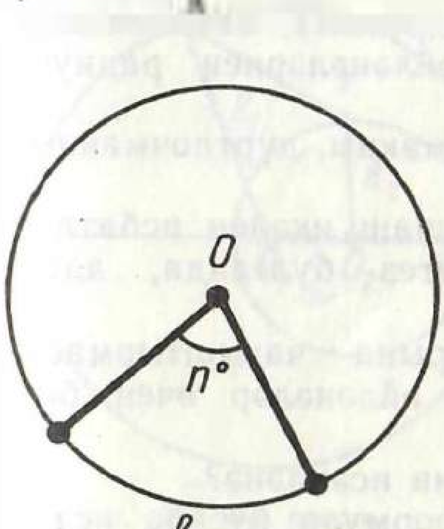
озынлыгындагы дуга тиңдәш була.

Почмакка тиңдәшле дуга озынлыгының әйләнә радиусына чагыштырмасы шул почмакның *радианлы үлчәме* дип атала. Әйләнә дугасы озынлыгы формуласыннан

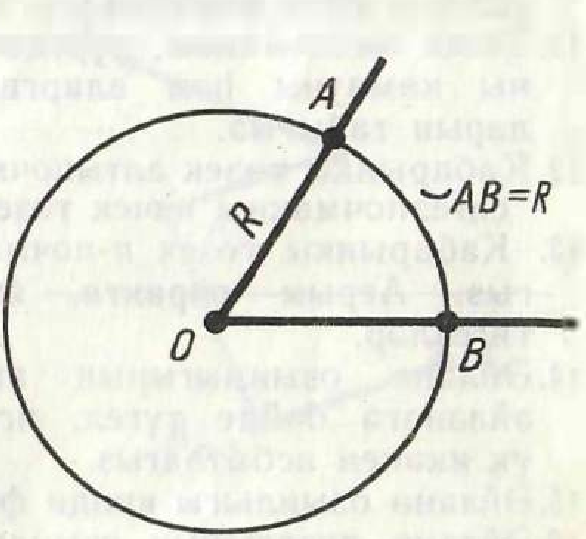
$$\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180} \cdot n$$

икәнлеге, ягъни *почмакның радианлы үлчәме аның градуслы үлчәмен $\frac{\pi}{180°}$ ка тапкырлап табыла. Аерым алганда,* $180°$ лы почмакның радианлы үлчәме π гә тигез, ә туры почмакның радианлы үлчәме $\frac{\pi}{2}$ гә тигез.

Почмакларның радианлы үлчәм берәмлеге итеп *радиан* алына. Бер радианлы почмак — дуга озынлыгы радиуска тигез булган почмак ул (290 нчы рәсем). Бер радиан почмакның градуслы үлчәме $\frac{180°}{\pi} \approx 57°$ ка тигез.



289 нчы рәсем



290 нчы рәсем

Мәсьәлә (50). $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$ булса, өчпочмак почмакларының радианлы үлчәмнәрен табыгыз.

Чишү. A почмагының радианлы үлчәме $60° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{3}$ кә тигез.

B почмагының радианлы үлчәме $45° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{4}$ кә тигез. Өчпочмак почмакларының суммасы турындагы теорема нигезендә $\angle C = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$.

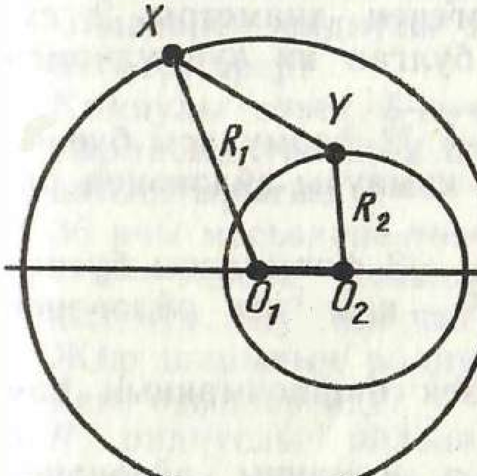
КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Сынык сызык, сынык сызыкның озынлыгы дип нәрсә атала?
2. Сынык сызыкның озынлыгы аның очларын тоташтырган кисемтә озынлыгыннан кечкенә түгел икәнен исбатлагыз.
3. Күппочмак, кабарынкы күппочмак дип нәрсә атала?
4. Яссы почмак дип нәрсә атала?
5. Кабарынкы күппочмакның бирелгән түбә янындагы почмагы дип нәрсә атала?
6. Кабарынкы күппочмакның почмаклары суммасы өчен формула чыгарыгыз.
7. Кабарынкы күппочмакның тышкы почмагы дип нәрсә атала?
8. Төзек күппочмакның әйләнәгә камаулы һәм әйләнәне камаучы булганын исбатлагыз.
9. Күппочмакның үзәге дип, күппочмакның үзәк почмагы дип нәрсә атала?
10. Төзек n-почмакка камаулы һәм аны камаучы әйләнә радиуслары өчен формулалар чыгарыгыз.
11. Төзек өчпочмакны, дүртпочмакны (квадратны), алтыпочмакны камаучы һәм аларга камаулы әйләнәләрнең радиусларын табыгыз.
12. Кабарынкы төзек алтыпочмакны, өчпочмакны, дүртпочмакны, сигезпочмакны ничек төзергә?
13. Кабарынкы төзек n-почмакларның охшаш икәнен исбатлагыз. Аерым очракта, яклары бертигез булганда, алар тигезләр.
14. Әйләнә озынлыгының аның диаметрына чагыштырмасы әйләнәгә бәйле түгел, ягъни барлык әйләнәләр өчен бер үк икәнен исбатлагыз.
15. Әйләнә озынлыгы нинди формула буенча исәпләнә?
16. Әйләнә дугасының озынлыгы нинди формула буенча исәпләнә?

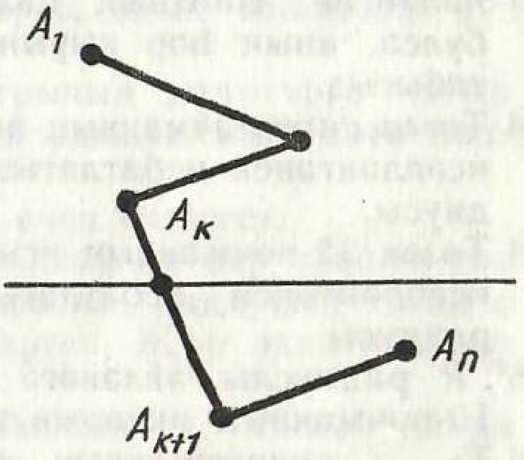
17. Почмакның радианлы үлчәме дип нәрсә атала?
18. 180° лы һәм 90° лы почмакларның радианлы үлчәмнәре нәрсәгә тигез?

Мәсьәләләр

1. Радиуслары R_1 һәм R_2, ә үзәкләре арасындагы ераклык $d > R_1 + R_2$ булган ике әйләнә бирелгән. Бу әйләнәләрнең Y һәм X нокталары арасындагы иң зур һәм иң кечкенә ераклык нәрсәгә тигез?
2. 1 нче мәсьәләне $d < R_1 - R_2$ очрагы өчен чишегез (291 нче рәсем).
3. Әгәр сынык сызыкның түбәләре бер турыда ятмаса, ул вакытта сынык сызыкның озынлыгы аның очларын тоташтыручы кисемтәдән озынрак икәнен исбатлагыз.
4. Йомык сынык сызыкның теләсә нинди ике түбәсе арасындагы ераклык сынык сызык озынлыгының яртысыннан зур түгел икәнен исбатлагыз.
5. Йомык сынык сызыкның һәр буынының озынлыгы калган буыннарның озынлыклары суммасыннан зур түгел икәнен исбатлагыз.
6. Йомык сынык сызыкның буыннары 1 м, 2 м, 3 м, 4 м, 11 м озынлыкта булуы мөмкинме? Җавапны аңлатып бирегез.
7. Сынык сызыкның очлары бирелгән турыдан төрле якта ятсалар, ул сынык сызыкның бу турыны кискәнлеген исбатлагыз (292 нче рәсем).
8. n-почмакның ничә диагонале бар?
9. Кабарынкы n-почмакның һәр түбәсе янында берәр итеп алынган тышкы почмакларының суммасы нәрсәгә тигез?

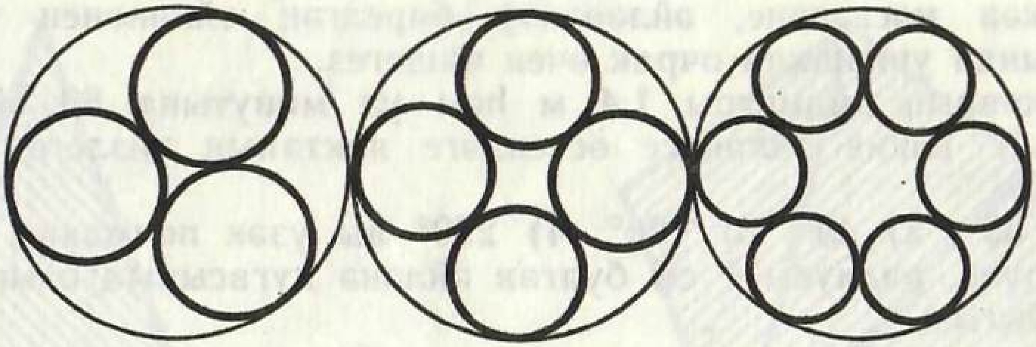


291 нче рәсем



292 нче рәсем

10. Кабарынкы дүртпочмакның почмаклары 1, 2, 3, 4 саннарына пропорциональ. Аларны табыгыз.
11. Әйләнәне камаучы дүртпочмакның капма-каршы якларының озынлыклары суммасы тигез икәнен исбатлагыз.
12. Һәр эчке почмагы 1) 135° ка; 2) 150° ка тигез булган төзек күппочмакның ничә ягы бар?
13. Һәр тышкы почмагы 1) 36° ка; 2) 24° ка тигез булган төзек күппочмакның ничә ягы бар?
14. Төзек $2n$-почмакның түбәләрен бер түбә аша тоташтырганда, төзек n-почмак килеп чыкканын исбатлагыз.
15. Төзек n-почмак якларының урталары икенче бер төзек n-почмакның түбәләре булганын исбатлагыз.
16. Төзек n-почмакның ягы a_n өчен аны камаучы әйләнә радиусы R аша һәм аңа камаулы әйләнә радиусы r аша күрсәтелгән аңлатма табыгыз. $n=3$, 4, 6 булганда, a_n ны исәпләп чыгарыгыз.
17. Радиусның уртасы аша аңа перпендикуляр итеп үткәрелгән хорда, шул әйләнәгә камаулы төзек өчпочмакның ягы икәнен исбатлагыз.
18. Төзек өчпочмакка камаулы әйләнәнең радиусы шул өчпочмакны камаучы әйләнә радиусыннан ике тапкыр кечерәк икәнен исбатлагыз.
19. Әйләнәгә камаулы төзек өчпочмакның ягы a га тигез. Шул ук әйләнәгә камаулы квадратның ягын табыгыз.
20. 4 дм радиуслы әйләнәгә төзек өчпочмак камалган һәм аның бер ягы өстендә квадрат төзелгән. Квадратны камаучы әйләнәнең радиусын табыгыз.
21. 4 см диаметрлы валның башы квадрат рәвешендә кисеп эшләнгән. Квадрат ягының мөмкин булган иң зур үлчәмен табыгыз.
22. Газ япкычы винтының башы төзек өчкырлык формасында эшләнгән. Винтның цилиндрик кисәгенең диаметры 2 см булса, аның һәр кырының мөмкин булган иң зур үлчәмен табыгыз.
23. Төзек сигезпочмакның ягы $a_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ формуласы буенча исәпләнгәнен исбатлагыз, монда R — камаучы әйләнәнең радиусы.
24. Төзек 12-почмакның ягы $a_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ формуласы буенча исәпләнгәнен исбатлагыз, монда R — камаучы әйләнәнең радиусы.
25*. R радиуслы әйләнәгә камаулы төзек бишпочмакның һәм 10-почмакның якларын табыгыз.
26. Төзек күппочмакның ягы a га, ә камаучы әйләнәнең радиусы R га тигез. Камаулы әйләнәнең радиусын табыгыз.
27. Төзек күппочмакның ягы a га, камаулы әйләнәнең радиусы r га тигез. Камаучы әйләнәнең радиусын табыгыз.



293 нче рәсем

28. R радиуслы әйләнәне камаучы төзек күппочмакның ягы b ны һәм яклар саны шундый ук булган һәм шул ук әйләнәгә камалган төзек күппочмакның ягы a ны R аша күрсәтегез.
29. R радиуслы әйләнәгә камаулы төзек күппочмакның ягы a ны һәм яклар саны шундый ук булган һәм шул ук әйләнәне камаучы төзек күппочмакның ягы b ны R аша күрсәтегез.
30. Әйләнәгә камаулы төзек 12-почмак төзегез.
31. Әйләнәне камаучы төзек өчпочмак, квадрат, 8-почмак төзегез.
32. Бер төзек n-почмакка камаулы һәм аны камаучы әйләнәләрнең радиуслары r_1 гә һәм R_1 гә, ә икенче төзек n-почмакка камаулы әйләнәнең радиусы r_2 гә тигез. Икенче n-почмакны камаучы әйләнәнең радиусы нәрсәгә тигез?
33. Ике төзек n-почмакның периметрлары чагыштырмасы $a:b$ га тигез. Аларга камаулы һәм аларны камаучы әйләнәләрнең чагыштырмасы нинди?
34. Радиусы 1) 10 м; 2) 15 м га тигез булган әйләнәнең озынлыгын исәпләп чыгарыгыз.
35. Әйләнәнең радиусы 1 мм га үзгәрсә, аның озынлыгы күпмегә үзгәрер?
36. Камаулы төзек 8-почмак периметрының диаметрга чагыштырмасын табыгыз һәм аны π нең якынча кыйммәте белән чагыштырыгыз.
37. 36 нчы мәсьәләне төзек 12-почмак өчен чишегез.
38. 1 м — экватор озынлыгының 40 миллионнан бер өлешен тәшкил итә. Шуннан чыгып, Җир шарының радиусын табыгыз.
39. Җир шарының радиусы 1 см га артса, Җир экваторы күпмегә озынаер иде?
40. R радиуслы әйләнә эченә урнашкан n тигез әйләнә, бирелгән әйләнәгә дә һәм үзара да орыналар. n саны 1) 3 кә; 2) 4 кә; 3) 6 га тигез булганда, бу әйләнәләрнең радиусларын табыгыз (293 нче рәсем).

41. Үткән мәсьәләне, әйләнәләр бирелгән әйләнәнең тышкы ягында урнашкан очрак өчен чишегез.

42. Шкивның диаметры 1,4 м һәм ул минутына 80 әйләнеш ясый. Шкив әйләнәсе өстендәге ноктаның тизлеген табыгыз.

43. 1) 30°; 2) 45°; 3) 120°; 4) 270° лы үзәк почмакка җавап бирүче, радиусы 1 см булган әйләнә дугасының озынлыгын табыгыз.

44. Үзәк почмакка тиңдәшле дуга әйләнәнең 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{3}{4}$ ен тәшкил итсә, ул ничә градусны эченә ала?

45. Аралары 1 км булган Җир шары өслегенең ике ноктасына үткәрелгән радиуслары нинди почмак төзиләр? Җирнең радиусын 6370 км дип алырга.

46. Радиусы $R=1$ м булганда, 1) 45°; 2) 30°; 3) 120°; 4) 45°45′; 5) 60°30′; 6) 150°36′ лы үзәк почмакка тиңдәшле дуга озынлыгын табыгыз.

47. Бирелгән a хордасы буенча, градуслы үлчәме 1) 60°; 2) 90°; 3) 120° булган дуга озынлыгын табыгыз.

48. Дуга озынлыгы l буенча: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120° лы дугага тиңдәшле хорданы табыгыз.

49. 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° лы почмакның радианлы үлчәмен табыгыз.

50. $\angle A=60°$, $\angle B=45°$ булса, ABC өчпочмагы почмакларының радианлы үлчәмен табыгыз.

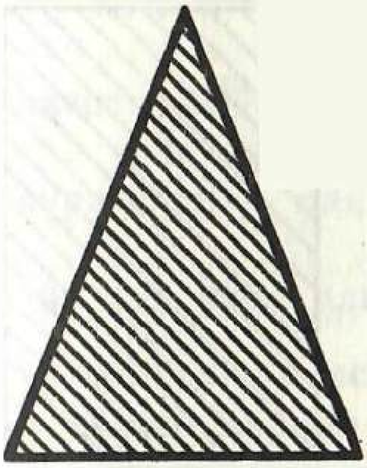
51. Почмакның радианлы үлчәме 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{8}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $\frac{7\pi}{18}$; 6) $\frac{4\pi}{3}$ гә тигез булса, аның радианлы үлчәмен табыгыз.

§ 14. ФИГУРАЛАРНЫҢ МӘЙДАННАРЫ

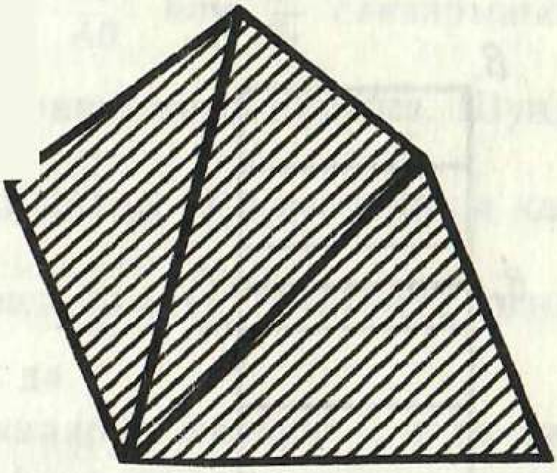
121. МӘЙДАН ТӨШЕНЧӘСЕ

Геометрик фигураны чикле сандагы яссы өчпочмакларга бүлгәләргә мөмкин булса, без аны *гади* фигура дип атарбыз. Исегезгә төшерәбез, яссы өчпочмак дип яссылыкның өчпочмак белән чикләнгән чикле өлкәсе атала (294 нче рәсем).

Кабарынкы яссы күппочмак гади фигурага мисал була. Ул кайсы да булса бер түбәсеннән үткәрелгән диагональләр белән яссы өчпочмакларга бүлгәләнә (295 нче рәсем). Бу параграфта



294 нче рәсем



295 нче рәсем

без яссы күппочмакларны гына карарбыз, шуңа күрә һәр очракта да «яссы» сүзен кабатлап тормабыз.

Гади фигуралар өчен мәйдан билгеләмәсен бирик.

Гади фигуралар өчен *мәйдан — санча кыйммәте түбәндәге үзлекләргә ия булган уңай зурлык ул.*

1) *Тигез фигураларның мәйданнары тигез була.*

2) *Әгәр фигура гади фигуралардан торган кисәкләргә бүлгәләнсә, бу фигураның мәйданы шул кисәкләрнең мәйданнары суммасына тигез була.*

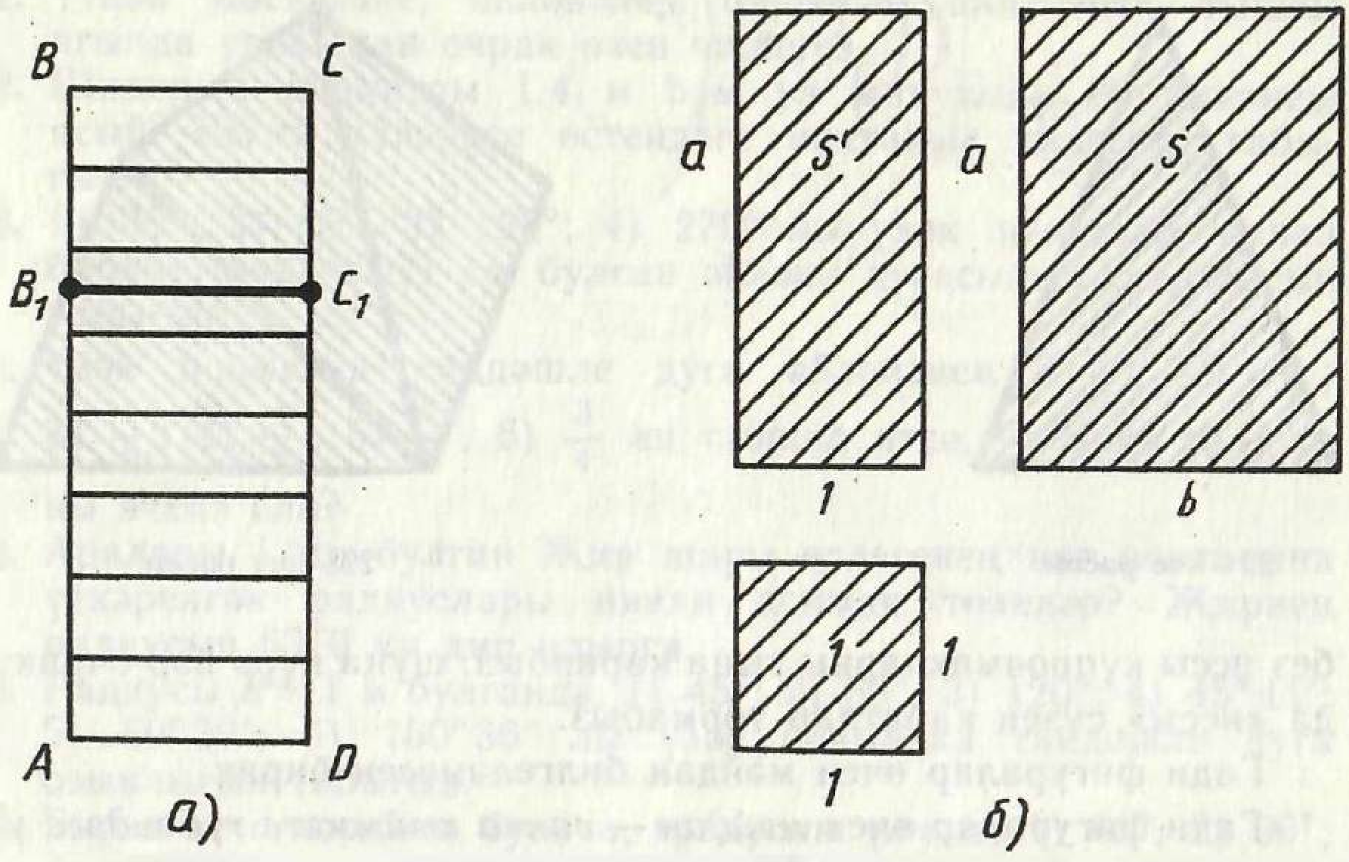
3) *Ягы үлчәү берәмлегенә тигез булган квадратның мәйданы берәмлеккә тигез.*

Билгеләмәдә сүз барган квадратның ягы 1 м га тигез булса, аның мәйданы квадрат метрларда ($м^2$) күрсәтелер. Квадратның ягы 100 м булса, мәйданы бер гектар була. Квадратның ягы 1 км булса, аның мәйданы квадрат километрларда күрсәтелер һ. б. ш.

122. ТУРЫПОЧМАКЛЫКНЫҢ МӘЙДАНЫ

Яклары a, b булган турыпочмаклыкның мәйданын табыйк. Моның өчен башта нигезләре тигез булган ике турыпочмаклыкның мәйданнары чагыштырмасы аларның биеклекләре чагыштырмасына тигез икәнен исбатларбыз.

$ABCD$ һәм AB_1C_1D турыпочмаклыклары уртак AD нигезенә ия булсын ди (296 нчы рәсем, a). S һәм S_1 исә аларның мәйданнары булсын. $\frac{S}{S_1}=\frac{AB}{AB_1}$ икәнен исбатларбыз. Турыпочмаклыкның AB ягын n (n — зур сан) тигез кисәккә бүлик,



296 нчы рәсем

аларның һәркайсы $\frac{AB}{n}$ га тигез булыр. m исә AB_1 ягында яткан бүлү нокталары саны булсын. Ул вакытта

$$\left(\frac{AB}{n}\right)m \leqslant AB_1 \leqslant \left(\frac{AB}{n}\right)(m+1).$$

Моннан, AB га бүлеп, табабыз:

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{AB_1}{AB} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (*)$$

Бүлү нокталары аша AD нигезенә параллель турылар үткәрәбез. Алар $ABCD$ турыпочмаклыгын n тигез турыпочмаклыкка бүләләр. Аларның һәркайсының мәйданы $\frac{S}{n}$ га тигез. AB_1C_1D турыпочмаклыгы түбәннән исәпләгәндә беренче m турыпочмаклыкны эченә ала һәм $m+1$ турыпочмаклык эчендә урнаша. Шуңа күрә

$$\left(\frac{S}{n}\right)m \leqslant S_1 \leqslant \left(\frac{S}{n}\right)(m+1).$$

Моннан

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{S_1}{S} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (**)$$

(*) һәм (**) тигезсезлекләреннән без $\frac{AB_1}{AB}$ һәм $\frac{S_1}{S_2}$ саннарының икесе дә $\frac{m}{n}$ белән $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$ арасында урнашканын күрәбез. Шуңа күрә алар $\frac{1}{n}$ нан да зурракка аерылмыйлар. Ә n ны теләгән кадәр зур итеп алырга мөмкин — бу исә $\frac{S_1}{S}=\frac{AB_1}{AB}$ булганда гына мөмкин, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Хәзер мәйдан берәмлеге булган квадрат, яклары 1, a га тигез турыпочмаклык һәм яклары a, b га тигез турыпочмаклык алыйк (296 нчы рәсем, *б*). Алдагы исбатлау нигезендә аларның мәйданнары чагыштырмасын язабыз:

$$\frac{S'}{1}=\frac{a}{1} \text{ һәм } \frac{S}{S'}=\frac{b}{1}.$$

Бу тигезлекләрне буынга буын тапкырлап, табабыз:

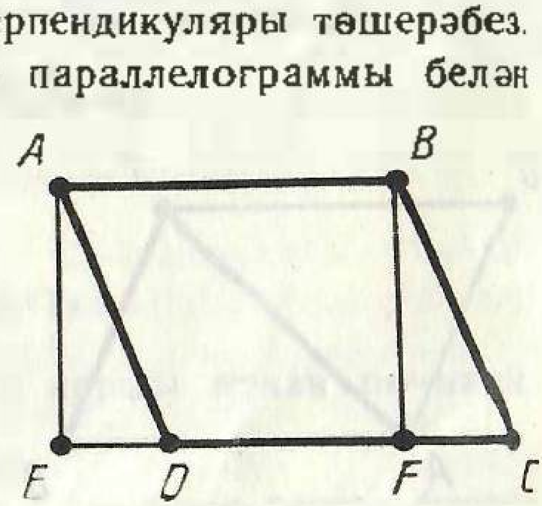
$$S=ab.$$

Шулай итеп, ***яклары a, b булган турыпочмаклыкның мәйданы S = ab формуласы буенча исәпләнә.***

123. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ МӘЙДАНЫ

ABCD — бирелгән параллелограмм булсын. Әгәр ул турыпочмаклык булмаса, аның бер почмагы: *A* яки *B* кысынкы. Ачыклык өчен, 297 нче рәсемдә сурәтләнгәнчә, *A* почмагын кысынкы дип алыйк.

A түбәсеннән *CD* турысына *AE* перпендикуляры төшерәбез. *ABCE* трапециясенең мәйданы *ABCD* параллелограммы белән *ADE* өчпочмагының мәйданнары суммасына тигез булыр.



297 нче рәсем

B түбәсеннән *CD* турысына *BF* перпендикуляры төшерик. Ул вакытта *ABCE* трапециясенең мәйданы *ABFE* турыпочмаклыгы белән *BCF* өчпочмагының мәйданнары суммасына тигез булыр.

ADE һәм *BCF* турыпочмаклы

өчпочмаклары тигез, димәк, аларның мәйданнары да тигез. Моннан $ABCD$ параллелограммының мәйданы $ABFE$ турыпочмаклыгының мәйданына, ягъни $AB \cdot BF$ ка тигез икәнлеге килеп чыга.

BF кисемтәсе параллелограммның AB һәм CD якларына тиңдәшле *биеклеге* дип атала.

Шулай итеп, ***параллелограммның мәйданы аның бер ягы белән шул якка үткәрелгән биеклеге тапкырчыгышына тигез.***

124. ӨЧПОЧМАК МӘЙДАНЫ

ABC — бирелгән өчпочмак булсын (298 нче рәсем). Бу өчпочмакны, рәсемдә күрсәтелгәнчә, $ABCD$ параллелограммына тутырыйк. Параллелограммның мәйданы ABC һәм CDA өчпочмакларының мәйданнары суммасына тигез. Бу өчпочмаклар тигез булганлыктан, параллелограммның мәйданы ABC өчпочмагының икеләтелгән мәйданына тигез. Параллелограммның AB ягына тиңдәшле биеклеге ABC өчпочмагының AB ягына үткәрелгән биеклегенә тигез.

Моннан ***өчпочмакның мәйданы бер ягы белән шул якка үткәрелгән биеклеге тапкырчыгышының яртысына тигез икәнлеге килеп чыга:***

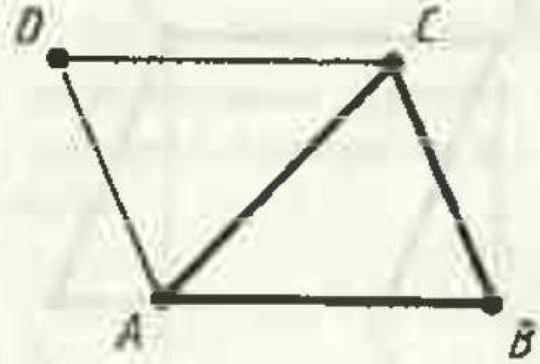
$$S = \frac{1}{2}ah.$$

Өчпочмакның мәйданы теләсә кайсы ике ягы белән шул яклар арасындагы почмак синусының тапкырчыгышы яртысына тигез икәнен исбатларбыз.

ABC — бирелгән өчпочмак булсын (299 нчы рәсем).

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A$$

икәнен исбатлыйк.

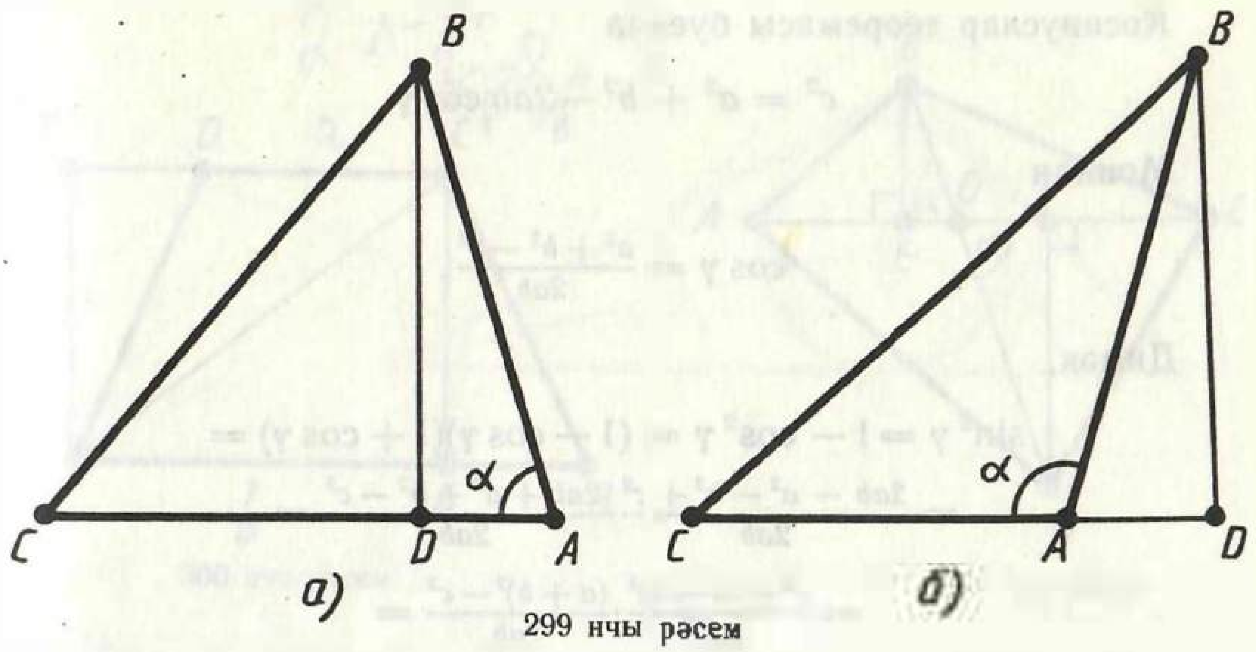


298 нче рәсем

ABC өчпочмагында BD биеклеге үткәрик. Моннан

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD.$$

Турыпочмаклы ABD өчпочмагыннан $BD = AB \cdot \sin \alpha$, әгәр α — кысынкы почмак булса (299 нчы



299 нчы рәсем

рәсем, *а*), яки $BD = AB\sin(180° - \alpha)$, әгәр α — җәенке почмак булса (299 нчы рәсем, *б*). $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, шуңа күрә һәр очракта да $BD = AB\sin\alpha$. Шулай булгач, өчпочмакның мәйданы $S = \frac{1}{2}AC \cdot AB\sin A$. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

125. ӨЧПОЧМАК МӘЙДАНЫ ӨЧЕН ГЕРОН ФОРМУЛАСЫ

Мәсьәлә (29). Өчпочмак мәйданы өчен Герон[1] формуласы

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ны чыгарыгыз, монда *a*, *b*, *c* — өчпочмак якларының озынлыклары, ә $p = \frac{a+b+c}{2}$ — ярымпериметр.

Чишү. Билгеле булганча,

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

биредә γ — өчпочмакның *c* ягына каршы яткан почмагы.

[1] Герон Александрийский — безнең эраның I гасырында яшәгән борынгы грек галиме.

Косинуслар теоремасы буенча

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Моннан

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Димәк,

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma) =$$
$$= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$
$$= \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} =$$
$$= \frac{1}{4a^2b^2}(c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c).$$

$a + b + c = 2p$, $a + b - c = 2p - 2c$, $a + c - b = 2p - 2b$, $c - a + b = 2p - 2a$ икәнен искә алып, табабыз:

$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Шулай итеп,

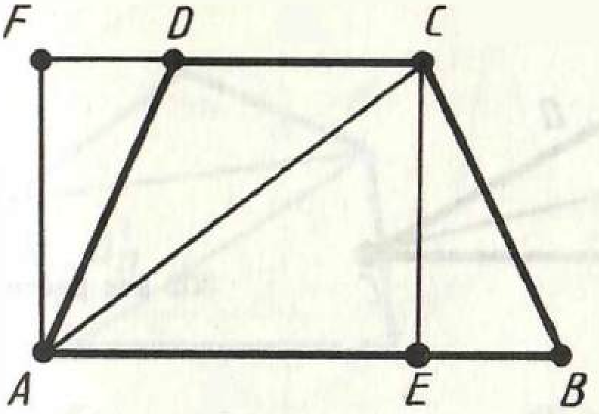
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

126. ТРАПЕЦИЯ МӘЙДАНЫ

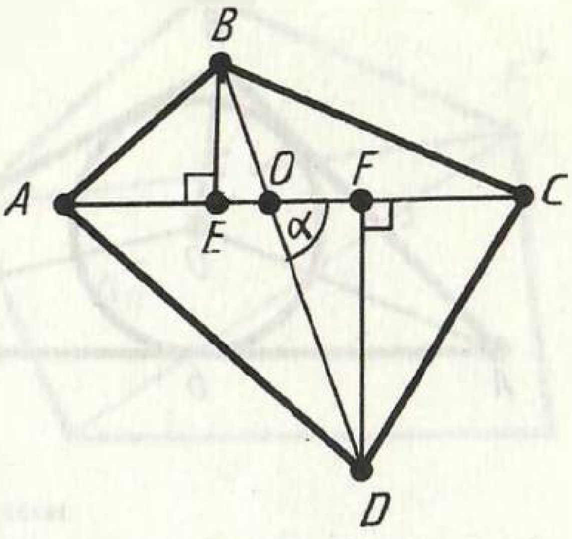
ABCD — бирелгән трапеция булсын (300 нче рәсем). Трапециянең *AC* диагонале аны *ABC* һәм *CDA* өчпочмакларына бүлә. Шулай булгач, трапециянең мәйданы бу өчпочмакларның мәйданнары суммасына тигез. *ABC* өчпочмагының мәйданы $\frac{1}{2}AB \cdot CE$ га, ә *ACD* өчпочмагының мәйданы $\frac{1}{2}DC \cdot AF$ ка тигез. Ул өчпочмакларның *CE* һәм *AF* биеклекләре *AB* һәм *CD* параллель турылары арасындагы ераклыкка тигез. Бу ераклык трапециянең *биеклеге* дип атала.

Шулай булгач, ***трапециянең мәйданы нигезләренең ярымсуммасы белән биеклегенең тапкырчыгышына тигез:***

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$



300 нче рәсем



301 нче рәсем

Мәсьәлә (40). Дүртпочмакның диагональләре кисешсәләр, дүртпочмакның мәйданы диагональләре белән шул диагональләр арасындагы почмак синусы тапкырчыгышының яртысына тигез икәнен исбатлагыз.

Чишү. Дүртпочмакның мәйданы S ABC һәм ADC өчпочмакларының мәйданнары суммасына тигез (301 нче рәсем):

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BE + \frac{1}{2}AC \cdot DF =$$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot BO \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}AC \cdot DO \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}AC \sin\alpha (BO + OD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\alpha,$$

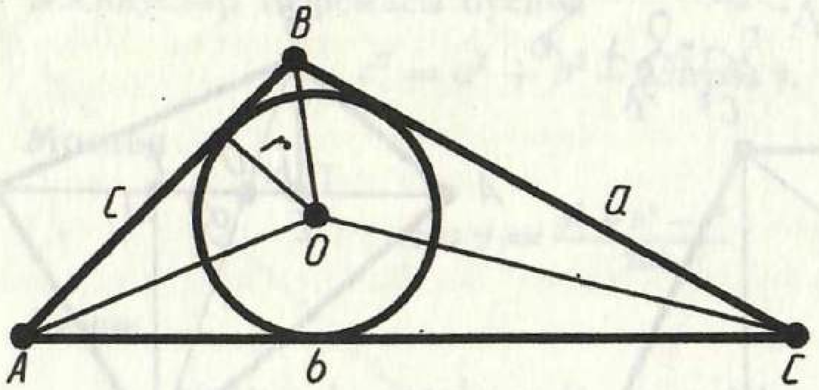
шуны исбатларга кирәк иде дә.

127. ӨЧПОЧМАККА КАМАУЛЫ ҺӘМ АНЫ КАМАУЧЫ ӘЙЛӘНӘЛӘРНЕҢ РАДИУСЛАРЫ ФОРМУЛАЛАРЫ

Мәсьәлә (42). Өчпочмакны камаучы һәм аңа камаулы әйләнәләрнең радиуслары (R һәм r) өчен түбәндәге формулаларны чыгарыгыз:

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{2S}{a+b+c},$$

монда a, b, c — өчпочмакның яклары, S — аның мәйданы.



302 нче рәсем

Чишү. R өчен кирәкле формуладан башлыйк. Безгә билгеле булганча, $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$, монда α — өчпочмакның a ягына каршы ятучы почмагы.

Тигезлекнең уң кисәгенең санаучысын да, ваклаучысын да bc га тапкырлап һәм $\frac{1}{2}bc\sin\alpha=S$ икәнен искә алып, табабыз:

$$R=\frac{abc}{4S}.$$

r өчен формула чыгарыйк (302 нче рәсем). ABC өчпочмагының мәйданы OAB, OBC һәм OCA өчпочмакларының мәйданнары суммасына тигез:

$$S=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br.$$

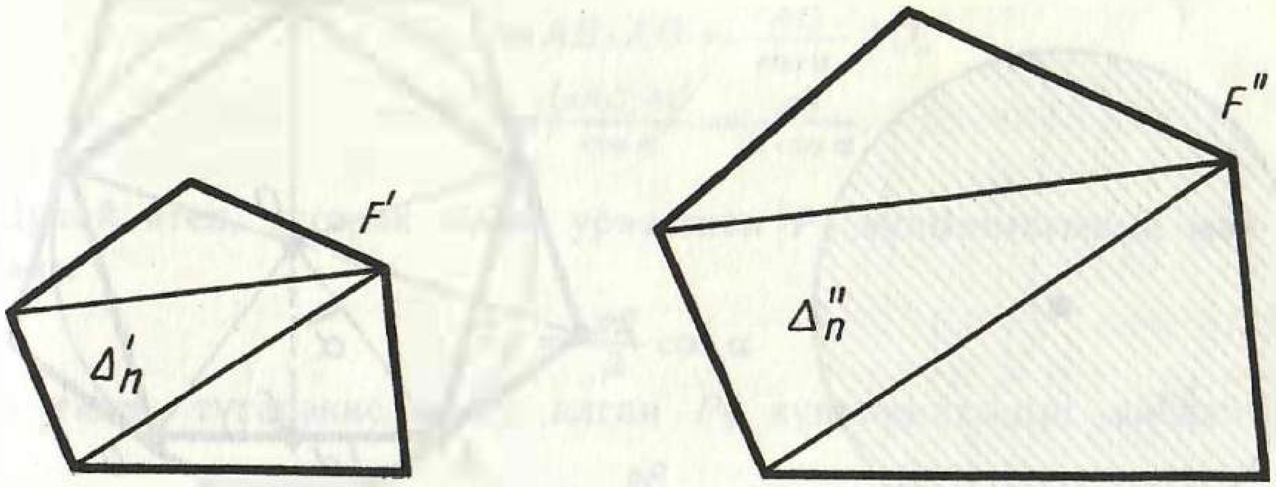
Моннан

$$r=\frac{2S}{a+b+c}.$$

128. ОХШАШ ФИГУРАЛАРНЫҢ МӘЙДАННАРЫ

F' һәм F'' — охшаш гади фигуралар булсын. Бу фигураларның мәйданнары чагыштырмасы нәрсәгә тигез икәнен ачыклыйк. Ул фигуралар охшаш, шуңа күрә F' фигурасы F'' фигурасына күчә торган охшаш үзгәртү бар.

F' фигурасын Δ_1', Δ_2', Δ_3', ... өчпочмакларына бүлгәлик (303 нче рәсем). F' фигурасын F'' фигурасына күчерә торган охшаш үзгәртү бу өчпочмакларны F'' фигурасы бүлгәләнгән Δ_1'', Δ_2'', Δ_3'', ... өчпочмакларына күчерер. F' фигурасының мәй-



303 нче рәсем

даны Δ_1', Δ_2', ... өчпочмакларының мәйданнары суммасына, ә F'' фигурасының мәйданы Δ_1'', Δ_2'', Δ_3'', ... өчпочмакларының мәйданнары суммасына тигез.

Әгәр охшашлык коэффициенты k га тигез булса, Δ_n'' өчпочмагының сызыкча үлчәмнәре Δ_n' өчпочмагының тиңдәшле үлчәмнәреннән k тапкыр зуррак булыр. Атап әйткәндә, Δ_n'' өчпочмагының ягы һәм биеклеге Δ_n' өчпочмагының тиңдәшле ягы һәм биеклегеннән k тапкыр зуррак. Моннан

$$S(\Delta_n'') = k^2 S(\Delta_n')$$

икәнлеге килеп чыга. Бу тигезлекләрне буынлап кушып, табабыз:

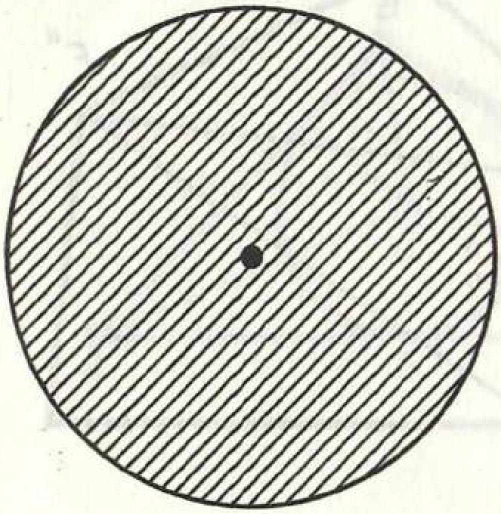
$$S(F'') = k^2 S(F').$$

Охшашлык k коэффициенты F' һәм F'' фигураларының тиңдәшле сызыкча үлчәмнәренең чагыштырмасына тигез. Шуңа күрә *охшаш фигураларның мәйданнары чагыштырмасы бу фигураларның тиңдәшле сызыкча үлчәмнәренең квадратлары чагыштырмасына тигез.*

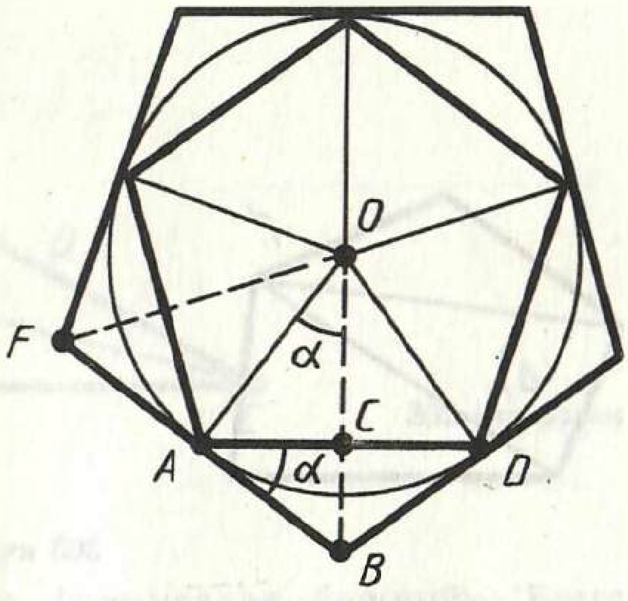
129. ТҮГӘРӘК МӘЙДАНЫ

Әгәр фигура гади, ягъни аны чикле сандагы өчпочмакларга бүләргә мөмкин булса, аның мәйданы шул өчпочмакларның мәйданнары суммасына тигез. Ирекле формадагы фигураның мәйданы түбәндәгечә билгеләнә.

Әгәр бирелгән фигураны эченә алган һәм аның эчендә урнаша алган гади фигуралар булып, аларның мәйданнары бирелгән фигураның мәйданы S тан теләгән кадәр аз аерылсалар, *бирел-*



304 нче рәсем



305 нче рәсем

гән фигураның мәйданы S ка тигез була. Бу билгеләмәне түгәрәк мәйданын табу өчен кулланыйк.

Яссылыкның бирелгән ноктасыннан ераклыгы бирелгән ераклыктан артмаган барлык нокталарыннан торган фигура *түгәрәк* дип атала. Бу нокта үзе — *түгәрәкнең үзәге* дип, ә бирелгән ераклык түгәрәкнең *радиусы* дип атала. Үзәге дә, радиусы да шул ук булган әйләнә әлеге түгәрәкнең чиге була (304 нче рәсем).

Түгәрәкнең мәйданы аны чикләүче әйләнә озынлыгының яртысын радиуска тапкырлаганга тигез.

Моны исбатлыйк. Ике төзек n-почмак төзибез: P_1 — түгәрәккә камаулы һәм P_2 — түгәрәкне камаучы (305 нче рәсем). P_1 һәм P_2 күппочмаклары — гади фигуралар. P_2 күппочмагы түгәрәкне эченә ала, ә P_1 күппочмагы түгәрәк эченә урнашкан.

P_1 күппочмагының түбәләренә үткәрелгән радиуслар аны AOD өчпочмагына тигез булган n өчпочмакка бүлә. Шуңа күрә

$$S_{P_1} = nS_{AOD}.$$

$S_{AOD} = AC \cdot OC = AC \cdot AO \cdot \cos\alpha$ булганга күрә,

$$S_{P_1} = (nAC)AO\cos\alpha = \frac{pR}{2}\cos\alpha,$$

биредә p — күппочмак P_1 нең периметры, R — түгәрәкнең радиусы. P_2 күппочмагының мәйданын аналогия буенча табабыз:

$$S_{P_2} = nS_{BOF},$$

$$S_{BOF} = AB \cdot AO = \frac{AC}{\cos\alpha} \cdot AO,$$

$$S_{P_2} = \frac{(nAC)AO}{\cos\alpha} = \frac{pR}{2\cos\alpha}.$$

Шулай итеп, түгәрәк эченә урнашкан P_1 күппочмагының мәйданы

$$S_{P_1} = \frac{pR}{2}\cos\alpha$$

га тигез, түгәрәкне эченә алган P_2 күппочмагының мәйданы

$$S_{P_2} = \frac{pR}{2\cos\alpha}.$$

n җитәрлек дәрәҗәдә зур булганда, p периметры әйләнә озынлыгы l дан теләгән кадәр аз аерыла, ә $\cos\alpha$ исә, α почмагы бик кечкенә булу сәбәпле, берәмлектән теләгән кадәр аз аерыла, шуңа күрә P_1 һәм P_2 күппочмакларының мәйданнары $\frac{lR}{2}$ дән теләгән кадәр аз аерылалар. Билгеләмә буенча бу түгәрәкнең мәйданы

$$S = \frac{lR}{2} = \pi R^2$$

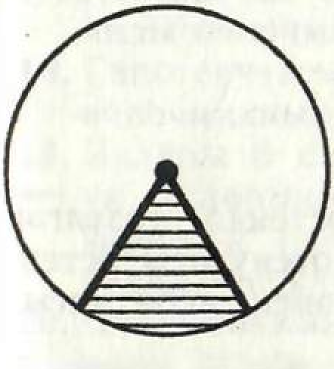
ка тигез дигән сүз, шуны исбат итәргә кирәк иде дә.

Түгәрәкнең тиңдәшле үзәк почмак эчендә яткан өлеше *түгәрәк секторы* дип атала (306 нчы рәсем).

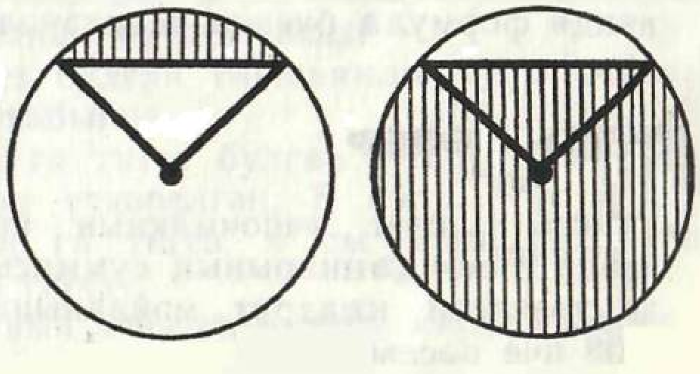
Түгәрәк секторының мәйданы

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha$$

формуласы буенча исәпләнә, биредә R — түгәрәкнең радиусы, α — тиңдәшле үзәк почмакның градуслы үлчәме.



306 нчы рәсем



307 нче рәсем

Түгәрәк белән ярымъяссылыкның уртак кисәге *түгәрәк сегменты* дип атала (307 нче рәсем).

Ярымтүгәрәккә тигез булмаган сегментның мәйданы

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha \pm S_\Delta$$

формуласы буенча исәпләнә, биредә α — бу түгәрәк сегментының дугасын үз эченә алган үзәк почмакның градуслы үлчәме, S_Δ — түбәләре түгәрәк үзәгендә һәм тиңдәшле секторны чикләүче радиус очларында булган өчпочмак мәйданы. $\alpha < 180°$ очрагында «—» тамгасын, $\alpha > 180°$ очрагында «+» тамгасын алырга кирәк.

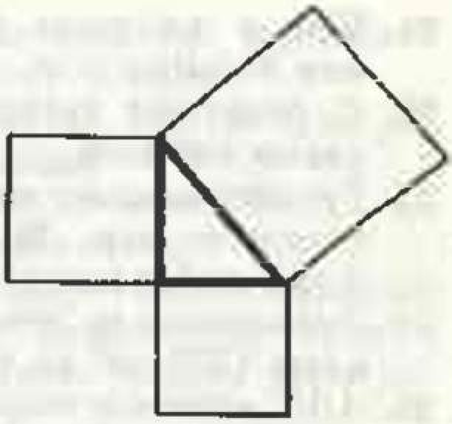
КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Гади фигуралар өчен мәйдан үзлекләрен әйтеп бирегез.
2. Турыпочмаклыкның мәйданы якларының тапкырчыгышына тигез икәнен исбатлагыз.
3. Параллелограммның мәйданы бер ягы белән шул якка үткәрелгән биеклеге тапкырчыгышына тигез икәнен исбатлагыз.
4. Өчпочмакның мәйданы ягы белән шул якка төшерелгән биеклеге тапкырчыгышының яртысына тигез икәнен исбатлагыз.
5. Өчпочмакның мәйданы теләсә кайсы ике ягы белән шул яклар арасындагы почмак синусы тапкырчыгышының яртысына тигез икәнен исбатлагыз.
6. Трапециянең мәйданы нигезләренең ярымсуммасы белән биеклеге тапкырчыгышына тигез икәнен исбатлагыз.
7. Охшаш фигураларның мәйданнары чагыштырмасы нәрсәгә тигез?
8. Түгәрәк мәйданы өчен формула чыгарыгыз.
9. Түгәрәк секторы һәм түгәрәк сегментының мәйданнары нинди формула буенча исәпләнәләр?

МӘСЬӘЛӘЛӘР

1. Турыпочмаклы өчпочмакның катетлары өстендә төзелгән квадрат мәйданнарының суммасы аның гипотенузасы өстендә төзелгән квадрат мәйданына тигез икәнен исбатлагыз (308 нче рәсем).
2. Квадрат формасындагы ике җир участогының яклары 100 м һәм 150 м. Аларга тигез зурлыкта булган квадрат формасындагы участокның ягын табыгыз.

3. Квадрат мәйданы S ны аның диагонале a аша күрсәтегез.
4. Түгәрәкне камаучы квадратның мәйданы шул ук түгәрәккә камаулы квадрат мәйданыннан ничә тапкыр зуррак?
5. Квадратның һәр ягын 3 тапкыр зурайтканда, аның мәйданы ничек үзгәрер?
6. Квадратның мәйданы 25 тапкыр кечерәйсен өчен, аның ягын ничә тапкырга кечерәйтергә кирәк?



308 нче рәсем

7. Турыпочмаклыкның яклары 4 : 9 чагыштырмасында, мәйданы 144 $м^2$ га тигез булса, аның якларын табыгыз.
8. Турыпочмаклыкның периметры 74 дм, мәйданы 3 $м^2$ булса, аның якларын табыгыз.
9. Параллелограмм белән турыпочмаклыкның яклары тигез. Параллелограммның мәйданы турыпочмаклык мәйданының яртысына тигез булса, параллелограммның кысынкы почмагын табыгыз.
10. Квадрат белән ромбның периметрлары тигез. Аларның кайсысының мәйданы зуррак. Җавапны аңлатып бирегез.
11. Ромбның биеклеге 10 см, кысынкы почмагы 30°. Ромбның мәйданын табыгыз.
12. Ромбның биеклеге 12 см, ә кечерәк диагонале 13 см булса, аның мәйданын табыгыз.
13. Ромбның мәйданы диагональләре тапкырчыгышының яртысына тигез икәнен исбатлагыз.
14. Ромбның диагональләре 1 : 2 гә чагыштырмасында, ә мәйданы 12 $см^2$ га тигез. Ромбның якларын табыгыз.
15. Бирелгән өчпочмакны бер түбәдән чыгучы турылар белән тигез зурлыктагы өч өчпочмакка бүлегез.
16*. Үткән мәсьәләне өчпочмак урынына параллелограмм алып чишегез.
17. Нигезе 120 м га, ә ян ягы 100 м га тигез булган тигезьянлы өчпочмакның мәйданы нәрсәгә тигез?
18. Гипотенузасы a га тигез булган тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмакның мәйданын табыгыз.
19. Яклары 8 см һәм 4 см га тигез булган өчпочмакның шул ук якларына биеклекләр үткәрелгән. 8 см лы ягына үткәрелгән биеклеге 3 см га тигез. 4 см лы ягына үткәрелгән биеклеге күпмегә тигез?
20. Өчпочмакның яклары аның биеклекләренә кире пропорциональ, ягъни,

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$$

икәнен исбатлагыз.

21. Ягы a га тигез булган тигезьяклы өчпочмакның мәйданын табыгыз.

22. R радиуслы түгәрәккә камалган төзек өчпочмакның мәйданын табыгыз.

23. Турыпочмаклы өчпочмакның гипотенузасына төшерелгән биеклеге аны 32 см һәм 18 см лы кисемтәләргә бүлә. Аның мәйданын табыгыз.

24. Турыпочмаклы өчпочмакның гипотенузасы 73 см га, ә мәйданы 1320 $см^2$ га тигез. Аның катетларын табыгыз.

25. ABC өчпочмагында $AC = a$, $BC = b$. C почмагының нинди кыйммәте өчен өчпочмакның мәйданы иң зур булыр?

26. Тигезьянлы өчпочмакның ян яклары 1 м га, ә алар арасындагы почмагы 70° ка тигез. Өчпочмакның мәйданын табыгыз.

27. Параллелограммның яклары 2 м һәм 3 м га, ә почмакларының берсе 70° ка тигез. Параллелограммның мәйданын табыгыз.

28*. Ягы a һәм шул як янындагы почмаклары α һәм β буенча өчпочмакның мәйданын табыгыз.

29. Өчпочмакның мәйданы өчен $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ Герон формуласын чыгарыгыз, биредә a, b, c — өчпочмак якларының озынлыклары, ә p — ярымпериметр.

30. Өч ягы буенча өчпочмакның мәйданын табыгыз:
1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80; 4) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 5) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$; 6) $2\frac{1}{12}$; $3\frac{44}{75}$, 1,83.

31. Өчпочмакның яклары a, b, c. Өчпочмакның c ягына төшерелгән биеклеген табыгыз.

32. Өчпочмакның ян яклары 30 см һәм 25 см. Өчпочмакның 1) 25 см; 2)* 11 см га тигез булган нигезенә төшерелгән биеклеген табыгыз.

33. Тигезьянлы өчпочмакның периметры 64 см, ә ян ягы нигезеннән 11 см га озынрак. Өчпочмакның ян ягына төшерелгән биеклеген табыгыз.

34. Яклары 13 см, 14 см, 15 см булган өчпочмакның биекләрен табыгыз.

35. Яклары $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83 булган өчпочмакның $2\frac{1}{12}$ озынлыктагы ягына төшерелгән биеклеген табыгыз.

36. Өчпочмак якларының түбәндә бирелгән кыйммәтләре буенча иң кечкенә биеклеген табыгыз: 1) 5, 5, 6; 2) 17, 65, 80; иң зур биеклеген табыгыз: 3) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 4) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$.

37. Параллель яклары 60 см һәм 20 см га, ә параллель бул-

маган яклары 13 см һәм 37 см га тигез булган трапециянең мәйданы нәрсәгә тигез?

38. Тигезьянлы трапециянең нигезләре 10 см һәм 24 см, ян ягы 25 см. Трапециянең мәйданын табыгыз.

39. Тигезьянлы трапециянең зуррак нигезе 44 м, ян ягы 17 м, диагонале 39 м. Трапециянең мәйданын табыгыз.

40. Дүртпочмакның диагональләре кисешәләр. Дүртпочмакның мәйданы диагональләре белән алар арасындагы почмак синусы тапкырчыгышының яртысына тигез икәнен исбатлагыз.

41*. Бирелгән диагональгә ия булган барлык параллелограммнар арасында ромбның мәйданы иң зуры икәнен исбатлагыз.

42. Өчпочмакны камаучы һәм аңа камаулы әйләнәләрнең радиуслары R һәм r өчен түбәндәге формулаларны чыгарыгыз:

$$R=\frac{abc}{4S}, \quad r=\frac{2S}{a+b+c},$$

биредә a, b, c — өчпочмакның яклары, S — аның мәйданы.

43. Яклары 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7 гә тигез булган өчпочмак өчен камаучы һәм камаулы әйләнәләрнең радиуслары R һәм r ны табыгыз.

44. Тигезьянлы өчпочмакның ян ягы 6 см га, биеклеге 4 см га тигез. Камаучы әйләнәнең радиусын табыгыз.

45. Нигезе a, ян ягы b булган тигезьянлы өчпочмакны камаучы һәм аңа камаулы әйләнәләрнең радиусларын табыгыз.

46. Нигезе 10 см, ян ягы 13 см булган тигезьянлы өчпочмакка камаулы һәм аны камаучы әйләнәләрнең радиуслары r һәм R ны табыгыз.

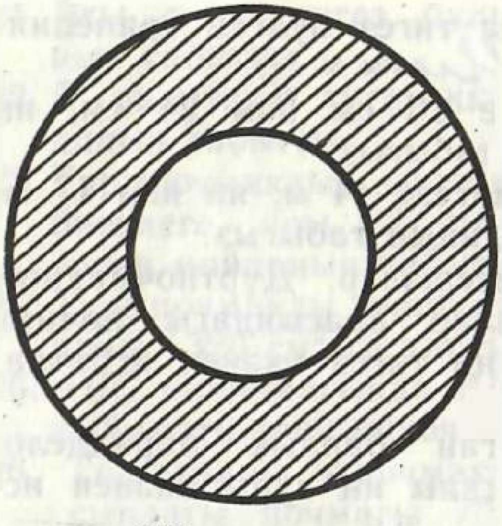
47. Турыпочмаклы өчпочмакта камаулы әйләнәнең радиусы аның катетлары суммасы белән гипотенузасы аермасының яртысына тигез икәнен исбатлагыз.

48. Турыпочмаклы өчпочмакның катетлары 40 см һәм 42 см га тигез. Камаучы һәм камаулы әйләнәләрнең радиусларын табыгыз.

49. Әйләнәне камаучы күппочмакның мәйданы күппочмакның периметры белән әйләнә радиусы тапкырчыгышының яртысына тигез икәнен исбатлагыз.

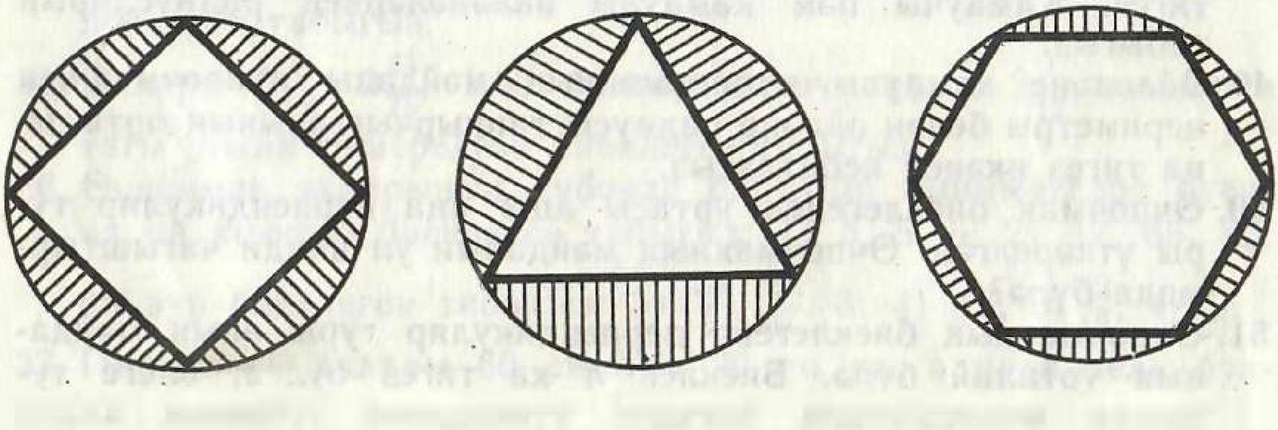
50. Өчпочмак биеклегенең уртасы аша аңа перпендикуляр туры үткәрелгән. Өчпочмакның мәйданын ул нинди чагыштырмада бүлә?

51. Өчпочмакның биеклегенә перпендикуляр туры аның мәйданын урталай бүлә. Биеклек h ка тигез булса, әлеге турыдан өчпочмакның биеклек үткәрелгән түбәсенә кадәр ераклыкны табыгыз.



309 нчы рәсем

52. Төзек n-почмакларның периметрлары чагыштырмасы $a : b$. Аларның мәйданнары чагыштырмасы нәрсәгә тигез?
53. Әйләнә озынлыгы l га тигез булса, түгәрәкнең мәйданын табыгыз.
54. Үзәкләре бер үк һәм радиуслары 1) 4 см һәм 6 см; 2) 5,5 м һәм 6,5 м; 3) a һәм $b (a > b)$ булган ике әйләнә арасындагы түгәрәк боҗрасының мәйданын табыгыз (309 нчы рәсем).
55. Түгәрәкнең диаметрын: 1) 2 тапкыр; 2) 5 тапкыр; 3) m тапкыр зурайтканда, аның мәйданы ничә тапкыр зураер?
56. Түгәрәк мәйданының аңа камаулы: 1) квадрат; 2) төзек өчпочмак; 3) төзек алтыпочмак мәйданына чагыштырмасын табыгыз.
57. Төзек өчпочмакка камаулы түгәрәк мәйданының аны камаучы түгәрәк мәйданына чагыштырмасын табыгыз.
58. Квадратны камаучы түгәрәк мәйданының аңа камаулы түгәрәк мәйданына чагыштырмасын табыгыз.
59. R радиуслы түгәрәк секторына тиңдәшле үзәк почмак: 1) 40°; 2) 90°; 3) 150°; 4) 240°; 5) 300°; 6) 330° ка тигез булса, секторның мәйданын табыгыз.
60. R радиуслы әйләнә бирелгән. 1) R; 2) l озынлыктагы дугага тиңдәшле сектор мәйданын табыгыз.
61*. Нигезе $a\sqrt{3}$ кә һәм биеклеге $\frac{a}{2}$ гә тигез булган түгәрәк сегментының мәйданын табыгыз.
62. Түгәрәкнең шул түгәрәккә камаулы: 1) квадратның; 2) төзек өчпочмакның; 3) төзек алтыпочмакның тышында калган кисәгенең мәйданын табыгыз. Түгәрәкнең радиусы R (310 нчы рәсем).



310 нчы рәсем

10 нчы сыйныф

СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 15. СТЕРЕОМЕТРИЯ АКСИОМАЛАРЫ ҺӘМ АЛАРНЫҢ ИҢ ГАДИ НӘТИҖӘЛӘРЕ

130. СТЕРЕОМЕТРИЯ АКСИОМАЛАРЫ

Стереометрия — пространстводагы фигураларны өйрәнә торган геометриянең бүлеге ул. Стереометриядә, планиметриядәге кебек үк, геометрик фигураларның үзлекләре тиңдәшле теоремаларны исбатлау юлы белән ачыкланалар. Бу вакытта төп геометрик фигураларның аксиома рәвешендә әйтелгән үзлекләре әлеге исбатлаулар өчен нигез итеп алына. Пространствода нокта, туры һәм яссылык төп фигуралар булып торалар.

Яссылыкны без шома тигез өстәл өслеге рәвешендә күз алдына китерәбез (311 нче рәсем, *а*), шуңа күрә без аны параллелограмм рәвешендә сурәтләрбез дә (311 нче рәсем, *б*). Яссылык туры кебек үк чиксез. Рәсемдә без яссылыкның бер кисәген генә сурәтлибез, әмма барлык якларга да чикләнмәгән рәвештә дәвам иткән дип күз алдына китерәбез. Яссылыклар грек хәрефләре α, β, γ, ... белән тамгалана.

311 нче рәсем

Яңа геометрик күренеш — яссылыкны кертү аксиомалар системасын киңәйтергә мәҗбүр итә. Шуңа күрә *C* аксиомалар группасын кертәбез, алар пространстводагы яссылыкларның төп үзлекләрен белдерәләр. Бу группа түбәндәге өч аксиомадан гыйбарәт:

C_1. *Яссылык нинди генә булмасын, шул яссылыкныкы булган нокталар да, аныкы булмаган нокталар да бар.*

C_2. *Әгәр төрле ике яссылыкның уртак ноктасы булса, алар шул нокта аша үтүче туры буйлап кисешәләр.*

Төрле α һәм β яссылыкларының уртак нокталары булса, әлеге аксиома белән бу яссылыкларның һәр икесендә дә яткан *c* турысының барлыгы раслана. Шуның белән бергә *C* ноктасы ике яссылыкта да ятса, ул *c* турысында да ята.

C_3. *Әгәр төрле ике турының уртак ноктасы булса, алар аша яссылык үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә.*

Бу — әгәр төрле ике туры: *a* һәм *b* ның уртак ноктасы *C* булса, ул вакытта *a* һәм *b* турыларын эченә алган γ яссылыгы бар дигән сүз. Мондый үзлеккә ия булган яссылык бердәнбер.

Шулай итеп, стереометрия аксиомалары системасы планиметриянең I — IX аксиомаларыннан һәм *C* группасы аксиомаларыннан тора.

Искәрмә. Планиметриядә без бер яссылык белән эш иттек һәм анда без карый торган барлык фигуралар да урнаша иде. Стереометриядә яссылыклар күп, хәтта чиксез күп. Шуңа күрә планиметриядәге кайбер аксиомаларның әйтелешләре, стереометрия аксиомалары буларак, берникадәр төгәллек кертүне таләп итәләр. Бу IV, VII, VIII һәм IX аксиомаларга карый. Төгәллек кертелгән шушы аксиомаларны бирәбез.

IV. *Яссылыкныкы булган* туры бу яссылыкны ике ярымъяссылыкка бүлә.

VII. Ярымтурыны *эченә алган яссылыкта* шул ярымтурыдан башлап градусларда үлчәнгән билгеле бер зурлыктагы (180° тан кечерәк) бер почмак салырга мөмкин һәм бары тик берне генә.

VIII. Өчпочмак нинди генә булмасын, *бирелгән яссылыкта* шул өчпочмакка тигез булган һәм әлеге яссылыктагы ярымтурыга карата бирелгәнчә урнашкан өчпочмак бар.

IX. *Яссылыктагы* турыда ятмаган нокта аша шул турыга параллель итеп бердән дә күп булмаган туры үткәрергә мөмкин.

Аңлатуны җиңеләйтү өчен, планиметриянең I аксиомасын искә төшереп китик.

I. Туры нинди генә булса да, шул турыныкы булган нокталар да һәм аныкы булмаган нокталар да бар. Теләсә нинди ике нокта аша туры үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә.

131. БИРЕЛГӘН ТУРЫ ҺӘМ БИРЕЛГӘН НОКТА АША ҮТҮЧЕ ЯССЫЛЫКНЫҢ БУЛУЫ

Теорема 15.1. ***Туры һәм бу турыда ятмаган нокта аша яссылык үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә.***

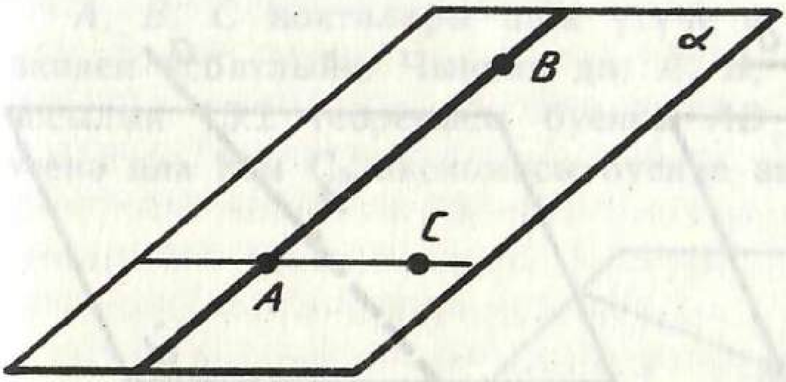
Исбатлау. AB — бирелгән туры, C — бу турыда ятмаган нокта булсын (312 нче рәсем). A һәм C нокталары аша туры үткәрәбез (I аксиомасы). AB һәм AC — төрле турылар, чөнки C ноктасы AB турысында ятмый. AB һәм AC турылары аша яссылык үткәрәбез (C_3 аксиомасы). Ул AB турысы һәм C ноктасы аша үтә.

AB турысы һәм C ноктасы аша үтүче яссылыкның (α) бердәнбер икәнен исбатлыйк.

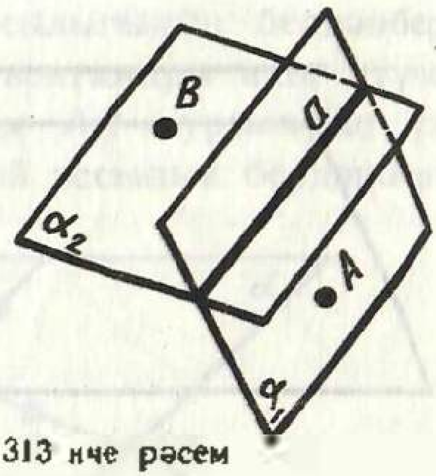
AB турысы һәм C ноктасы аша үтә торган икенче бер α' яссылыгы бар дип фараз итик. C_2 аксиомасы буенча α һәм α' яссылыклары туры буйлап кисешәләр. Бу туры A, B, C нокталарын эченә алырга тиеш. Ләкин алар бер турыда ятмыйлар. Без каршылыкка очрадык. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (7). Туры аша төрле ике яссылык үткәрергә мөмкин икәнен исбатлагыз.

Чишү. a — бирелгән туры булсын (313 нче рәсем). I аксиомасы буенча a турысында ятмаган A ноктасы бар. 15.1 теоремасы буенча a турысы һәм A ноктасы аша



312 нче рәсем



313 нче рәсем

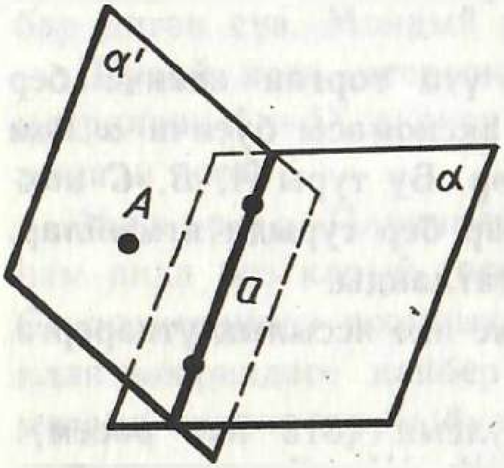
яссылык үткәрергә мөмкин, аны α_1 дип тамгалыйк. C_1 аксиомасы буенча α_1 яссылыгында ятмаган B ноктасы бар. a турысы һәм B ноктасы аша α_2 яссылыгы үткәрик. α_1 һәм α_2 яссылыклары төрле, чөнки α_2 яссылыгындагы B ноктасы α_1 яссылыгында ятмый.

132. ТУРЫНЫҢ ЯССЫЛЫК БЕЛӘН КИСЕШҮЕ

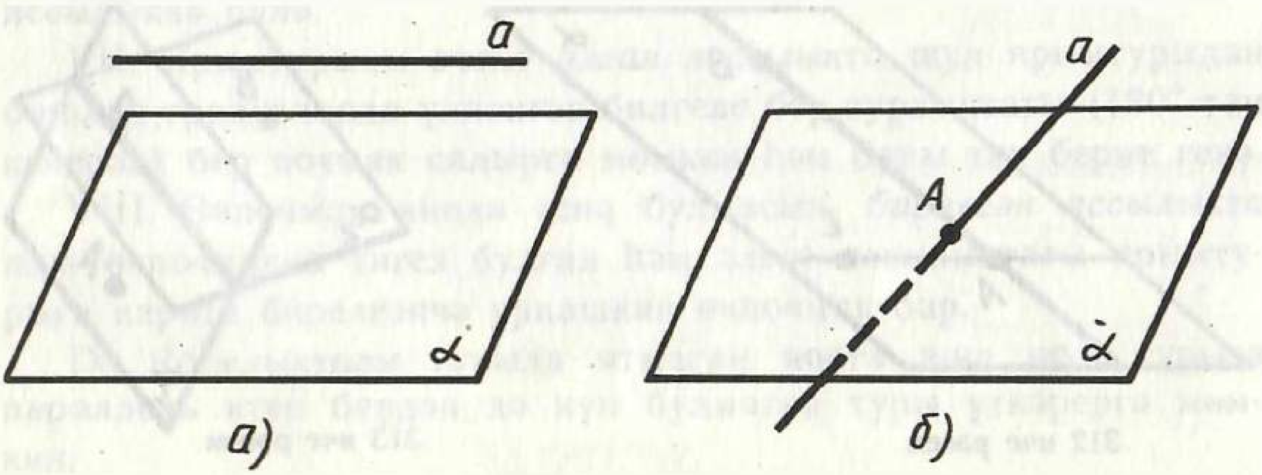
Теорема 15.2. ***Әгәр турының ике ноктасы яссылыкта ятса, туры тулысынча шул яссылыкта ята.***

Исбатлау. a — бирелгән туры, α — бирелгән яссылык булсын (314 нче рәсем). I аксиомасы буенча a турысында ятмаган A ноктасы бар, a турысы һәм A ноктасы аша α' яссылыгы үткәрик. Әгәр α' яссылыгы α белән тәңгәл килсә, α яссылыгы a турысын үз эченә ала, теорема да шуны раслый. Әгәр дә α һәм α' — төрле яссылыклар булса, алар a турысының ике ноктасын үз эченә алган a' турысы буйлап кисешәләр. I аксиомасы буенча a' турысы a белән тәңгәл килә һәм, шулай булгач, a турысы α яссылыгында ята. Теорема исбатланды.

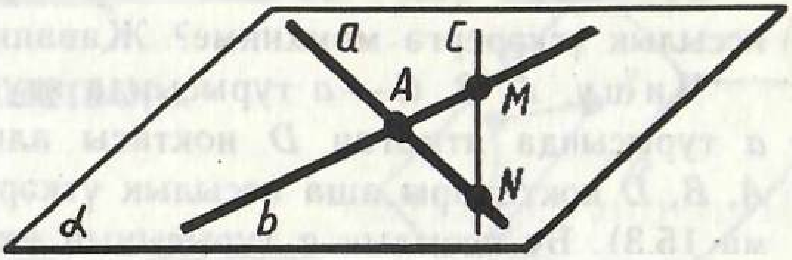
15.2 теоремасыннан ***яссылык һәм аның өстендә ятмаган туры я кисешмиләр, я бер ноктада кисешәләр дигән нәтиҗә чыга*** (315 нче рәсем).



314 нче рәсем



315 нче рәсем



316 нчы рәсем

Мәсьәлә (9). A ноктасында кисешүче төрле ике туры бирелгән. Бирелгән турыларны кисүче һәм A ноктасы аша үтмәүче барлык турыларның бер яссылыкта ятканын исбатлагыз.

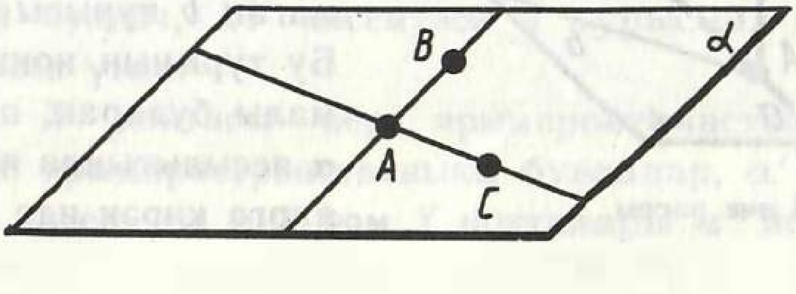
Чишү. Бирелгән a һәм b турылары аша α яссылыгы үткәрәбез (316 нчы рәсем). C_3 аксиомасы буенча бу мөмкин. Бирелгән турыларны кисүче c турысының α яссылыгы белән ике уртак ноктасы: M һәм N бар (бирелгән турылар белән кисешү нокталары). 15.2 теоремасы буенча ул туры α яссылыгында ятарга тиеш.

133. БИРЕЛГӘН ӨЧ НОКТА АША ҮТҮЧЕ ЯССЫЛЫКНЫҢ БУЛУЫ

Теорема 15.3. ***Бер турыда ятмаган өч нокта аша яссылык үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә.***

Исбатлау. A, B, C — бер турыда ятмаган өч нокта булсын (317 нче рәсем). AB һәм AC турылары үткәрәбез; алар төрле турылар, чөнки A, B, C нокталары бер турыда ятмыйлар. C_3 аксиомасы буенча AB һәм AC турылары аша α яссылыгы үткәрергә мөмкин. Бу яссылык A, B, C нокталарын үз эченә ала.

A, B, C нокталары аша үтүче α яссылыгының бердәнбер икәнен исбатлыйк. Чыннан да, A, B, C нокталары аша үтүче яссылык 15.2 теоремасы буенча AB һәм AC турыларын үз эченә ала һәм C_3 аксиомасы буенча андый яссылык бердәнбер.



317 нче рәсем

Мәсьәлә (13). Өч нокта бер турыда ятса, алар аша яссылык үткәрергә мөмкинме? Җавапны аңлатып бирегез.

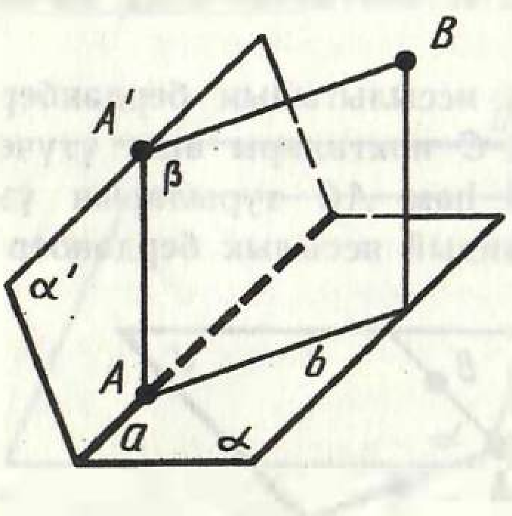
Чишү. A, B, C — a турысында ятучы өч нокта булсын. a турысында ятмаган D ноктасы алыйк (I аксиомасы). A, B, D нокталары аша яссылык үткәрергә мөмкин (теорема 15.3). Бу яссылык a турысының ике ноктасын — A һәм B нокталарын, димәк, бу турының C ноктасын да эченә ала (теорема 15.2). Шулай булгач, бер турыда яткан өч нокта аша һәрвакыт яссылык үткәрергә мөмкин.

134. I АКСИОМАГА ИСКӘРМӘ

I аксиома стереометрия аксиомалары исемлегендә планиметриядәге мәгънәсе белән чагыштырганда яңа мәгънәгә ия була. Планиметриядә әлеге аксиома туры яткан *яссылыкта* бу турыда ятмаган нокталар барлыгын раслый. Нәкъ шушы мәгънәдә геометрияне яссылыкта төзегәндә без бу аксиоманы кулландык та. Хәзер бу аксиома, гомумән, бирелгән турыда ятмаган нокталар барлыгын раслый. Әлеге аксиомадан туры яткан яссылыкта бу турыда ятмаган нокталарның барлыгы турыдан-туры килеп чыкмый әле. Ул махсус исбатлауны таләп итә. Шул исбатлауны бирик.

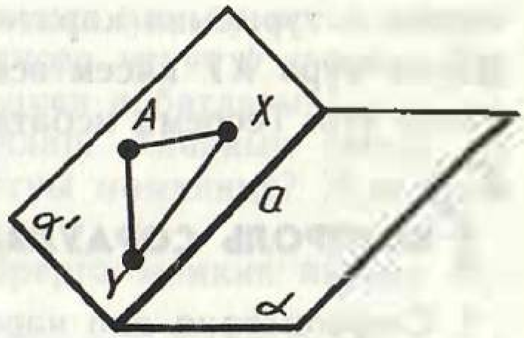
α — яссылык, a — шул яссылыкта яткан туры булсын (318 нче рәсем). α яссылыгында a турысында ятмаган нокталар барлыгын исбатлыйк.

a турысында A ноктасы һәм α яссылыгыннан читтә A' ноктасы билгелибез. a турысы һәм A' ноктасы аша α' яссылыгы үткәрәбез. α' яссылыгыннан читтә B ноктасы алып, AA' турысы һәм B ноктасы аша β яссылыгы үткәрәбез. α һәм β яссылыклары A ноктасы аша үтүче һәм a турысыныкы булмаган b турысы буйлап кисешәләр. Бу турының нокталары, A дан аермалы буларак, a турысыннан читтә α яссылыгында яталар, шуны исбатларга кирәк иде дә.



318 нче рәсем

135. ПРОСТРАНСТВОНЫҢ ЯССЫЛЫК БЕЛӘН ИКЕ ЯРЫМПРОСТРАНСТВОГА БҮЛЕНҮЕ



319 нчы рәсем

Теорема 15.4. ***Яссылык пространствоны ике ярымпространствога бүлә. Әгәр X һәм Y нокталары бер ярымпространствоныкы булсалар, XY кисемтәсе яссылыкны кисеп үтми. Әгәр X һәм Y нокталары төрле ярымпространствоныкы булсалар, XY кисемтәсе яссылыкны кисеп үтә.***

Исбатлау (хәтердә калдыру өчен түгел). α — бирелгән яссылык булсын. α яссылыгында ятмаган A ноктасы билгелибез. C_1 аксиомасы буенча андый нокта бар. Пространствоның α яссылыгында ятмаган барлык нокталарын түбәндәге юл белән ике ярымпространствога бүләбез. X ноктасын — әгәр AX кисемтәсе α яссылыгын кисеп үтмәсә, беренче ярымпространствоныкы дип, AX кисемтәсе α яссылыгын кисеп үтсә, икенче ярымпространствоныкы дип исәпләрбез. Пространствоның болай бүленеше теоремада күрсәтелгән үзлекләргә ия.

X һәм Y нокталары беренче ярымпространствоныкы булсын. A, X һәм Y нокталары аша α' яссылыгы үткәрәбез. Әгәр α' яссылыгы α яссылыгын кисеп үтмәсә, XY кисемтәсе дә бу яссылыкны кисеп үтми. α' яссылыгы α яссылыгын кисеп үтә дип уйлыйк (319 нчы рәсем). Яссылыклар төрле булганлыктан, алар ниндидер a турысы буйлап кисешерләр. a турысы α' яссылыгын ике ярымъяссылыкка бүлә. X һәм Y нокталары A ноктасы яткан бер үк ярымъяссылыкныкы булырлар. Шуңа күрә XY кисемтәсе a турысын, димәк, α яссылыгын да кисеп үтми.

Әгәр X һәм Y нокталары икенче ярымпространствоныкы булсалар, α' яссылыгы һичшиксез α яссылыгын кисеп үтә, чөнки AX кисемтәсе α яссылыгын кисеп үтә. X һәм Y нокталары a турысы белән бүленгән α' яссылыгының бер ярымъяссылыгында ята. Шулай булгач, XY кисемтәсе a турысын, димәк, α яссылыгын да кисеп үтми.

Ниһаять, әгәр X ноктасы бер ярымпространствоныкы, ә Y ноктасы икенче ярымпространствоныкы булсалар, α' яссылыгы α яссылыгын кисеп үтә, ә X һәм Y нокталары α' яссылы-

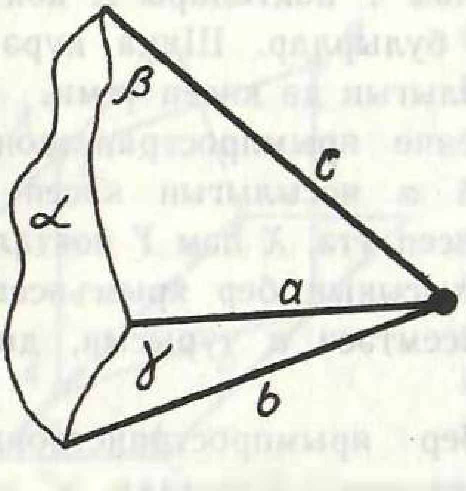
гының a турысына карата төрле ярымъяссылыкларында яталар. Шуңа күрә XY кисемтәсе a турысын, димәк, α яссылыгын да кисеп үтә. Теорема исбатланды.

КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

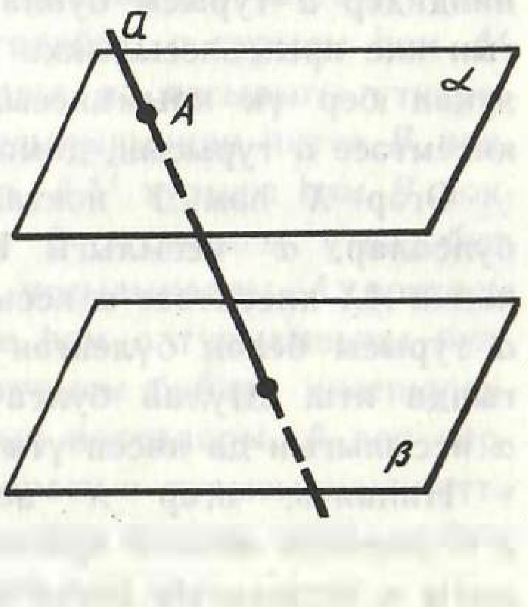
1. Стереометрия дип нәрсәгә әйтәбез?
2. С группасы аксиомаларын әйтеп бирегез.
3. Туры һәм турыда ятмаган нокта аша яссылык үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә. Шуны исбатлагыз.
4. Турының ике ноктасы яссылыкта ятса, туры тулысынча шул яссылыкта ята. Шуны исбатлагыз.
5. Бер турыда ятмаган өч нокта аша яссылык үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә. Шуны исбатлагыз.

МӘСЬӘЛӘЛӘР

1. A, B, C һәм D нокталары бер яссылыкта ятмыйлар. AB һәм CD турыларының кисешмәвен исбатлагыз.
2. Бирелгән ике турының кисешү ноктасы аша алар белән бер яссылыкта ятмаган өченче туры үткәрергә мөмкинме? Җавапны аңлатып бирегез.
3. A, B, C нокталары төрле ике яссылыкның һәркайсында да яталар. Бу нокталарның бер туры өстендә ятканлыгын исбатлагыз.
4. Пар-пар кисешүче төрле өч яссылык бирелгән. Бу яссылыкларның кисешү турыларының икесе үзара кисешсә, өченче турының да шул кисешү ноктасы аша үткәнлеген исбатлагыз (320 нче рәсем).



320 нче рәсем



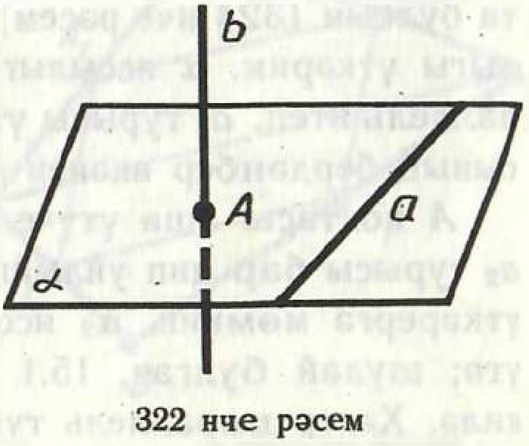
321 нче рәсем

5. a турысы буйлап кисешүче ике яссылык һәм бу яссылыкларның берсендә яткан, ә икенчесен кисеп үтүче b турысы бирелгән. a һәм b турыларының кисешүен исбатлагыз.
6. Дүрт нокта бер яссылыкта ятмыйлар. Аларның нинди дә булса өчесенең бер туры өстендә ятуы мөмкинме? Җавапны аңлатып бирегез.
7. Туры аша төрле ике яссылык үткәрергә мөмкин икәнен исбатлагыз.
8*. Кисешмәүче ике яссылык бирелгән. Бу яссылыкларның берсен кисүче туры икенчесен дә кисеп үткәнлеген исбатлагыз (321 нче рәсем).
9. A ноктасында кисешүче төрле ике туры бирелгән. Бирелгән турыларны кисүче һәм A ноктасы аша үтмәүче барлык турыларның бер яссылыкта ятканын исбатлагыз.
10. Бирелгән турыны кисүче һәм турыдан читтә бирелгән нокта аша үтүче барлык турыларның бер яссылыкта ятканын исбатлагыз.
11. Әгәр AB һәм CD турылары бер яссылыкта ятмасалар, AC һәм BD турыларының да бер яссылыкта ятмаганлыгын исбатлагыз.
12. Бер яссылыкта ятмаган дүрт нокта бирелгән. Бу нокталарның өчесе аша үтүче төрле ничә яссылык үткәреп була? Җавапны аңлатыгыз.
13. Өч нокта бер турыда ятсалар, алар аша яссылык үткәреп буламы? Җавапны аңлатып бирегез.
14*. Дүрт нокта бирелгән. Бу нокталарның теләсә кайсы икесе аша үтүче турының калган ике нокта аша үтүче туры белән кисешмәве билгеле. Бирелгән дүрт ноктаның бер яссылыкта ятмаганын исбатлагыз.

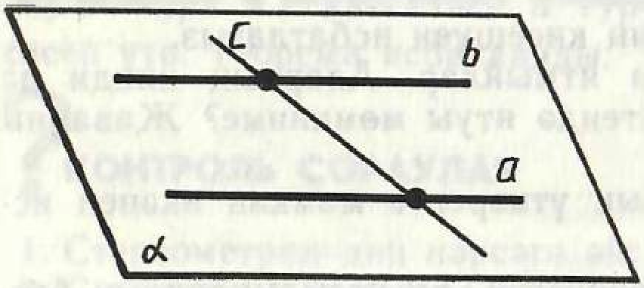
§ 16. ТУРЫ ҺӘМ ЯССЫЛЫКЛАРНЫҢ ПАРАЛЛЕЛЬЛЕГЕ

136. ПРОСТРАНСТВОДА ПАРАЛЛЕЛЬ ТУРЫЛАР

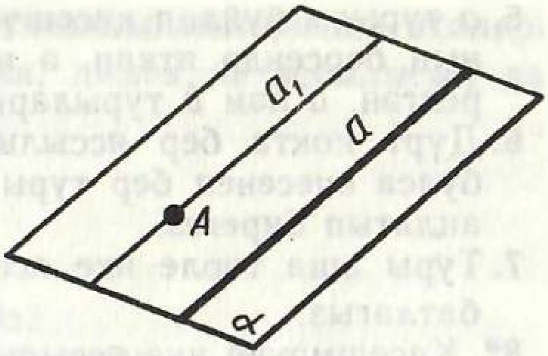
Пространствода ике туры бер яссылыкта ятсалар һәм кисешмәсәләр, алар *параллель турылар* дип атала. Кисешмәгән һәм бер яссылыкта ятмаган турылар *чалышма турылар* дип атала (322 нче рәсем).



322 нче рәсем



323 нче рәсем



324 нче рәсем

Мәсьәлә (3). Бирелгән ике параллель турыны кисүче барлык турыларның бер яссылыкта ятканын исбатлагыз.

Чишү. Бирелгән a һәм b турылары параллель булганлыктан, алар аша яссылык үткәрергә мөмкин (323 нче рәсем). Аны α дип тамгалыйк. Бирелгән параллель турыларны кисүче c турысының α яссылыгы белән ике уртак ноктасы бар — бирелгән турылар белән кисешү нокталары. 15.2 теоремасы буенча бу туры α яссылыгында ята. Шулай итеп, бирелгән ике параллель турыны кисүче барлык турылар бер яссылыкта — α яссылыгында яталар.

Теорема 16.1. ***Бирелгән турыдан читтә алынган ноктадан бу турыга параллель туры үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә.***

Искәрмә. 16.1 теоремасында бердәнберлек турындагы раслау параллельләр аксиомасының гади нәтиҗәсе генә түгел, чөнки бу аксиома белән бирелгән яссылыктагы турыга параллель турының бердәнберлеге раслана. Шуңа күрә аны исбатлау таләп ителә.

Исбатлау. a — бирелгән туры. A — бу турыда ятмаган нокта булсын (324 нче рәсем). a турысы һәм A ноктасы аша α яссылыгы үткәрик. α яссылыгында A ноктасы аша, a турысына параллель итеп, a_1 турысы үткәрик. a турысына параллель a_1 турысының бердәнбер икәнен исбатларбыз.

A ноктасы аша үтүче һәм a турысына параллель икенче бер a_2 турысы бар дип уйлыйк. a һәм a_2 турылары аша α_2 яссылыгы үткәрергә мөмкин. α_2 яссылыгы a турысы һәм A ноктасы аша үтә; шулай булгач, 15.1 теоремасы буенча ул α белән тәңгәл килә. Хәзер параллель турылар аксиомасы буенча a_1 һәм a_2 турылары тәңгәл килә. Теорема исбатланды.

137. ТУРЫЛАРНЫҢ ПАРАЛЛЕЛЬЛЕК БИЛГЕСЕ

Теорема 16.2. ***Өченче турыга параллель булган ике туры үзара да параллель.***

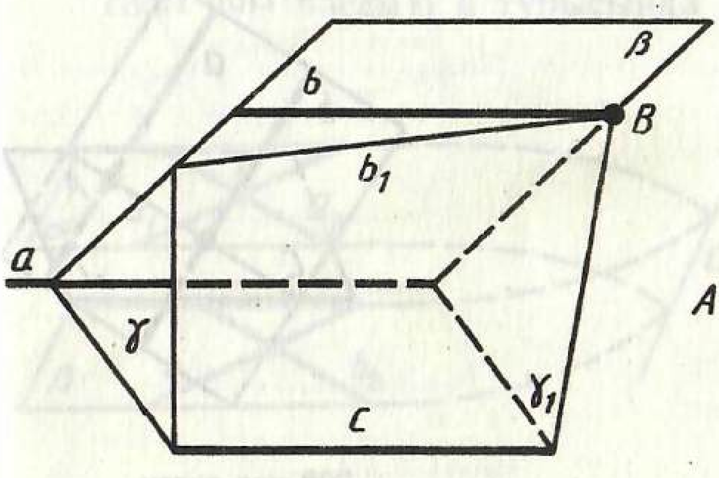
Исбатлау. b һәм c турылары a турысына параллель булсын. b һәм c турыларының параллель икәнен исбатларбыз.

a, b, c турылары бер яссылыкта яткан очрак планиметриядә каралган иде. Шуңа күрә безнең турылар бер яссылыкта ятмый дип уйлыйк. a һәм b турылары яткан яссылык — β, ә a һәм c турылары яткан яссылык γ булсын. β һәм γ — төрле яссылыклар (325 нче рәсем). b турысында нинди дә булса B ноктасы билгелик тә c турысы һәм B ноктасы аша γ_1 яссылыгы үткәрик. Ул β яссылыгынниндидер b_1 турысы буйлап кисеп үтәр.

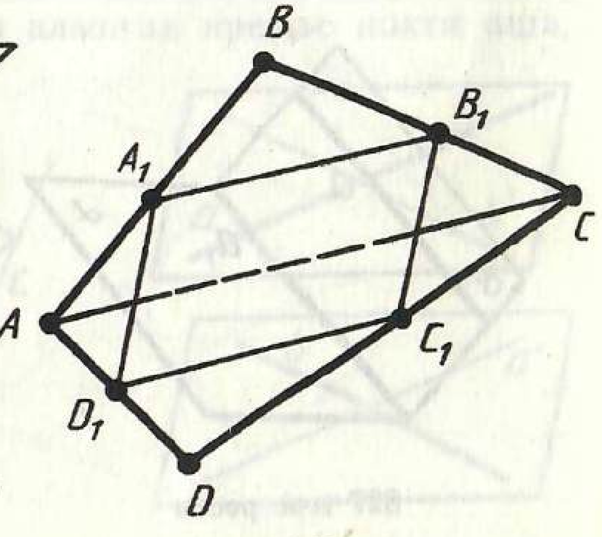
b_1 турысы γ яссылыгын кисми. Чыннан да, кисешү ноктасы a турысында ятарга тиеш, чөнки b_1 турысы β яссылыгында ята. Икенче яктан, ул c турысында да ятарга тиеш, чөнки b_1 турысы γ_1 яссылыгында ята. Ләкин a һәм c турылары параллель турылар буларак кисешмиләр.

b_1 турысы β яссылыгында ята һәм a турысын кисми, шуңа күрә ул a турысына параллель, һәм димәк, параллель турылар аксиомасы буенча b белән тәңгәл килә. Шулай итеп, b турысы b_1 белән тәңгәл килә һәм c турысы белән бер яссылыкта (γ_1 яссылыгында) ята һәм аны кисми. Димәк, b һәм c турылары параллель. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (11). Пространство дүртпочмагының якларының урталары параллелограмм түбәләре булганын исбатлагыз (пространство дүртпочмагының түбәләре бер яссылыкта ятмыйлар).



325 нче рәсем



326 нчы рәсем

Чишү. $ABCD$ — пространство дүртпочмагы булсын (326 нчы рәсем). A_1, B_1, C_1, D_1 — аның якларының урталары булсын. Ул вакытта A_1B_1 — ABC өчпочмагының AC ягына параллель урта сызыгы. C_1D_1 — ACD өчпочмагының AC ягына параллель урта сызыгы. 16.2 теоремасы буенча A_1B_1 һәм C_1D_1 турылары параллель, димәк, бер яссылыкта яталар. A_1D_1 һәм B_1C_1 турыларының параллельлеге нәкъ шулай ук исбатлана. Шулай итеп, $A_1B_1C_1D_1$ дүртпочмагы бер яссылыкта ята һәм аның каршы ятучы яклары параллель. Шулай булгач, ул — параллелограмм.

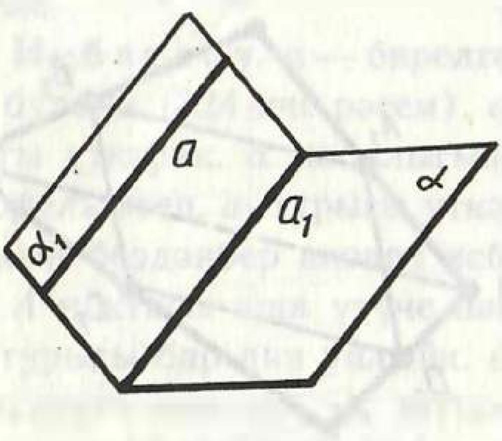
138. ТУРЫ БЕЛӘН ЯССЫЛЫКНЫҢ ПАРАЛЛЕЛЬЛЕК БИЛГЕСЕ

Туры белән яссылык кисешмәсәләр, алар *параллель* дип атала.

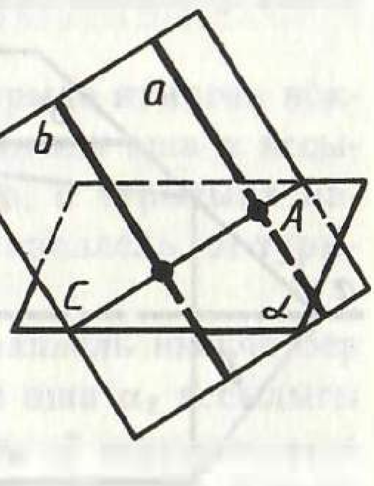
Теорема 16.3. ***Яссылыкта ятмаган туры шул яссылыктагы нинди дә булса турыга параллель булса, ул бу яссылыкка параллель була.***

Исбатлау. α — яссылык, a — ул яссылыкта ятмаган туры, ә a_1 исә α яссылыгында ята һәм a га параллель туры булсын. a һәм a_1 турылары аша α_1 яссылыгы үткәрәбез (327 нче рәсем). α һәм α_1 яссылыклары a_1 турысы буйлап кисешәләр. Әгәр дә a турысы α яссылыгын киссә, кисешү ноктасы a_1 турысында ятар иде. Ләкин бу мөмкин түгел, чөнки a һәм a_1 турылары параллель. Шулай итеп, a турысы α яссылыгын кисми, димәк, ул α яссылыгына параллель. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (15). Әгәр яссылык ике параллель турының берсен кисеп үтсә, икенчесен дә кисеп үткәнен исбатлагыз.



327 нче рәсем



328 нче рәсем

Чишү. a һәм b — параллель турылар, α исә a турысын A ноктасында кисеп үтүче яссылык булсын (328 нче рәсем). a һәм b турылары аша яссылык үткәрик. Ул α яссылыгын ниндидер c турысы буйлап кисеп үтә. c турысы a турысын (A ноктасында) кисеп үтә, димәк, аңа параллель булган b турысын да кисеп үтә. c турысы α яссылыгында ятканлыктан, α яссылыгы b турысын кисә.

139. ЯССЫЛЫКЛАРНЫҢ ПАРАЛЛЕЛЬЛЕК БИЛГЕСЕ

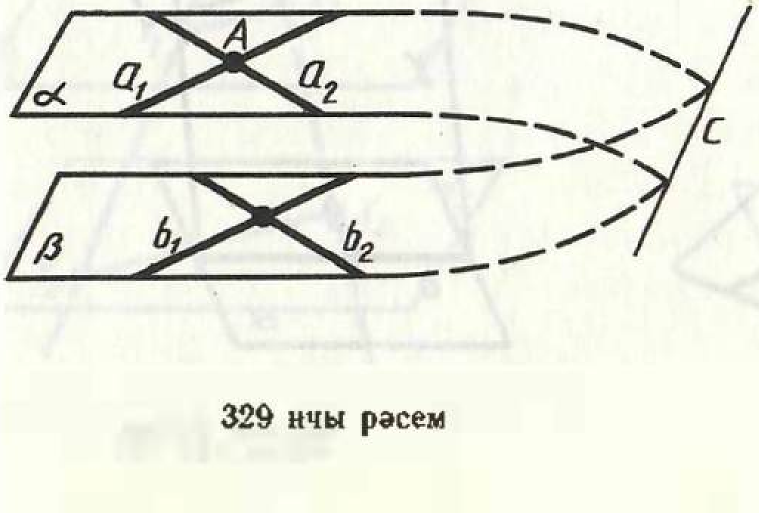
Ике яссылык кисешмәсәләр, алар *параллель* дип аталалар.

Теорема 16.4. ***Әгәр бер яссылыкның кисешүче ике турысы икенче яссылыкның ике турысына тиңдәшле рәвештә параллель булса, бу ике яссылык параллель була.***

Исбатлау. α һәм β — бирелгән яссылыклар, a_1 һәм a_2 турылары — α яссылыгында яткан A ноктасында кисешүче турылар, b_1 һәм b_2 исә β яссылыгында яткан һәм тиңдәшле рәвештә аларга параллель булган турылар булсын (329 нчы рәсем). α һәм β яссылыклары параллель түгел, ягъни ниндидер c турысы буйлап кисешәләр дип уйлыйк. 16.3 теоремасы буенча a_1 һәм a_2 турылары, b_1 һәм b_2 турыларына параллель турылар буларак, β яссылыгына параллель булалар, шуңа күрә алар бу яссылыкта яткан c турысын кисмиләр. Шул рәвешле α яссылыгындагы A ноктасы аша c турысына параллель ике туры (a_1 һәм a_2) үтә. Ләкин параллельләр аксиомасы буенча моның булуы мөмкин түгел. Без каршылыкка очрадык. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (19). Ике чалышма туры аша ике параллель яссылык үткәрергә мөмкин икәнен исбатлагыз.

Чишү. a һәм b — бирелгән чалышма турылар булсын (330 нчы рәсем). a турысында алынган ирекле нокта аша,



329 нчы рәсем

330 нчы рәсем

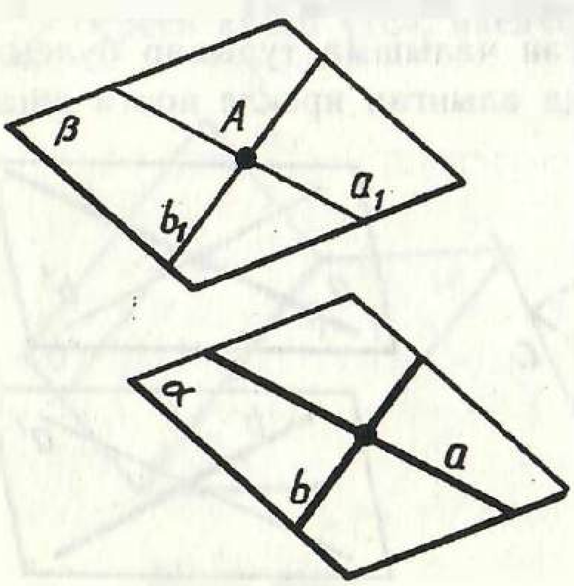
b га параллель итеп, b' турысы, ә b турысында алынган ирекле нокта аша, a га параллель итеп, a' турысы үткәрәбез. Аннары ике яссылык үткәрәбез: берсен a һәм b' турылары аша, икенчесен b һәм a' турылары аша. 16.4 теоремасы буенча бу яссылыклар параллель. Аларның беренчесендә a турысы, икенчесендә b турысы ята.

140. БИРЕЛГӘН ЯССЫЛЫККА ПАРАЛЛЕЛЬ ЯССЫЛЫКНЫҢ БУЛУЫ

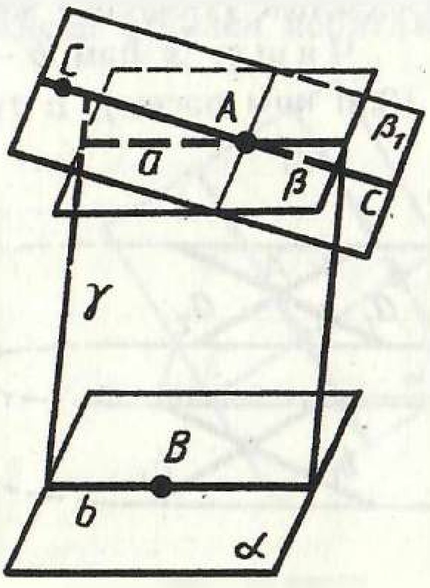
Теорема 16.5. ***Бирелгән яссылыктан читтә яткан нокта аша бирелгән яссылыкка параллель яссылык үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә.***

Исбатлау. Бирелгән α яссылыгында нинди дә булса кисешүче a һәм b турылары үткәрик (331 нче рәсем). Бирелгән A ноктасы аша аларга параллель a_1 һәм b_1 турылары үткәрәбез. a_1 һәм b_1 турылары аша үтүче β яссылыгы 16.4 теоремасы буенча α яссылыгына параллель.

A ноктасы аша α яссылыгына параллель булган тагын икенче бер β_1 яссылыгы үтә дип уйлыйк (332 нче рәсем). β_1 яссылыгында β яссылыгында ятмаган нинди дә булса C ноктасы билгелибез. A, C нокталары һәм α яссылыгының нинди дә булса B ноктасы аша γ яссылыгы үткәрик. Бу яссылык α, β һәм β_1 яссылыкларын b, a һәм c турылары буйлап кисеп үтәр. a һәм c турылары b турысын кисмиләр, чөнки α яссылыгын кисмиләр. Шулай булгач, алар b турысына параллель. Ләкин γ яссы-



331 нче рәсем



332 нче рәсем

лыгында A ноктасы аша b турысына параллель бер генә туры үтәргә мөмкин. Без каршылыкка очрадык. Теорема тулысынча исбатланды.

Мәсьәлә (23). α һәм β яссылыклары γ яссылыгына параллель. α һәм β яссылыкларының кисешүе мөмкинме?

Чишү. α һәм β яссылыкларының кисешүе мөмкин түгел. Әгәр α һәм β яссылыкларының уртак нокталары булса, бу нокта аша γ яссылыгына параллель ике яссылык (α һәм β) үтәр иде. Ә бу 16.5 теоремасына каршы килә.

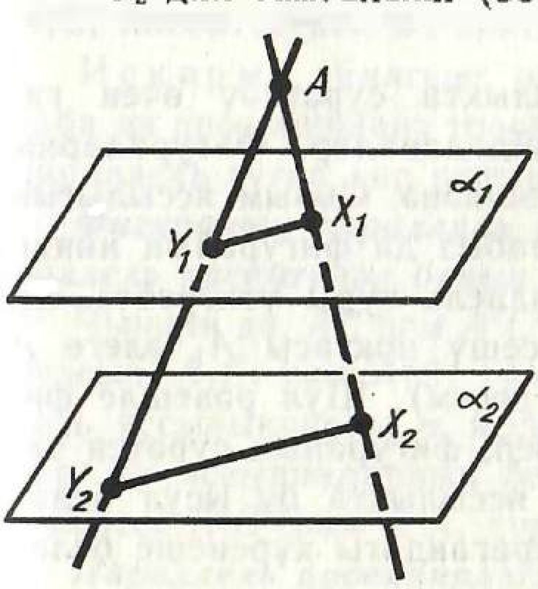
141. ПАРАЛЛЕЛЬ ЯССЫЛЫКЛАРНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ

Әгәр ике параллель яссылык өченче яссылык белән кистерелсә, аларның кисешү турылары параллель була (333 нче рәсем).

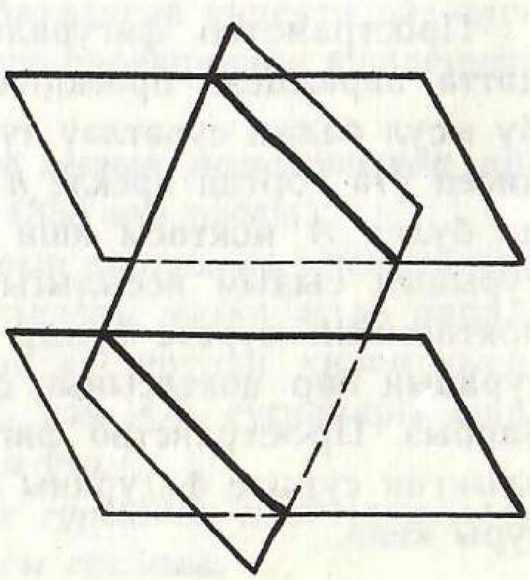
Чыннан да, билгеләмә буенча параллель турылар — бер яссылыкта яткан кисешмәүче турылар. Безнең турылар бер яссылыкта — кисүче яссылыкта яталар. Алар кисешмиләр, чөнки алар яткан параллель яссылыклар да кисешми. Димәк, турылар параллель, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Мәсьәлә (33). Ике параллель яссылык: α_1 һәм α_2 һәм бу яссылыкларның берсендә дә ятмаган A ноктасы бирелгән. A ноктасы аша ирекле туры үткәрелгән. X_1 һәм X_2 — бу турының α_1 һәм α_2 яссылыклары белән кисешү нокталары булсын. Кисемтәләрнең озынлыклары чагыштырмасы $AX_1 : AX_2$ алынган турыга бәйле түгеллеген исбатлагыз.

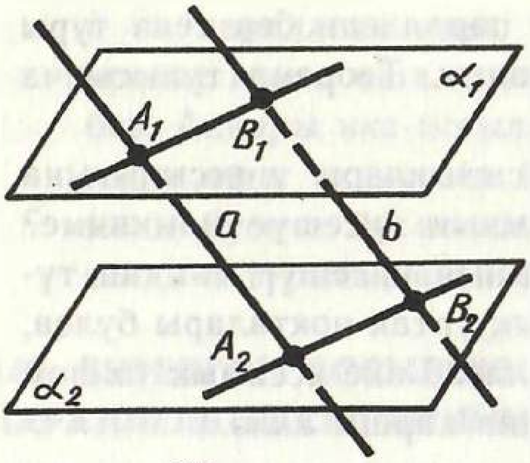
Чишү. A ноктасы аша икенче туры үткәреп, аның α_1 һәм α_2 яссылыклары белән кисешү нокталарын Y_1 һәм Y_2 дип тамгалыйк (334 нче рәсем). AX_1 һәм AY_1 турылары



333 нче рәсем



334 нче рәсем



335 нче рәсем

аша яссылык үткәрик. Ул α_1 һәм α_2 яссылыкларын X_1Y_1 һәм X_2Y_2 параллель турылары буйлап кисеп үтәр. Моннан AX_1Y_1 һәм AX_2Y_2 өчпочмакларының охшашлыгы килеп чыга. Ә өчпочмаклар охшашлыгыннан

$$\frac{AX_1}{AX_2}=\frac{AY_1}{AY_2}$$

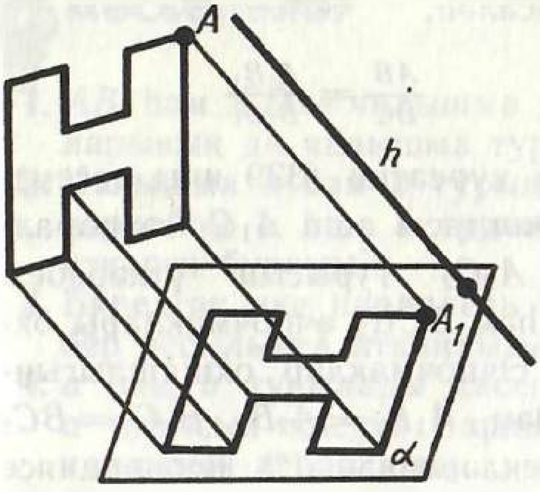
пропорциясе, ягъни $AX_1 : AX_2$ һәм $AY_1 : AY_2$ чагыштырмаларының ике туры өчен дә бертөрле икәнлеге килеп чыга.

Параллель турыларның параллель яссылыклар арасында урнашкан кисемтәләре тигез була.

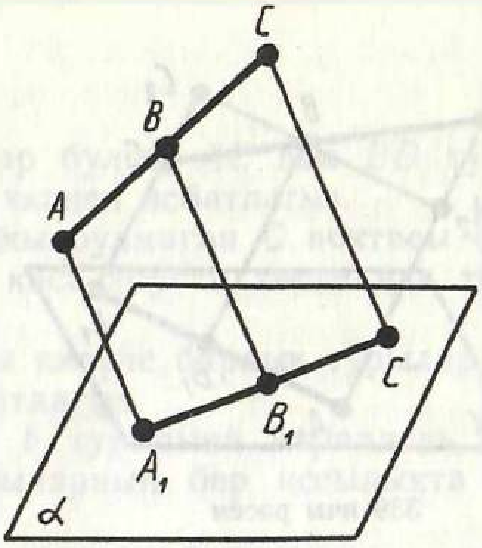
Чыннан да, α_1 һәм α_2 — параллель яссылыклар, a һәм b — аларны кисеп үтүче параллель турылар, A_1, A_2 һәм B_1, B_2 — турыларның яссылык белән кисешү нокталары булсын (335 нче рәсем). a һәм b турылары аша яссылык үткәрик. Ул α_1 һәм α_2 яссылыкларын A_1B_1 һәм A_2B_2 параллель турылары буенча кисеп үтәр. $A_1B_1A_2B_2$ дүртпочмагы — параллелограмм, чөнки аның каршы ятучы яклары параллель. Ә параллелограммның каршы ятучы яклары тигез. Димәк, $A_1A_2 = B_1B_2$, шуны исбатларга кирәк иде дә.

142. ПРОСТРАНСТВО ФИГУРАЛАРЫН ЯССЫЛЫКТА СУРӘТЛӘҮ

Пространство фигураларын яссылыкта сурәтләү өчен гадәттә параллель проекцияләүдән файдаланалар. Фигураларны бу ысул белән сурәтләү түбәндәгечә эшләнә. Сызым яссылыгын кисеп үтә торган ирекле h турысы алабыз да фигураның нинди дә булса A ноктасы аша h ка параллель туры үткәрәбез. Бу турының сызым яссылыгы белән кисешү ноктасы A_1 әлеге A ноктасының сурәте булыр (336 нчы рәсем). Шул рәвешле фигураның һәр ноктасының сурәтен төзеп, фигураның сурәтен табарбыз. Пространство фигурасының яссылыкта бу ысул белән алынган сурәте фигураны ерактан карагандагы күренеше белән туры килә.



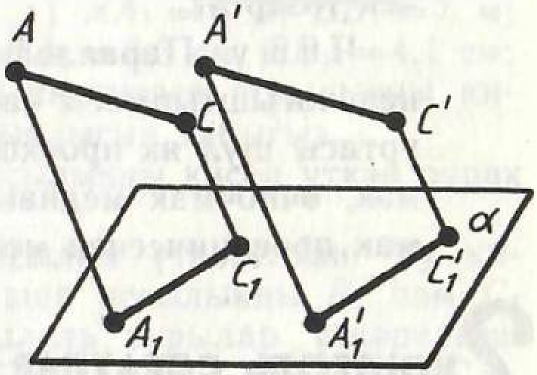
336 нче рәсем



337 нче рәсем

Фигураның яссылыктагы сурәтенең шушы юл белән төзегәндә килеп чыга торган кайбер үзлекләрен билгеләп үтик.

Фигураның турысызыклы кисемтәләре сызым яссылыгында кисемтәләр булып сурәтләнә (337 нче рәсем). Чыннан да, AC кисемтәсенең нокталарын прокцияләүче барлык турылар сызым яссылыгы α' ны A_1C_1 турысы буйлап кисеп үтүче бер яссылыкта яталар. AC кисемтәсенең ирекле рәвештә алынган B ноктасы A_1C_1 кисемтәсенең B_1 ноктасы булып сурәтләнә.



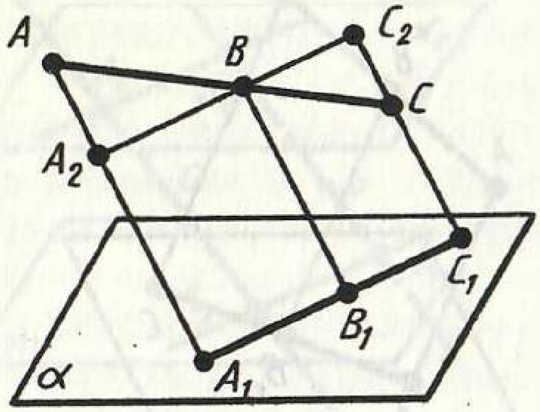
338 нче рәсем

Искәрмә. Билгеле, әле генә исбатланган үзлектә дә, алга таба да проекцияләнә торган кисемтәләр проекцияләү юнәлешенә параллель түгел дип исәпләнә.

Фигураның параллель кисемтәләре сызым яссылыгында параллель кисемтәләр булып сурәтләнә (338 нче рәсем).

Чыннан да, AC һәм $A'C'$ — фигураның параллель кисемтәләре булсын. A_1C_1 һәм $A_1'C_1'$ турылары параллель, чөнки алар параллель яссылыкларны α яссылыгы белән кистерүдән килеп чыгалар. Бу яссылыкларның беренчесе AC һәм AA_1 турылары аша, икенчесе $A'C'$ һәм $A'A_1'$ турылары аша үтә.

Параллель проекцияләгәндә бер үк турыдагы яки параллель турылардагы кисемтәләр чагыштырмасы саклана.



339 нчы рәсем

Мәсәлән,

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1} \quad (*)$$

икәнен күрсәтик (339 нчы рәсем).

B ноктасы аша A_1C_1 гә параллель A_2C_2 турысын үткәрәбез. BAA_2 һәм BCC_2 өчпочмаклары охшаш. Өчпочмаклар охшашлыгыннан һәм $A_1B_1=A_2B$, $B_1C_1=BC_2$ тигезлекләреннән (*) пропорциясе килеп чыга.

Мәсьәлә (37). Өчпочмакның параллель проекциясе бирелгән. Бу өчпочмак медианаларының проекцияләрен ничек төзергә?

Чишү. Параллель проекцияләгәндә туры кисемтәләренең чагыштырмасы саклана. Шуңа күрә өчпочмак ягының уртасы шул як проекциясенең уртасына проекцияләнә. Димәк, өчпочмак медианаларының проекцияләре шул өчпочмак проекциясенең медианалары була.

КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Пространствода нинди турылар параллель турылар дип атала?
2. Нинди турылар чалышма турылар дип атала?
3. Бирелгән турыдан читтә алынган нокта аша бу турыга параллель туры үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә. Шуны исбатлагыз.
4. Турыларның параллельлек билгесен исбатлагыз.
5. Туры белән яссылыкның параллельлеге нәрсәне белдерә?
6. Туры һәм яссылыкның параллельлек билгесен исбатлагыз.
7. Нинди яссылыкларны параллель яссылыклар дип атыйлар?
8. Яссылыкларның параллельлек билгесен исбатлагыз.
9. Бирелгән яссылыктан читтә алынган нокта аша шул яссылыкка параллель яссылык үткәрергә мөмкин һәм бары тик берне генә. Шуны исбатлагыз.
10. Ике параллель яссылык өченче яссылык белән кистерелсә, кисешү турыларының параллель икәнлеген исбатлагыз.
11. Параллель турыларның параллель яссылыклар арасындагы кисемтәләре тигез. Шуны исбатлагыз.
12. Параллель проекцияләүнең үзлекләрен санап чыгыгыз.

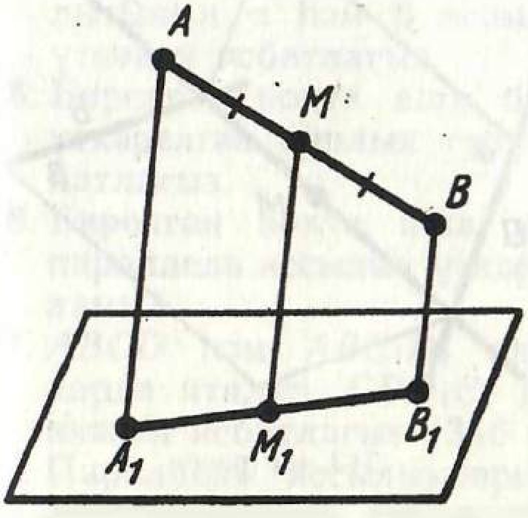
МӘСЬӘЛӘЛӘР

1. AB һәм CD — чалышма турылар булса, AC һәм BD турыларының да чалышма турылар икәнен исбатлагыз.
2. Чалышма a һәм b турыларыныкы булмаган C ноктасы аша һәркайсы a һәм b турыларын кисә торган төрле ике туры үткәреп буламы?
3. Бирелгән ике параллель турыны кисүче барлык турыларның бер яссылыкта ятканлыгын исбатлагыз.
4. a һәм b турылары кисешәләр. b турысына параллель һәм a турысын кисүче барлык турыларның бер яссылыкта ятканлыгын исбатлагыз.
5. Әгәр яссылык параллель турыларның берсен кисеп үтсә, икенчесен дә кисеп үткәнлеген исбатлагыз. AB кисемтәсенең очлары һәм аның уртасы M аша ниндидер яссылыкны A_1, B_1 һәм M_1 нокталарында кисеп үтүче параллель турылар үткәрелгән (340 нчы рәсем). 1) $AA_1=5$ м, $BB_1=7$ м; 2) $AA_1=3{,}6$ дм, $BB_1=4{,}8$ дм; 3) $AA_1=8{,}3$ см, $BB_1=4{,}1$ см; 4) $AA_1=a$, $BB_1=b$ булып, AB кисемтәсе яссылыкны кисеп үтмәсә, MM_1 кисемтәсенең озынлыгын табыгыз.

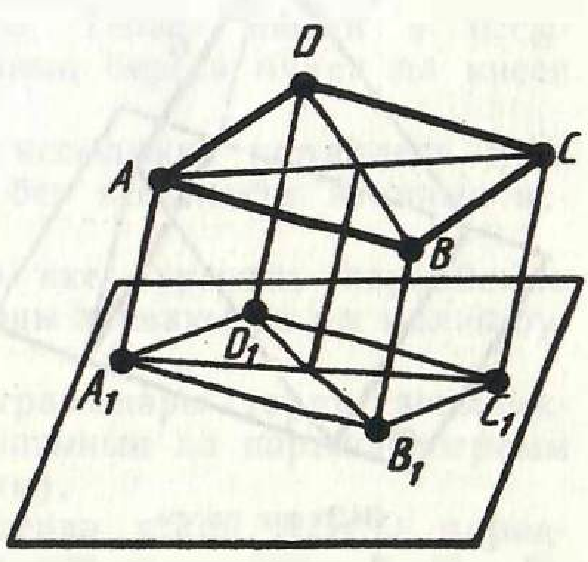
6*. 4 нче мәсьәләне AB кисемтәсе яссылыкны кисеп үткән очрак өчен чишегез.

7. AB кисемтәсенең A очы аша яссылык үткәрелгән. Бу кисемтәнең B очы һәм C ноктасы аша яссылыкны B_1 һәм C_1 нокталарында кисә торган параллель турылар үткәрелгән. 1) $CC_1=15$ см, $AC:BC=2:3$; 2) $CC_1=8{,}1$ см, $AB:AC=11:9$; 3) $AB=6$ см, $AC:CC_1=2:5$; 4) $AC=a$, $BC=b$, $CC_1=c$ булса, BB_1 кисемтәсенең озынлыгын табыгыз.

8*. $ABCD$ параллелограммы һәм аны кисми торган яссылык бирелгән. Параллелограммның түбәләре аша бирелгән яссылыкны A_1, B_1, C_1, D_1 нокталарында кисүче параллель турылар үткәрелгән (341 нче рәсем). 1) $AA_1=2$ м,



340 нчы рәсем



341 нче рәсем

$BB_1=3$ м, $CC_1=8$ м; 2) $AA_1=4$ м, $BB_1=3$ м, $CC_1=1$ м; 3) $AA_1=a$, $BB_1=b$, $CC_1=c$ булса, DD_1 кисемтәсенең озынлыгын табыгыз.

9. a һәм b турылары бер яссылыкта ятмый. a һәм b турыларына параллель итеп, c турысы үткәреп буламы?

10. A, B, C, D нокталары бер яссылыкта ятмый. AB һәм BC кисемтәләренең урталары аша үтүче турының AD һәм CD кисемтәләренең урталары аша үтүче турыга параллель икәнен исбатлагыз.

11. Пространство дүртпочмагы ягының урталары параллелограмм түбәләре булганын исбатлагыз (пространство дүртпочмагының түбәләре бер яссылыкта ятмый).

12*. Бер яссылыкта ятмаган дүрт нокта: A, B, C, D бирелгән. AB һәм CD, AC һәм BD, AD һәм BC кисемтәләренең урталарын тоташтыручы турыларның бер ноктада кисешкәнлеген исбатлагыз.

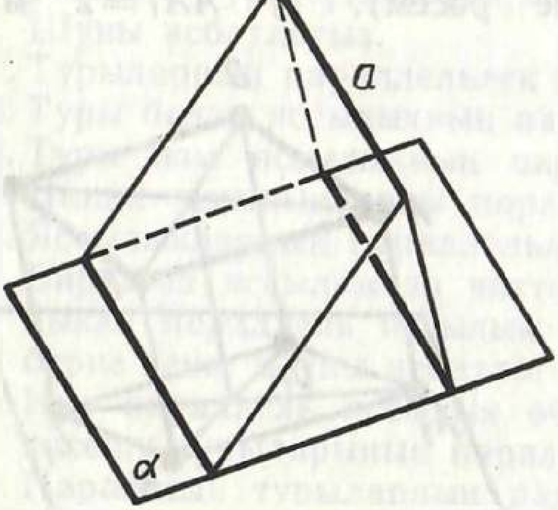
13. ABC өчпочмагы бирелгән. AB турысына параллель яссылык бу өчпочмакның AC ягын — A_1 ноктасында, ә BC ягын B_1 ноктасында кисеп үтә. 1) $AB=15$ см, $AA_1:AC=2:3$; 2) $AB=8$ см, $AA_1:A_1C=5:3$; 3) $B_1C=10$ см, $AB:BC=4:5$; 4) $AA_1=a$, $AB=b$, $A_1C=c$ булса, A_1B_1 кисемтәсенең озынлыгын табыгыз.

14. Бирелгән нокта аша кисешүче ике яссылыкның һәркайсына параллель туры үткәрегез.

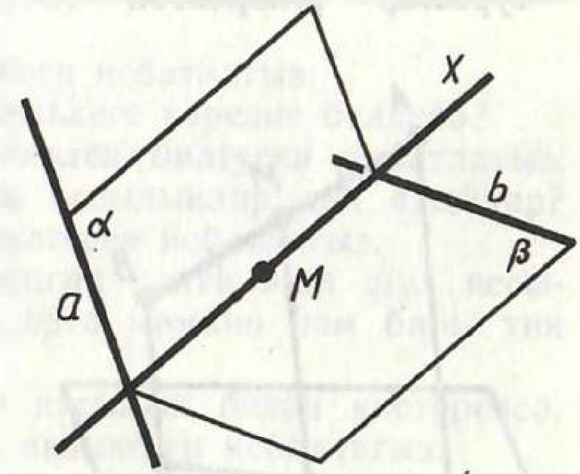
15. Яссылык параллель ике турының берсен киссә, икенчесен дә кискәнен исбатлагыз.

16. Ике чалышма турының теләсә кайсы аша икенчесенә параллель яссылык үткәрергә мөмкин икәнен исбатлагыз.

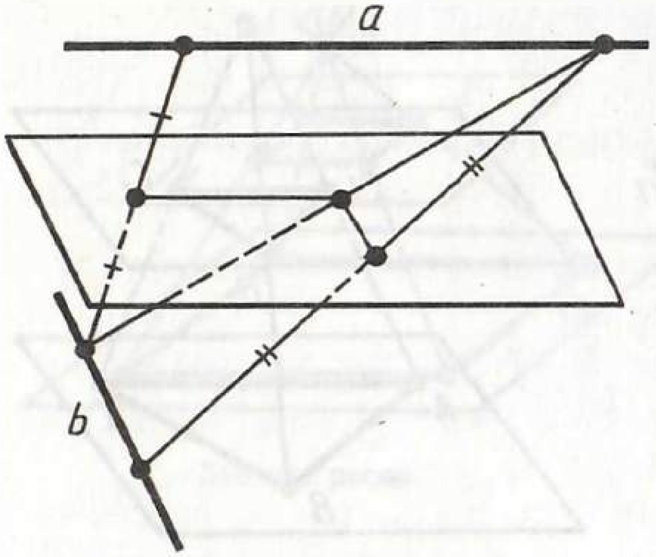
17. Әгәр a турысы буйлап кисешүче ике яссылык α яссылыгын параллель турылар буйлап кисеп үтсәләр, a турысының α яссылыгына параллель икәнен исбатлагыз (342 нче рәсем).



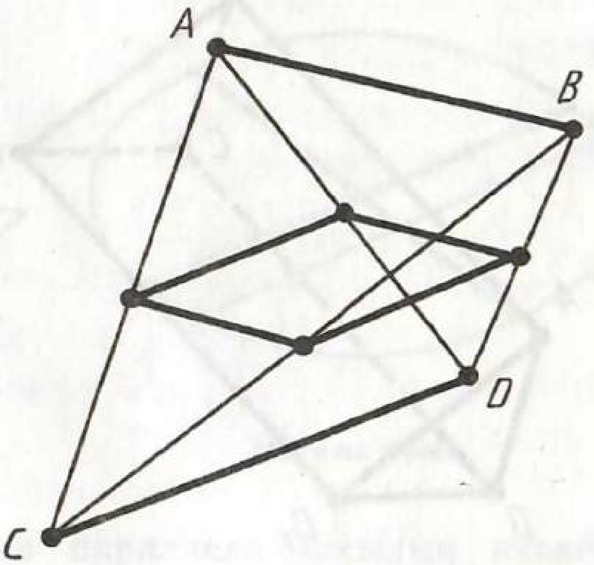
342 нче рәсем



343 нче рәсем



344 нче рәсем



345 нче рәсем

18. Әгәр туры ике параллель яссылыкның берсен кисеп үтсә, аның икенче яссылыкны да кисеп үткәнлеген исбатлагыз.

19. Ике чалышма туры аша параллель яссылыклар үткәрергә мөмкин икәнен исбатлагыз.

20. Пространствода бирелгән нокта аша ике чалышма турының һәр икесен дә кисүче туры үткәрегез (343 нче рәсем). Бу һәрвакытта да мөмкинме?

21*. Очлары ике чалышма турыда яткан кисемтәләрнең урталарының геометрик урыны яссылык икәнен исбатлагыз (344 нче рәсем).

22. Бер яссылыкта ятмаган дүрт нокта: A, B, C, D бирелгән. AB һәм CD турыларына параллель теләсә нинди яссылык AC, AD, BD һәм BC турыларын параллелограмм түбәләрендә кисеп үтә. Шуны исбатлагыз (345 нче рәсем).

23. α һәм β яссылыклары γ яссылыгына параллель. α һәм β яссылыкларының кисешүе мөмкинме?

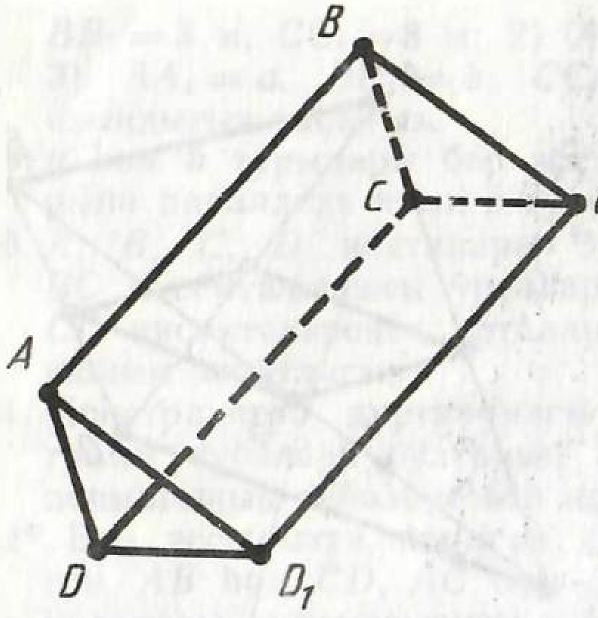
24. α һәм β яссылыклары кисешә. Теләсә нинди γ яссылыгының α һәм β яссылыкларының берсен булса да кисеп үткәнен исбатлагыз.

25. Бирелгән нокта аша бирелгән яссылыкка параллель итеп үткәрелгән барлык турыларның бер яссылыкта ятканын исбатлагыз.

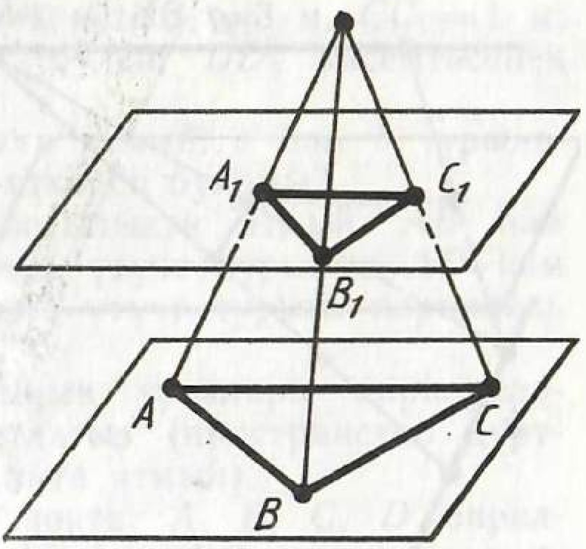
26. Бирелгән нокта аша кисешүче ике турының һәркайсына параллель яссылык үткәрегез. Моны һәрвакытта да эшләп буламы?

27. $ABCD$ һәм ABC_1D_1 параллелограммнары төрле яссылыкларда яталар. CDD_1C_1 дүртпочмагының да параллелограмм икәнен исбатлагыз (346 нчы рәсем).

28. Параллель яссылыкларның берсендә яткан $ABCD$ параллелограммының түбәләре аша икенче яссылыкны A_1, B_1, C_1,



346 нчы рәсем



347 нче рәсем

D_1 нокталарында кисүче параллель турылар үткәрелгән. $A_1B_1C_1D_1$ дүртпочмагының да параллелограмм икәнен исбатлагыз.

29. Параллель яссылыкларның берсендә яткан ABC өчпочмагының түбәләре аша икенче яссылыкны A_1, B_1, C_1 нокталарында кисүче параллель турылар үткәрелгән. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларының тигез икәнен исбатлагыз.

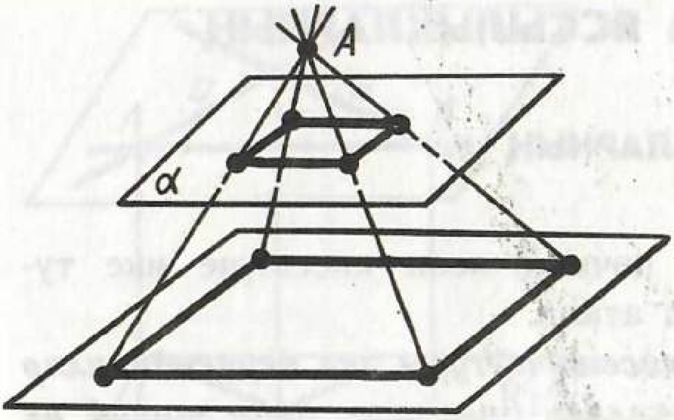
30. Бер нокта аша үтүче өч туры бер яссылыкны A, B, C нокталарында, ә аңа параллель яссылыкны A_1, B_1, C_1 нокталарында кисеп үтә. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларының охшаш икәнен исбатлагыз (347 нче рәсем).

31. Әгәр A ноктасы аша үтүче дүрт туры α яссылыгын параллелограмм түбәләрендә кисеп үтсә, алар α яссылыгына параллель һәм A ноктасы аша үтми торган теләсә нинди яссылыкны да параллелограмм түбәләрендә кисеп үтә. Шуны исбатлагыз (348 нче рәсем).

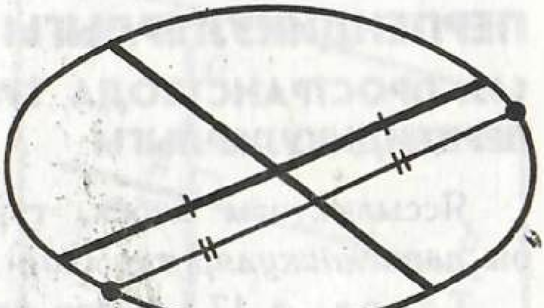
32. Ике параллель яссылык бирелгән. Бу яссылыкларның берсендә яткан A һәм B нокталары аша икенче яссылыкны A_1 һәм B_1 нокталарында кисүче параллель турылар үткәрелгән. $AB = a$ булса, A_1B_1 кисемтәсе нәрсәгә тигез?

33*. Ике параллель яссылык: α_1 һәм α_2 һәм бу яссылыкларның берсендә дә ятмый торган A ноктасы бирелгән. A ноктасы аша ирекле рәвештә туры үткәрелгән. X_1 һәм X_2 — аның α_1 һәм α_2 яссылыклары белән кисешү нокталары булсын. AX_1 һәм AX_2 кисемтәләренең озынлыклары чагыштырмасы турыны ничек алуга бәйле түгеллеген исбатлагыз.

34*. A ноктасы α яссылыгыннан читтә ята. X ноктасы — α яссылыгының теләсә нинди ноктасы, X' исә AX кисемтәсен $m : n$ чагыштырмасында бүлүче нокта. X' нокталарының гео-



348 нче рәсем



349 нчы рәсем

метрик урыны α яссылыгына параллель яссылык икәнен исбатлагыз.

35*. Өч параллель яссылык: α_1, α_2, α_3 бирелгән. X_1, X_2, X_3 — бу яссылыкларның ирекле рәвештә алынган туры белән кисешү нокталары. X_1X_2 һәм X_2X_3 кисемтәләренең озынлыклары чагыштырмасы турыга бәйле түгел, ягъни теләсә нинди ике туры өчен бер үк икәнен исбатлагыз.

36. Дүрт параллель туры бирелгән. Әгәр нинди дә булса яссылык бу турыларны параллелограмм түбәләрендә кисеп үтсә, бирелгән турыларга параллель булмаган теләсә нинди яссылык аларны нинди дер параллелограмм түбәләрендә кисеп үтәр. Шуны исбатлагыз.

37. Өчпочмакның параллель проекциясе бирелгән. Бу өчпочмак медианаларының проекциясен ничек төзергә?

38. Өчпочмакның параллель проекциясе бирелгән. Өчпочмакның урта сызыгы проекциясе нинди фигура булып сурәтләнә?

39. Параллелограммны параллель проекцияләгәндә трапеция килеп чыгуы мөмкинме? Җавапны аңлатыгыз.

40. Параллель проекцияләгәндә параллелограммның проекциясе квадрат булуы мөмкинме?

41. Үзәк симметрияле фигураның параллель проекциясе шулай ук үзәк симметрияле фигура икәнен исбатлагыз.

42. Әйләнә һәм аның диаметрының параллель проекциясе бирелгән (349 нчы рәсем). Перпендикуляр диаметрның проекциясен ничек төзергә?

§ 17. ТУРЫЛАРНЫҢ ҺӘМ ЯССЫЛЫКЛАРНЫҢ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫГЫ

143. ПРОСТРАНСТВОДА ТУРЫЛАРНЫҢ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫГЫ

Яссылыктагы кебек, туры почмак ясап кисешүче ике туры *перпендикуляр турылар* дип атала.

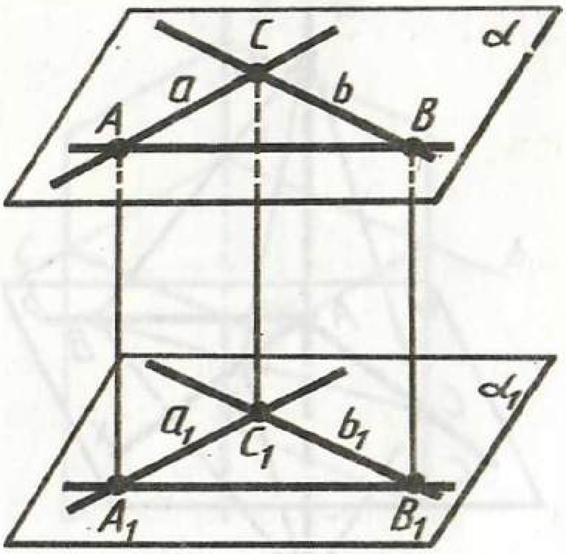
Теорема 17.1. ***Әгәр ике кисешүче туры ике перпендикуляр турыга тиңдәшле рәвештә параллель булсалар, алар шулай ук перпендикуляр булалар.***

Исбатлау. a һәм b — перпендикуляр турылар, a_1 һәм b_1 — аларга параллель кисешүче турылар булсын. a_1 һәм b_1 турыларының перпендикуляр булуын исбатларбыз. a, b, a_1, b_1 турылары бер яссылыкта ятсалар, аларның теоремада күрсәтелгән үзлеккә ия булуы планиметриядән билгеле.

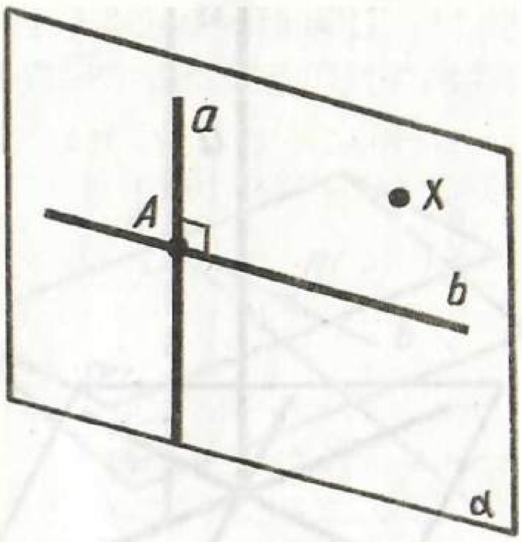
Турылар бер яссылыкта ятмыйлар дип уйлыйк. Ул вакытта a һәм b турылары ниндидер α яссылыгында, ә a_1 һәм b_1 турылары ниндидер α_1 яссылыгында ятар (350 нче рәсем). 16.4 теоремасы буенча α һәм α_1 яссылыклары параллель була. C — a һәм b турыларының кисешү ноктасы, ә C_1 a_1 һәм b_1 турыларының кисешү ноктасы булсын. a һәм a_1 параллель турылары яссылыгында CC_1 турысына параллель туры үткәрәбез. Ул a һәм a_1 турыларын A һәм A_1 нокталарында кисеп үтәр. b һәм b_1 параллель турылары яссылыгында CC_1 турысына параллель туры үткәрик, һәм аның b һәм b_1 турылары белән кисешү нокталарын B һәм B_1 аша тамгалыйк.

CAA_1C_1 һәм CBB_1C_1 дүртпочмаклары — параллелограммнар, чөнки аларның каршы ятучы яклары параллель. ABB_1A_1 дүртпочмагы шулай ук параллелограмм. Аның AA_1 һәм BB_1 яклары параллель, чөнки аларның һәркайсы CC_1 турысына параллель. Шулай итеп, дүртпочмак AA_1 һәм BB_1 параллель турылары аша үтүче яссылыкта ята. Ул α һәм α_1 параллель яссылыкларын AB һәм A_1B_1 параллель турылары буйлап киса.

Параллелограммның каршы ятучы яклары тигез булганлыктан, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. Өчпочмаклар тигезлегенең өченче билгесе буенча ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары тигез. Димәк, ACB почмагына тигез булган $A_1C_1B_1$ почмагы туры, ягъни a_1 һәм b_1 турылары перпендикуляр була. Теорема исбатланды.



350 нче рәсем



351 нче рәсем

Мәсьәлә (1). Пространстводагы турының теләсә кайсы ноктасы аша аңа перпендикуляр туры үткәрергә мөмкин икәнен исбатлагыз.

Чишү. a — бирелгән туры һәм A — аның ноктасы булсын (351 нче рәсем). Турыдан тышта теләсә нинди X ноктасы алабыз, бу нокта һәм a турысы аша α яссылыгы үткәрәбез (15.1 теоремасы). Хәзер α яссылыгында A ноктасы аша a турысына перпендикуляр b турысы үткәреп була, шуны исбатларга кирәк иде дә.

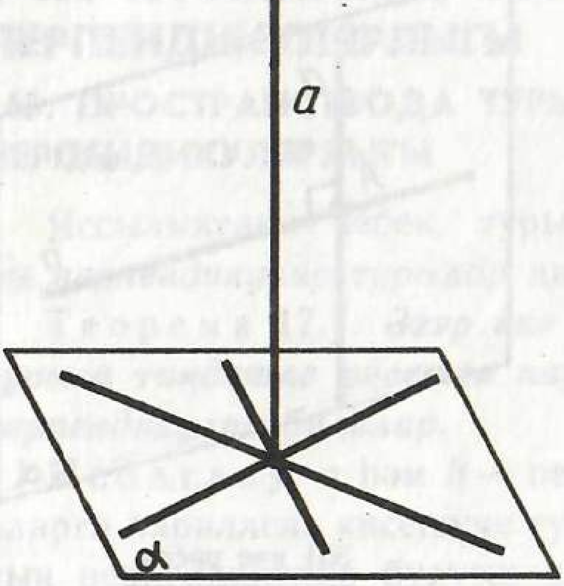
144. ТУРЫ БЕЛӘН ЯССЫЛЫКНЫҢ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫК БИЛГЕСЕ

Әгәр яссылыкны кисүче туры бу яссылыктагы кисешү ноктасы аша үтүче теләсә нинди турыга перпендикуляр булса, ул туры яссылыкка перпендикуляр дип атала (352 нче рәсем).

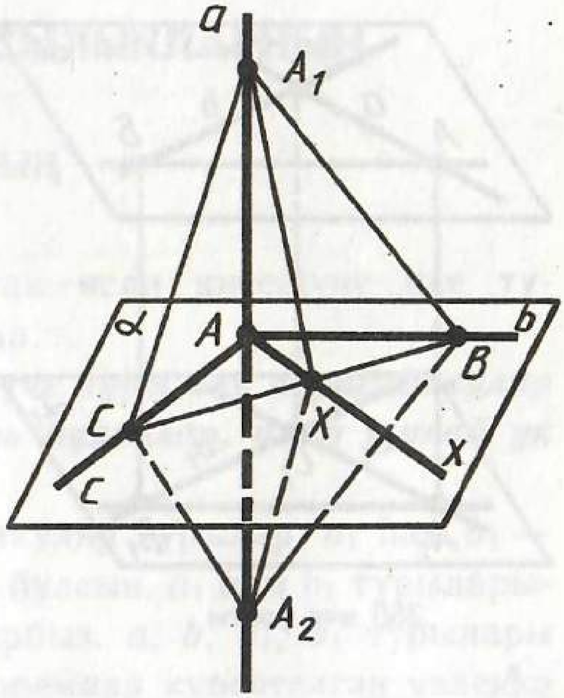
Теорема 17.2. ***Әгәр туры яссылыктагы кисешүче ике турыга перпендикуляр булса, ул бирелгән яссылыкка перпендикуляр була.***

Исбатлау. a — α яссылыгындагы b һәм c турыларына перпендикуляр туры булсын. Ул вакытта a турысы b һәм c турыларының кисешү ноктасы A аша үтә (353 нче рәсем). a турысының α яссылыгына перпендикуляр икәнен исбатларбыз.

A ноктасы аша α яссылыгында ирекле x турысы үткәрәбез һәм аның a турысына перпендикуляр икәнен күрсәтәбез. α яссылыгында A ноктасы аша үтмәүче һәм b, c һәм x турыларын ки-



352 нче рәсем



353 нче рәсем

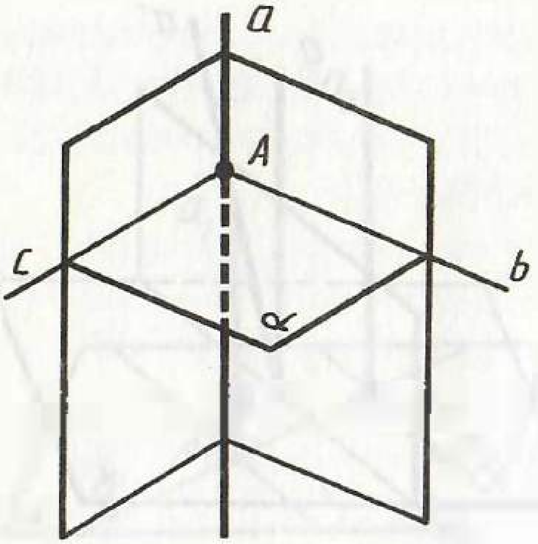
сеп үтүче ирекле туры үткәрәбез. Кисешү нокталары B, C һәм X булсын.

a турысына A ноктасыннан төрле якка AA_1 һәм AA_2 тигез кисемтәләре салабыз. A_1CA_2 өчпочмагы тигезьянлы, чөнки теореманың шарты буенча AC биеклек, ә төзү буенча медиана $(AA_1 = AA_2)$ булып тора. Шул ук сәбәп буенча A_1BA_2 өчпочмагы да тигезьянлы. Димәк, A_1BC һәм A_2BC өчпочмаклары өчпочмаклар тигезлегенең өченче билгесе буенча тигез.

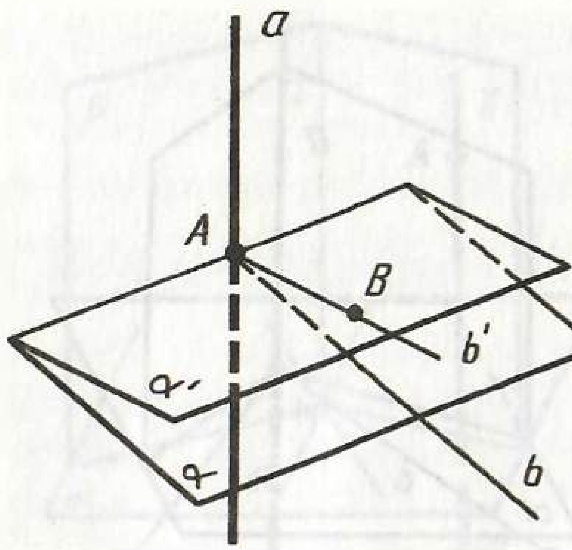
A_1BC һәм A_2BC өчпочмакларының тигезлегеннән A_1BX, A_2BX почмакларының тигезлеге һәм, димәк, өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесе буенча A_1BX һәм A_2BX өчпочмакларының тигез икәнлеге килеп чыга. Бу өчпочмакларның A_1X һәм A_2X якларының тигезлегеннән A_1XA_2 өчпочмагы тигезьянлы дигән нәтиҗәгә киләбез. Шуңа күрә аның XA медианасы биеклек тә булып тора. Ә бу — x турысы a турысына перпендикуляр дигән сүз. Билгеләмә буенча a турысы α яссылыгына перпендикуляр. Теорема исбатланды.

145. ҮЗАРА ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТУРЫ ҺӘМ ЯССЫЛЫК ТӨЗҮ

Мәсьәлә (9). Турының бирелгән ноктасы аша аңа перпендикуляр итеп бер һәм тик бер генә яссылык үткәреп булганын исбатлагыз.



354 нче рәсем



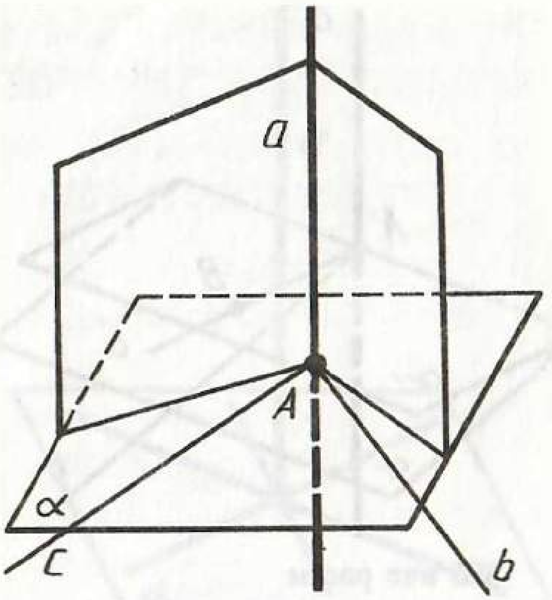
355 нче рәсем

Чишү. a — бирелгән туры һәм A — аның ноктасы булсын (354 нче рәсем). a турысы аша ике яссылык һәм бу яссылыкларда A ноктасы аша a турысына перпендикуляр итеп b һәм c турылары үткәрәбез. 17.2 теоремасы буенча b һәм c турылары аша үтүче α яссылыгы a турысына перпендикуляр була.

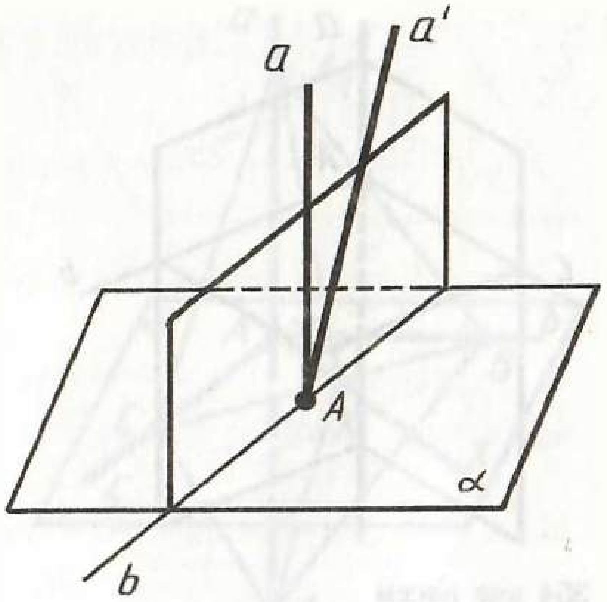
Бу яссылыкның бер генә икәнен исбатлыйк. α яссылыгыннан башка a турысының A ноктасы аша үтүче һәм аңа перпендикуляр икенче α' яссылыгы бар дип карыйк (355 нче рәсем). B — α' яссылыгының α яссылыгында ятмаган ноктасы булсын. B ноктасы һәм a турысы аша яссылык үткәрәбез. Ул α һәм α' яссылыкларын a турысына перпендикуляр төрле b һәм b' турылары буйлап кисәр. Ә бу, безгә билгеле булганча, мөмкин түгел, чөнки яссылыкта турының бирелгән ноктасы аша аңа бер генә перпендикуляр туры үткәреп була. Шулай итеп, A ноктасы аша үтүче һәм a турысына перпендикуляр яссылык бер һәм тик бер генә.

Мәсьәлә (11). Яссылыкның бирелгән ноктасы аша аңа перпендикуляр итеп бер һәм тик бер генә туры үткәреп булганын исбатлагыз.

Чишү. α — бирелгән яссылык, A — аның ноктасы булсын (356 нчы рәсем). A ноктасы аша α яссылыгында ике b һәм c турылары үткәрәбез. A ноктасы аша аларга перпендикуляр яссылыклар үткәрәбез. Алар b һәм c турысына перпендикуляр ниндидер a турысы буйлап кисешерләр. Димәк, a турысы α яссылыгына перпендикуляр була.



356 нчы рәсем



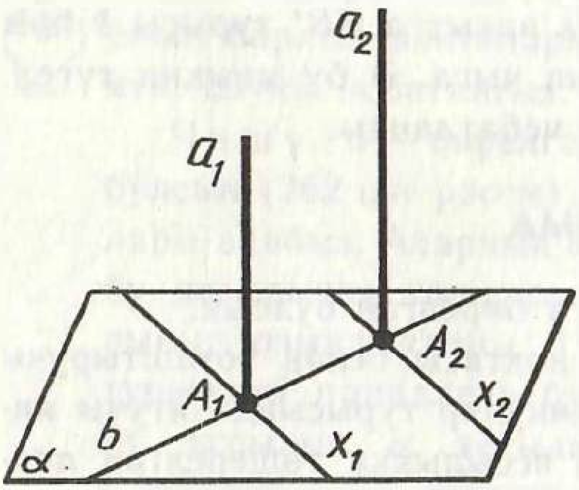
357 нче рәсем

Бу турының бер генә икәнен исбатлыйбыз. A ноктасы аша, a турысыннан башка, α яссылыгына перпендикуляр a' турысы үткәреп була дип карыйк (357 нче рәсем). a һәм a' турылары аша яссылык үткәрәбез. Ул α яссылыгын a һәм a' турыларына перпендикуляр b турысы буйлап кисәр. Ә бу, белгәнебезчә, мөмкин түгел. Шулай итеп, яссылыкның бирелгән ноктасы аша үтүче һәм аңа перпендикуляр туры бер генә.

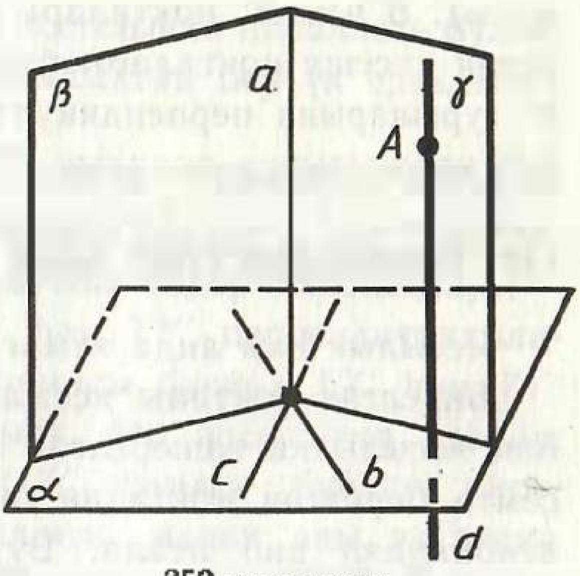
146. ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТУРЫ ҺӘМ ЯССЫЛЫКНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ

Теорема 17.3. Әгәр яссылык параллель ике турының берсенә перпендикуляр булса, икенчесенә дә перпендикуляр була.

Исбатлау. a_1 һәм a_2 — ике параллель туры һәм α a_1 турысына перпендикуляр яссылык булсын (358 нче рәсем). Бу яссылыкның a_2 турысына да перпендикуляр икәнен исбатлыйк. a_2 турысының α яссылыгы белән кисешү ноктасы A_2 аша α яссылыгында ирекле x_2 турысы үткәрәбез. a_1 турысының α яссылыгы белән кисешү ноктасы A_1 аша, x_2 турысына параллель итеп, x_1 турысы үткәрәбез. Ул α яссылыгында ята. a_1 турысы α яссылыгына перпендикуляр булганлыктан, a_1 һәм x_1 турылары перпендикуляр була. 17.1 теоремасы буенча аларга параллель кисешүче a_2 һәм x_2 турылары да перпендикуляр була. Шулай итеп, a_2 турысы α яссылыгындагы теләсә нинди x_2 турысына



358 нче рәсем



359 нчы рәсем

перпендикуляр икән. Ә бу — a_2 турысы α яссылыгына перпендикуляр дигән сүз. Теорема исбатланды.

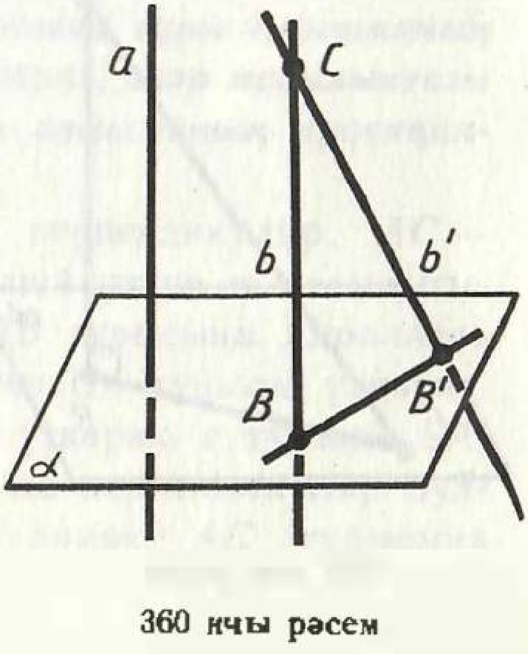
Мәсьәлә (12). Теләсә кайсы A ноктасы аша бирелгән α яссылыгына перпендикуляр туры үткәреп булуын исбатлагыз.

Чишү. α яссылыгында ике кисешүче b һәм c турылары үткәрик (359 нчы рәсем). Аларның кисешү ноктасы аша b һәм c турыларына тиңдәшле рәвештә перпендикуляр булган β һәм γ яссылыклары үткәрик. Алар ниндидер a турысы буйлап кисешерләр. a турысы b һәм c турыларына, димәк, α яссылыгына да перпендикуляр. Хәзер A ноктасы аша a турысына параллель итеп d турысы үткәрик. 17.3 теоремасы буенча ул α яссылыгына перпендикуляр була.

Теорема 17.4. ***Бер үк яссылыкка перпендикуляр ике туры параллель була.***

Исбатлау. a һәм b турылары α яссылыгына перпендикуляр ике туры булсын (360 нчы рәсем). a һәм b турылары параллель түгел дип карыйк.

b турысында α яссылыгында ятмаган C ноктасы алабыз. b турысының нинди булса да C ноктасы аша, a турысына параллель итеп, b турысы үткәрәбез. b турысы α яссылыгына перпендикуляр (17.3 теоре-



360 нчы рәсем

масы). B һәм B' нокталары b һәм b' турыларының α яссылыгы белән кисешү нокталары булсын. Ул вакытта BB' турысы b һәм b' турыларына перпендикуляр булып чыга. Ә бу мөмкин түгел. Без каршылыкка очрадык. Теорема исбатланды.

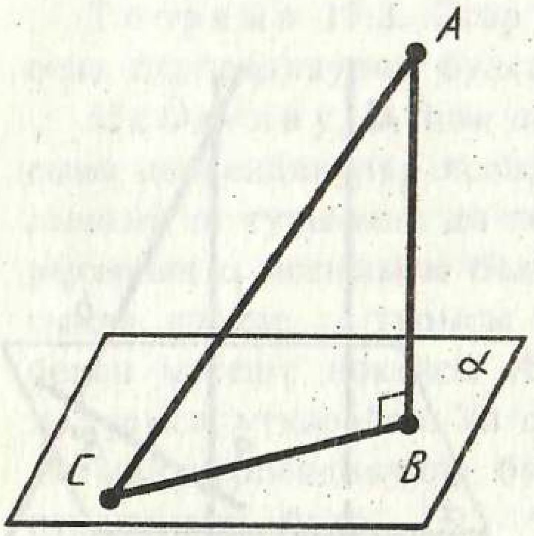
147. ПЕРПЕНДИКУЛЯР һӘМ АВЫШМА

Яссылык һәм анда ятмаган нокта бирелгән булсын.

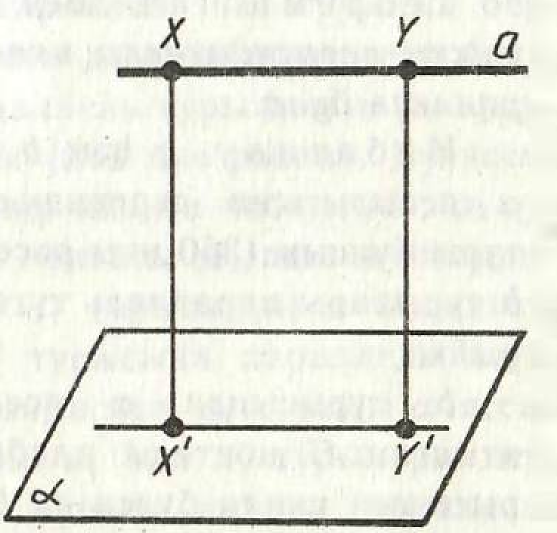
Бирелгән ноктаны яссылыкның ноктасы белән тоташтыручы һәм яссылыкка төшерелгән перпендикуляр турысында ятучы кисемтә бирелгән ноктадан бирелгән яссылыкка төшерелгән *перпендикуляр* дип атала. Бу кисемтәнең яссылыкта яткан очы *перпендикулярның нигезе* дип атала. Ноктадан яссылыкка төшерелгән перпендикулярның озынлыгы шул ноктадан яссылыкка кадәр ераклык дип атала.

Бер очы бирелгән ноктада, икенчесе яссылыкта булган һәм әлеге яссылыкка перпендикуляр булмаган теләсә нинди кисемтә бирелгән ноктадан бирелгән яссылыкка үткәрелгән *авышма* дип атала. Кисемтәнең яссылыкта яткан очы *авышманың нигезе* дип атала. Бер үк ноктадан үткәрелгән перпендикуляр һәм авышманың нигезләрен тоташтыручы кисемтә *авышманың проекциясе* дип атала.

361 нче рәсемдә A ноктасыннан α яссылыгына AB перпендикуляры һәм AC авышмасы үткәрелгән. B ноктасы — перпендикулярның нигезе, C ноктасы — авышма нигезе, BC — AC авышмасының α яссылыгына проекциясе.



361 нче рәсем



362 нче рәсем

М ә с ь ә л ә (26). Әгәр туры яссылыкка параллель булса, аның барлык ноктлары да яссылыктан бер үк ераклыкта ята. Шуны исбатлагыз.

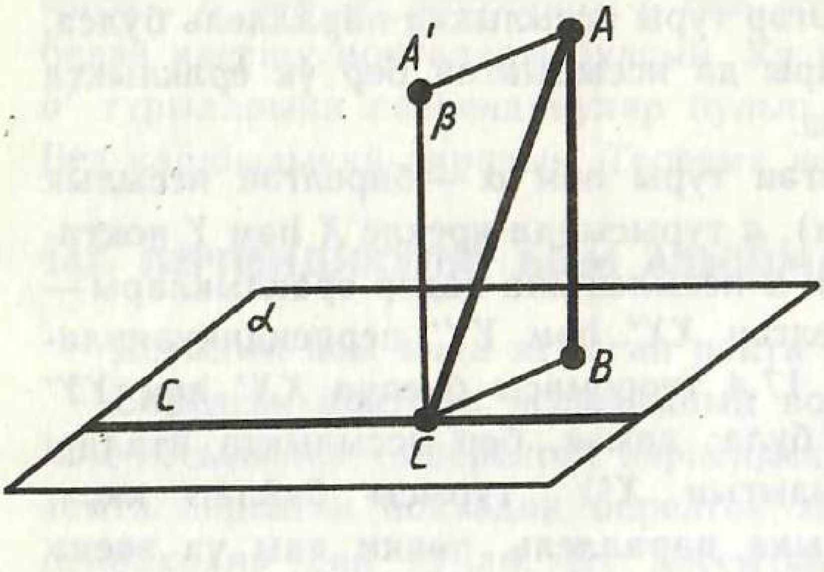
Ч и ш ү. a — бирелгән туры һәм α — бирелгән яссылык булсын (362 нче рәсем). a турысында ирекле X һәм Y ноктлары алабыз. Аларның α яссылыгына кадәр ераклыклары — бу яссылыкка төшерелгән XX' һәм YY' перпендикулярларының озынлыклары. 17.4 теоремасы буенча XX' һәм YY' турылары параллель була; димәк, бер яссылыкта яталар. Бу яссылык α яссылыгын $X'Y'$ турысы буйлап кисә, a турысы $X'Y'$ турысына параллель, чөнки аны үз эченә алган α яссылыгын кисми. Шулай итеп, $XX'Y'Y$ дүртпочмагының каршы ятучы яклары параллель икән. Димәк, ул параллелограмм, һәм, шулай булгач, $XX' = YY'$, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Турының теләсә кайсы ноктасыннан шул яссылыкка кадәрге ераклык турыдан параллель яссылыкка кадәрге *ераклык* дип атала. Яссылыкның теләсә нинди ике ноктасыннан параллель яссылыкка кадәрге ераклык тигез икәне 26 нчы мәсьәләне чишкәндәге кебек исбатлана. Шуның аркасында бер яссылыкның теләсә нинди ноктасыннан икенче яссылыкка кадәрге ераклык параллель яссылыклар арасындагы *ераклык* дип атала.

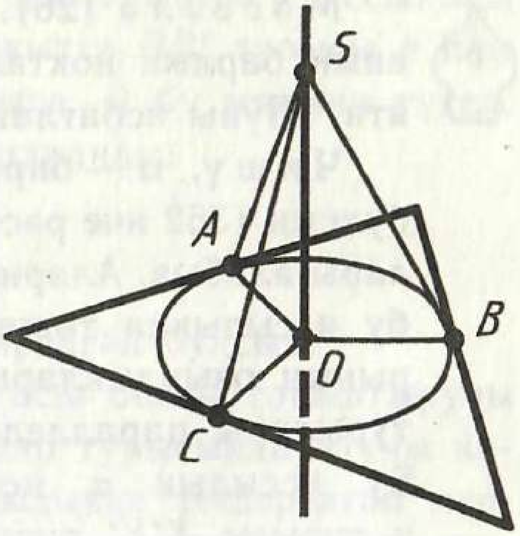
148. ӨЧ ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТУРЫНДА ТЕОРЕМА

Т е о р е м а 17.5. ***Яссылыкта авышманың нигезе аша, аның проекциясенә перпендикуляр итеп үткәрелгән туры авышманың үзенә дә перпендикуляр була.*** Һәм киресенчә, ***әгәр яссылыктагы туры авышмага перпендикуляр икән, ул авышманың проекциясенә дә перпендикуляр була.***

И с б а т л а у. AB — α яссылыгына перпендикуляр, AC — авышма һәм c — авышманың нигезе C аша үтүче α яссылыгының турысы булсын (363 нче рәсем). AB турысына параллель булган α яссылыгына перпендикуляр итеп CA турысы үткәрик. AB һәм $A'C$ турылары аша β яссылыгы үткәрик. c турысы CA' турысына перпендикуляр. CB турысына да перпендикуляр булса, ул β яссылыгына перпендикуляр, димәк, AC турысына да перпендикуляр.



363 нче рәсем



364 нче рәсем

Аналогия буенча, әгәр c турысы CA авышмасына перпендикуляр икән, ул, CA' турысына перпендикуляр буларак, β яссылыгына һәм, димәк, авышманың проекциясе BC га перпендикуляр була. Теорема исбатланды.

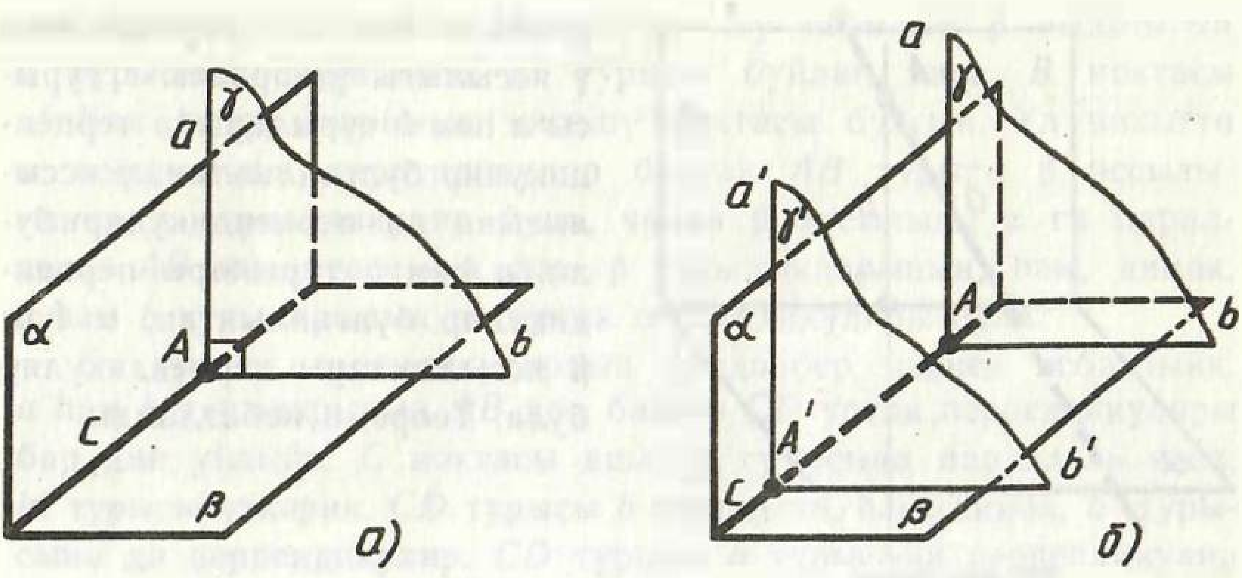
Мәсьәлә (45). Өчпочмакка камаулы әйләнәнең үзәге аша өчпочмак яссылыгына перпендикуляр итеп туры үткәрелгән. Бу турының һәр ноктасы өчпочмак якларыннан тигез ераклыкта ятканын исбатлагыз.

Чишү. A, B, C — өчпочмак якларының әйләнәгә орыну нокталары, O — әйләнәнең үзәге һәм S — перпендикулярдагы нокта булсын (364 нче рәсем). Әйләнәнең OA радиусы өчпочмак ягына перпендикуляр булганлыктан, өч перпендикуляр турындагы теорема буенча SA кисемтәсе бу якка перпендикуляр, ә аның озынлыгы — S ноктасыннан өчпочмак ягына кадәрге ераклык була. Пифагор теоремасы буенча $SA=\sqrt{AO^2+OS^2}=\sqrt{r^2+OS^2}$, биредә r — камаулы әйләнәнең радиусы. Аналогия буенча табабыз: $SB=\sqrt{r^2+OS^2}$, $SC=\sqrt{r^2+OS^2}$, ягъни S ноктасыннан өчпочмак якларына кадәр булган барлык ераклыклар тигез.

149. ЯССЫЛЫКЛАРНЫҢ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫК БИЛГЕСЕ

Әгәр кисешүче ике яссылыкның кисешү сызыгына перпендикуляр булган өченче яссылык аларны перпендикуляр турылар буйлап киссә, бу ике яссылык бер-берсенә *перпендикуляр* дип атала.

365 нче *а* рәсемендә сез c турысы буенча кисешүче α һәм



365 нче рәсем

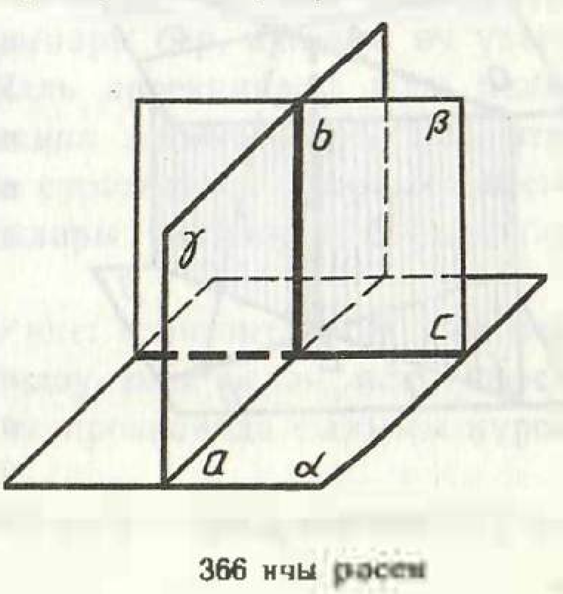
β яссылыклары күрәсез, c турысына перпендикуляр γ яссылыгы α һәм β яссылыкларын a һәм b перпендикуляр турылары буйлап кисә.

Перпендикуляр яссылыкларның кисешү сызыгына перпендикуляр булган теләсә нинди яссылык, аларны перпендикуляр турылар буйлап кисә. Чыннан да, c турысына перпендикуляр башка γ′ яссылыгы алсак, ул α яссылыгын c турысына перпендикуляр, димәк, a турысына параллель a' турысы буйлап, ә β яссылыгын c турысына перпендикуляр, һәм, димәк, b турысына параллель b' турысы буйлап кисәр (365 нче рәсем, б). 17.1 теоремасы буенча a һәм b турыларының да перпендикулярлыгы килеп чыга. Шуны исбатларга кирәк иде.

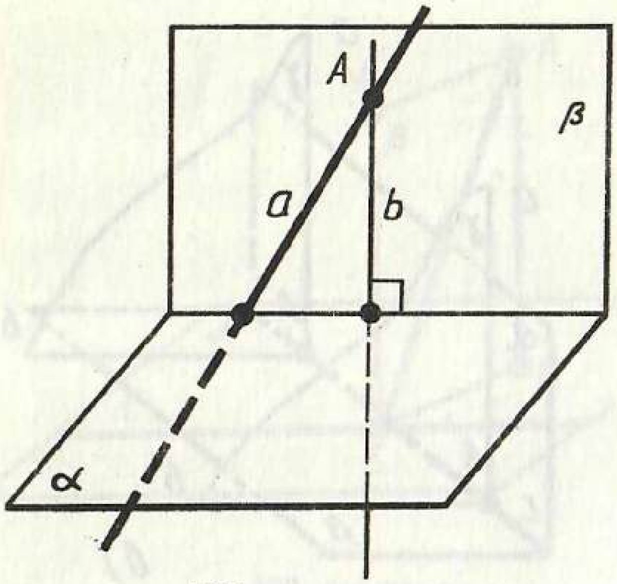
Т е о р е м а 17.6. ***Әгәр яссылык икенче яссылыкка перпендикуляр туры аша үтсә, ул яссылыклар перпендикуляр була.***

И с б а т л а у. α — яссылык, b — аңа перпендикуляр туры, β b турысы аша үтүче яссылык, һәм c α яссылыгы белән β яссылыгының кисешү сызыгы булсын (366 нчы рәсем). α һәм β яссылыкларының перпендикуляр икәнен исбатлыйк.

α яссылыгында, b турысының α яссылыгы белән кисешү ноктасы аша, c турысына перпендикуляр итеп, a турысы үткә-



366 нчы рәсем



367 нче рәсем

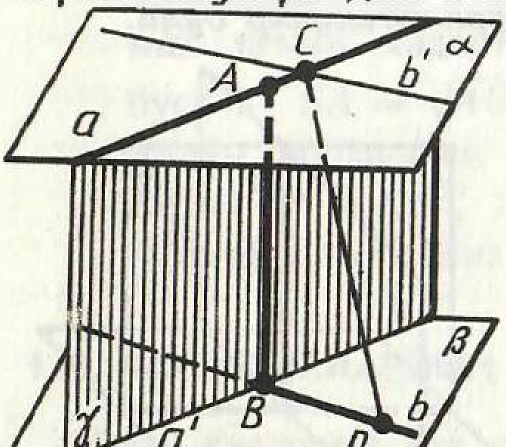
рәбез. a һәм b турылары аша γ яссылыгы үткәрәбез. c турысы a һәм b турыларына перпендикуляр булганлыктан, γ яссылыгына да перпендикуляр була. a һәм b турылары перпендикуляр булганлыктан, α һәм β яссылыклары перпендикуляр була. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (54). a турысы һәм α яссылыгы бирелгән. a турысы аша, α яссылыгына перпендикуляр итеп, яссылык үткәрегез.

Чишү. a турысының ирекле ноктасы аша, α яссылыгына перпендикуляр итеп (367 нче рәсем), b турысы үткәрәбез (12 нче мәсьәлә). a һәм b турылары аша β яссылыгы үткәрәбез. 17.6 теоремасы буенча β яссылыгы α яссылыгына перпендикуляр була.

150. ЧАЛЫШМА ТУРЫЛАР АРАСЫНДАГЫ ЕРАКЛЫК

Очлары ике чалышма турыда һәм аларның һәркайсына перпендикуляр булган кисемтә бу ике чалышма турының *уртак перпендикуляры* дип атала.



368 нче рәсем

Ике чалышма турының уртак перпендикуляры бар һәм ул бер генә. Ул бирелгән турылар аша үтүче параллель яссылыкларның уртак перпендикуляры булып тора. Шуны исбатлыйк.

Чыннан да, a һәм b — бирелгән чалышма турылар булсын (368 нче рәсем). Алар аша параллель α һәм β яссылыклары үткәрәбез. a турысын кисүче һәм α яссылыгына перпендикуляр турылар бер яс-

сылыкта — γ яссылыгында яталар. Бу яссылык β яссылыгын a турысына параллель a' турысы буйлап кисә. B ноктасы a' һәм b турыларының кисешү ноктасы булсын. Ул вакытта α яссылыгына перпендикуляр булган AB турысы β яссылыгына да перпендикуляр була, чөнки β яссылыгы α га параллель. AB кисемтәсе — α һәм β яссылыкларының, һәм, димәк, a һәм b турыларының да уртак перпендикуляры була.

Бу уртак перпендикулярның бердәнбер икәнен исбатлыйк. a һәм b турыларының AB дан башка CD уртак перпендикуляры бар дип уйлыйк. C ноктасы аша, b турысына параллель итеп, b' турысы үткәрик. CD турысы b турысына, һәм, димәк, b' турысына да перпендикуляр. CD турысы a турысына перпендикуляр булганга, ул α яссылыгына перпендикуляр, һәм, димәк, AB турысына параллель була. AB һәм CD турылары параллель булганлыктан, алар аша яссылык үкәрергә мөмкин. Ул яссылыкта безнең AC һәм BD чалышма турылары ятар, ә бу мөмкин түгел. Теорема исбатланды.

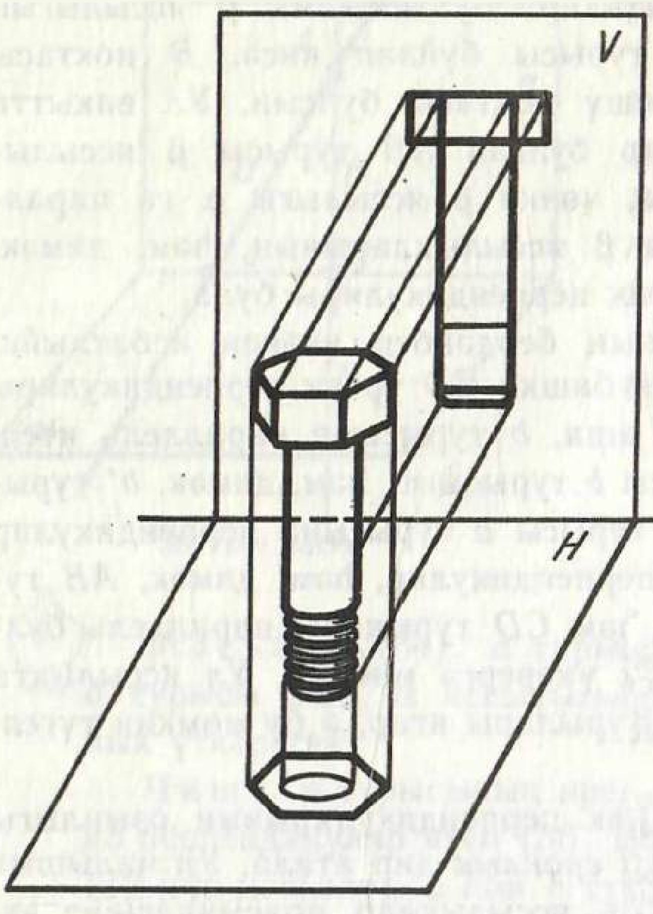
Чалышма турыларның уртак перпендикулярының озынлыгы *чалышма турылар арасындагы ераклык* дип атала. Ул чалышма турылар аша үтүче параллель яссылыклар арасындагы ераклыкка тигез.

151. ОРТОГОНАЛЬ ПРОЕКЦИЯЛӘҮНЕ ТЕХНИК СЫЗЫМДА КУЛЛАНУ

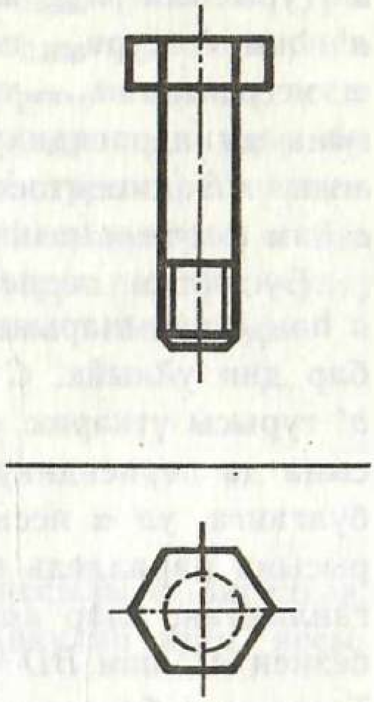
Сызымда ортогональ проекцияләү, ягъни проекция яссылыгына перпендикуляр турылар белән параллель проекцияләү кулланыла. Машина детальләренең сызымнары бер, ике яки өч үзара перпендикуляр яссылыкка ортогональ проекцияләү юлы белән килеп чыга. Бу яссылыклар *проекция яссылыклары* дип аталалар. Детальләрнең проекцияләре сурәтләнгән проекция яссылыкларын, аларның кисешү сызыклары тирәсендә борып, бер яссылыкка туплыйлар.

369 нчы рәсемдә болт сызымын ике: горизонталь H һәм вертикаль V яссылыкларына проекцияләү юлы белән ясау күрсәтелгән. 370 нче рәсемдә болтның ике проекциядә сызымы күрсәтелгән.

Машина детальләренең сызымнарын ясаганда стандартта ка-



369 нчы рәсем



370 нче рәсем

ралган төрле шартлардан файдаланалар. Аерым алганда, детальдәге сыр юка тоташ сызык белән, ә үзәк һәм күчәр сырлар — штрихпунктирлы сызык белән шартлы рәвештә сурәтлиләр. Бу шартлы сурәтләүләр болт сызымында кулланылган (370 нче рәсем).

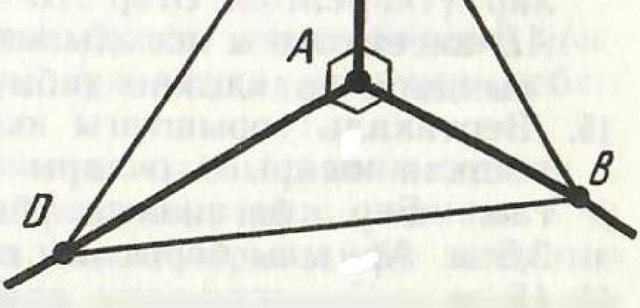
КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Пространстводагы нинди турылар перпендикуляр турылар дип атала?
2. Перпендикуляр турыларга тиндәшле рәвештә параллель булган кисешүче турыларның үзләре дә перпендикуляр икәнен исбатлагыз.
3. Туры белән яссылыкның перпендикулярлыгына билгеләмә бирегез.
4. Туры һәм яссылыкның перпендикулярлык билгесен исбатлагыз.
5. Әгәр яссылык ике параллель турының берсенә перпендикуляр икән, икенчесенә дә перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

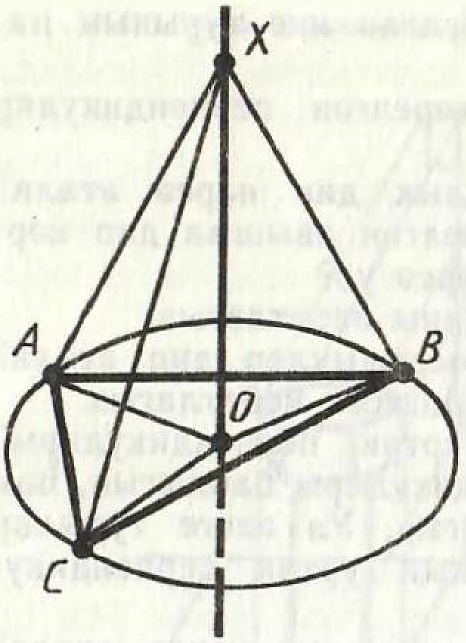
6. Бер үк яссылыкка перпендикуляр булган ике турының параллель икәнлеген исбатлагыз.
7. Бирелгән ноктадан яссылыкка төшерелгән перпендикуляр нәрсә ул?
8. Ноктадан яссылыкка кадәрге ераклык дип нәрсә атала?
9. Бирелгән ноктадан яссылыкка үткәрелгән авышма дип нәрсә атала? Авышманың проекциясе нәрсә ул?
10. Өч перпендикуляр турындагы теореманы исбатлагыз.
11. Нинди яссылыклар перпендикуляр яссылыклар дип атала?
12. Яссылыкларның перпендикулярлык билгесен исбатлагыз.
13. Нәрсә ул чалышма турыларның уртак перпендикуляры?
14. Чалышма турыларның уртак перпендикуляры барлыгын, һәм бары тик бер генә икәнен исбатлагыз. Ул әлеге турылар аша үтүче параллель яссылыкларның уртак перпендикуляры булып тора.
15. Чалышма турылар арасындагы ераклык дип нәрсә атала?

Мәсьәләләр

1. Пространстводагы турының теләсә кайсы ноктасы аша аңа перпендикуляр туры үткәрергә мөмкин икәнен исбатлагыз.
2. Пространствода турының теләсә кайсы ноктасы аша аңа перпендикуляр итеп ике туры үткәреп булганын исбатлагыз.
3. AB, AC һәм AD турылары пар-пар перпендикуляр (371 нче рәсем). Әгәр: 1) $AB=3$ см, $BC=7$ см, $AD=1{,}5$ см; 2) $BD=9$ см, $BC=16$ см, $AD=5$ см; 3) $AB=b$, $BC=a$, $AD=d$; 4) $BD=c$, $BC=a$, $AD=d$ булса, CD кисемтәсен табыгыз.
4*. $ABCD$ дүртпочмагының һәм $A_1B_1C_1D_1$ турыпочмаклыгының яклары тиңдәшле рәвештә параллель. $ABCD$ ның турыпочмаклык икәнен исбатлагыз.
5. Бирелгән яссылыкта ятмаган нокта аша, аңа перпендикуляр итеп, бердән артык туры үткәреп булмаганын исбатлагыз.
6. Өчпочмакны камаучы әйләнәнең үзәгеннән, өчпочмак



371 нче рәсем



372 нче рәсем

яссылыгына перпендикуляр итеп, туры үткәрелгән. Бу турының теләсә кайсы ноктасы өчпочмак түбәләреннән тигез ераклыкта ятканын исбатлагыз (372 нче рәсем).

7. *ABCD* турыпочмаклыгының *A* түбәсеннән аның яссылыгына торгызылган *AK* перпендикулярының очы *K* дан башка түбәләр 6 м, 7 м һәм 9 м ераклыкта яталар. *AK* перпендикулярының озынлыгын табыгыз.

8. *C* почмагы туры булган, турыпочмаклы *ABC* өчпочмагының кысынкы почмагы түбәсе аша аның яссылыгына перпендикуляр *AD* турысы үткәрелгән. Әгәр $AC = a$, $BC = b$, $AD = c$ булса, *D* ноктасыннан *B* һәм *C* түбәләренә кадәр ераклыкларны табыгыз.

9. Турының бирелгән ноктасы аша аңа перпендикуляр итеп бер һәм тик бер генә яссылык үткәреп булганын исбатлагыз.

10. *A* ноктасы аша *a* турысына перпендикуляр итеп β яссылыгы һәм *b* турысы үткәрелгән. *b* турысының β яссылыгында ятканын исбатлагыз.

11. Яссылыкның бирелгән ноктасы аша аңа перпендикуляр итеп бер һәм тик бер генә туры үткәреп булганын исбатлагыз.

12. Теләсә нинди бирелгән *A* ноктасы аша, бирелгән α яссылыгына перпендикуляр туры үткәреп булганын исбатлагыз.

13. *ABCD* квадратының түбәсе аша аның яссылыгына перпендикуляр *BM* турысы үткәрелгән: 1) *AD* турысының *AB* һәм *BM* турылары яссылыгына; 2) *CD* турысының *BC* һәм *BM* турылары яссылыгына перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

14. *A* һәм *B* ноктлары аша α яссылыгына перпендикуляр итеп аны тиңдәшле *C* һәм *D* нокталарында кисүче турылар үткәрелгән. Әгәр $AC = 3$ м, $BD = 2$ м, $CD = 2,4$ м һәм *AB* кисемтәсе α яссылыгын кисмәсә *A* һәм *B* нокталары арасындагы ераклыкны табыгыз.

15. Вертикаль торыштагы ике баганаың 3,4 м ераклыкта урнашкан югарыгы очлары аркылы борыс белән тоташтырылган. Бер баганаың биеклеге 5,8 м, ә икенчесенеке 3,9 м. Аркылы борысның озынлыгын табыгыз.

16. 15 м озынлыгындагы телефон чыбыгының очлары җирдән

8 м биеклектә баганага һәм 20 м биеклектә йортка беркетелгән. Чыбык салынып төшмәгән дип карап, йорт белән багана арасындагы ераклыкны табыгыз.

17. A ноктасы яклары a булган тигезьяклы өчпочмак түбәләреннән a ераклыгында ята. A ноктасыннан өчпочмак яссылыгына кадәрге ераклыкны табыгыз.

18. α яссылыгыннан тышта яткан S ноктасыннан тигез озынлыкта өч авышма: SA, SB, SC һәм SO перпендикуляры үткәрелгән. O ноктасы ABC өчпочмагын камаучы әйләнәнең үзәге икәнен исбатлагыз.

19. Тигезьяклы өчпочмакның яклары 3 м га тигез. Әгәр нокта өчпочмак түбәләренең һәркайсыннан 2 м ераклыкта ятса, ул ноктадан өчпочмак яссылыгына кадәрге ераклыкны табыгыз.

20*. Тигезьянлы өчпочмакта нигезе һәм биеклеге 4 см га тигез. Бирелгән нокта өчпочмак яссылыгыннан 6 м ераклыкта, ә аның түбәләреннән тигез ераклыкта ята. Бу ераклыкны табыгыз.

21. A ноктасыннан квадратның түбәләренә кадәр ераклыклар a га тигез. Әгәр квадратның ягы b га тигез булса, A ноктасыннан квадрат яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

22. Бирелгән ноктадан яссылыкка төшерелгән бирелгән озынлыктагы авышма нигезләренең геометрик урынын табыгыз.

23. Ноктадан яссылыкка 10 см һәм 17 см озынлыктагы ике авышма үткәрелгән. Бу авышмаларның проекцияләре аермасы 9 см. Авышмаларның проекцияләрен табыгыз.

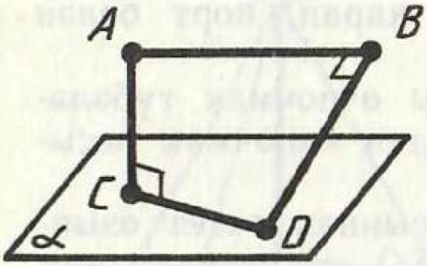
24. Ноктадан яссылыкка ике авышма үткәрелгән. Әгәр: 1) аларның берсе икенчесеннән 26 см га зуррак, ә авышмаларның проекцияләре 12 см һәм 40 см га тигез булса; 2) авышмалар 1 : 2 чагыштырмасында, ә авышмаларның проекцияләре 1 см һәм 7 см га тигез булса, авышмаларның озынлыкларын табыгыз.

25. Ноктадан яссылыкка 23 см һәм 33 см озынлыгындагы ике авышма үткәрелгән. Әгәр авышмаларның проекцияләре 2 : 3 чагыштырмасында булса, бу ноктадан яссылыкка кадәрге ераклыкны табыгыз.

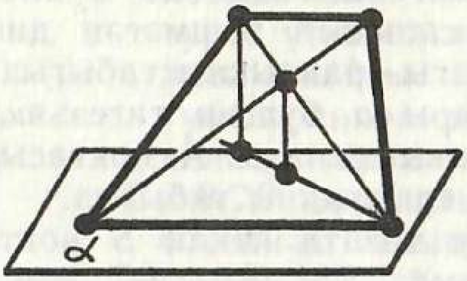
26. Әгәр туры яссылыкка параллель булса, аның барлык нокталары да яссылыктан бер үк ераклыкта ятканын исбатлагыз.

27. Турыпочмаклы ABC өчпочмагының туры почмак түбәсе C аша, аның гипотенузасына параллель итеп, аннан 1 м ераклыкта яссылык үткәрелгән. Катетларның бу яссылыкка проекцияләре 3 м һәм 5 м га тигез. Гипотенузаны табыгыз.

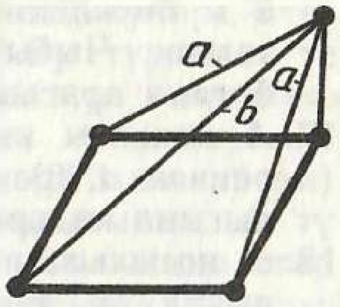
28. Ромбның бер ягы аша каршы яткан яктан 4 м ераклыкта яссылык үткәрелгән. Диагональләренең бу яссылыкка про-



373 нче рәсем



374 нче рәсем



375 нче рәсем

екцияләре 8 м га һәм 2 м га тигез. Якларның проекцияләрен табыгыз.

29. Яссылыкка параллель AB кисемтәсенең очларыннан AC перпендикуляры һәм, AB кисемтәсенә перпендикуляр итеп, BD авышмасы үткәрелгән (373 нче рәсем). $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$ булса, CD ераклыгы күпмегә тигез?

30. Яссылыкның барлык нокталарының параллель яссылыкка кадәрге ераклыклары тигез икәнен исбатлагыз.

31. Ике параллель яссылык арасындагы ераклык a га тигез. b озынлыгындагы кисемтә үзенең очлары белән бу яссылыкларга терәлә. Кисемтәнең һәр яссылыкка проекциясен табыгыз.

32. a һәм b озынлыгындагы ике кисемтә очлары белән ике параллель яссылыкка терәлә. Беренче кисемтәнең (a озынлыгындагысының) яссылыкка проекциясе c га тигез. Икенче кисемтәнең проекциясен табыгыз.

33. Яссылыкны кисмәүче кисемтәнең очлары аннан 0,3 м һәм 0,5 м ераклыкта яталар. Кисемтәне 3 : 7 чагыштырмасында бүлүче нокта яссылыктан нинди ераклыкта ята?

34. Кисемтәнең уртасы аша яссылык үткәрелгән. Кисемтәнең очлары бу яссылыктан бер үк ераклыкта ятканын исбатлагыз.

35. Параллелограмм диагонале аша яссылык үткәрелгән. Икенче диагональнең очлары яссылыктан бер үк ераклыкта ятканын исбатлагыз.

36. Әгәр A һәм B нокталарыннан яссылыкка кадәр ераклыклар 1) 3,2 см һәм 5,3 см; 2) 7,4 см һәм 6,1 см; 3) a һәм b булса, яссылык белән кисешмәүче AB кисемтәсенең уртасыннан яссылыкка кадәрге ераклыкны табыгыз.

37*. Алдагы мәсьәләне AB кисемтәсе яссылыкны кисә дип карап чишегез.

38. 1 м озынлыктагы кисемтә яссылыкны кисә, аның очлары яссылыктан 0,5 м һәм 0,3 м ераклыкта ята. Кисемтәнең яссылыкка проекциясенең озынлыгын табыгыз.

39*. Трапециянең бер нигезе аша икенче нигезеннән a ераклыгында яссылык үткәрелгән. Трапециянең нигезләре $m : n$ чагыштырмасында булса, трапециянең диагональлә-

ре кисешү ноктасыннан яссылыкка кадәрге ераклыкны табыгыз (374 нче рәсем).

40. Параллелограммның ягы аша каршы яткан ягыннан a ераклыгында яссылык үткәрелгән. Параллелограммның диагональләре кисешү ноктасыннан бу яссылыкка кадәрге ераклыкны табыгыз.

41. Квадрат түбәсеннән аның яссылыгына перпендикуляр торгызылган. Бу перпендикулярның очыннан квадратның башка түбәләренә кадәрге ераклыклар a һәм b га тигез ($a < b$). Перпендикулярның озынлыгын һәм квадратның ягын табыгыз (375 нче рәсем).

42. Турыпочмаклыкның түбәсеннән аның яссылыгына перпендикуляр торгызылган. Бу перпендикулярның очыннан башка түбәләргә кадәрге ераклыклар a, b, c га ($a < c$; $b < c$) тигез. Перпендикулярның озынлыгын һәм турыпочмаклыкның якларын табыгыз.

43. Бирелгән ноктадан яссылыкка һәркайсы 2 м озынлыктагы ике авышма үткәрелгән. Әгәр авышмалар 60° лы почмак төзеп, аларның проекцияләре перпендикуляр булса, ноктадан яссылыкка кадәрге ераклыкны табыгыз.

44. Яссылыктан 1 м ераклыктагы ноктадан ике тигез авышма үткәрелгән. Әгәр авышмалар перпендикуляр булып, яссылыкка перпендикуляр белән 60° лы почмак ясасалар, авышмаларның нигезләре арасындагы ераклыкны табыгыз.

45. Өчпочмакка камаулы әйләнәнең үзәге аша өчпочмак яссылыгына перпендикуляр итеп туры үткәрелгән. Бу турының һәр ноктасы өчпочмак якларыннан тигез ераклыкта ятканын исбатлагыз.

46. Өчпочмакка камаулы 0,7 м радиуслы әйләнә үзәгеннән өчпочмак яссылыгына 2,4 м озынлыктагы перпендикуляр торгызылган. Бу перпендикулярның очыннан өчпочмак якларына кадәрге ераклыкны табыгыз.

47. Бирелгән ноктадан өчпочмак яссылыгына кадәрге ераклык 1,1 м га тигез, ә аның һәр ягына кадәрге ераклык 6,1 м га тигез. Бу өчпочмакка камаулы әйләнәнең радиусын табыгыз.

48. Тигезьяклы ABC өчпочмагы яссылыгына аның түбәсеннән AD перпендикуляры торгызылган. Әгәр $AD = 13$ см, $BC = 6$ см булса, D ноктасыннан BC ягына кадәрге ераклыкны табыгыз.

49. b озынлыгындагы AB кисемтәсенең A очы аша, AB га перпендикуляр итеп, яссылык үткәрелгән, һәм бу яссылыкта туры үткәрелгән. Әгәр A очыннан турыга кадәрге ераклык a га тигез булса, B очыннан турыга кадәрге ераклыкны табыгыз.

50. A ноктасыннан квадратның барлык якларына кадәрге ераклыклар a га тигез. Әгәр квадратның диагонале d га

тигез булса, A ноктасыннан квадрат яссылыгына кадәрге ераклыкны табыгыз.

51*. Бирелгән туры почмак яссылыгыннан тышта алынган M ноктасы почмак түбәсеннән a ераклыгында, ә аның якларыннан b ераклыгында ята. M ноктасыннан почмак яссылыгына кадәрге ераклыкны табыгыз.

52*. Нигезе 6 м һәм ян ягы 5 м булган тигезьянлы өчпочмак бирелгән. Өчпочмакка камаулы әйләнә үзәгеннән өчпочмак яссылыгына 2 м озынлыктагы перпендикуляр торгызылган. Бу перпендикулярның очыннан өчпочмак якларына кадәр ераклыкны табыгыз.

53. ABC өчпочмагының туры почмак түбәсе C аша аның яссылыгына CD перпендикуляры торгызылган. Әгәр $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ булса, D ноктасыннан гипотенузага кадәрге ераклыкны табыгыз.

54. a турысы һәм α яссылыгы бирелгән. a турысы аша α яссылыгына перпендикуляр итеп яссылык үткәрегез.

55. a турысы һәм α яссылыгы бирелгән. a турысын кисүче һәм α яссылыгына перпендикуляр барлык турыларның α яссылыгына перпендикуляр булган бер яссылыкта ятканын исбатлагыз.

56. Тигезьяклы ABC өчпочмагының A һәм B түбәләреннән өчпочмак яссылыгына AA_1 һәм BB_1 перпендикулярлары торгызылган. Әгәр $AB = 2$ м, $CA_1 = 3$ м, $CB_1 = 7$ м һәм A_1B_1 кисемтәсе өчпочмак яссылыгын кисмәсә, C түбәсеннән A_1B_1 кисемтәсенең уртасына кадәрге ераклыкны табыгыз.

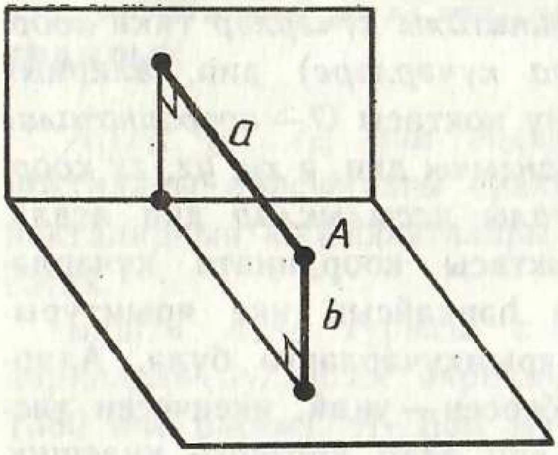
57. Турыпочмаклы ABC өчпочмагының кысынкы почмак түбәләре A һәм B дан өчпочмак яссылыгына AA_1 һәм BB_1 перпендикулярлары торгызылган. Әгәр $A_1C = 4$ м, $A_1A = 3$ м, $B_1C = 6$ м, $B_1B = 2$ м һәм A_1B_1 кисемтәсе өчпочмак яссылыгын кисмәсә, C түбәсеннән A_1B_1 кисемтәсенең уртасына кадәрге ераклыкны табыгыз.

58*. Әгәр ике перпендикуляр яссылыкның берсендә яткан туры, аларның кисешү сызыгына перпендикуляр булса, аның икенче яссылыкка да перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

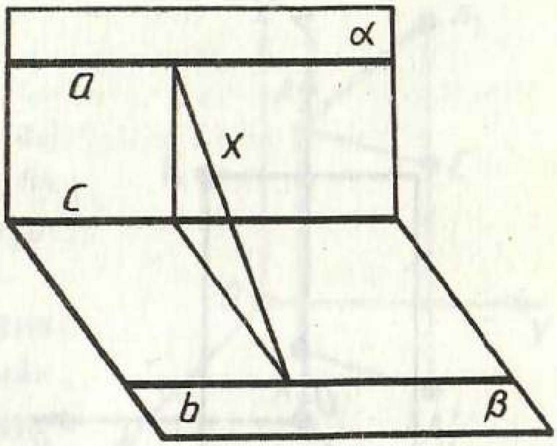
59. Ике перпендикуляр яссылыкта яткан A һәм B нокталарыннан яссылыкларның кисешү сызыгына AC һәм BD перпендикулярлары төшерелгән. Әгәр: 1) $AC = 6$ м, $BD = 7$ м, $CD = 6$ м; 2) $AC = 3$ м, $BD = 4$ м, $CD = 12$ м; 3) $AD = 4$ м, $BC = 7$ м, $CD = 1$ м; 4) $AD = BC = 5$ м, $CD = 1$ м; 5) $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$, 6) $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$ булса, AB кисемтәсенең озынлыгын табыгыз.

60. Нокта ике перпендикуляр яссылыктан a һәм b ераклыгында ята. Ноктадан яссылыкларның кисешү турысына кадәрге ераклыкны табыгыз (376 нчы рәсем).

61. α һәм β яссылыклары перпендикулярлар. α яссылыгында



376 нчы рәсем



377 нче рәсем

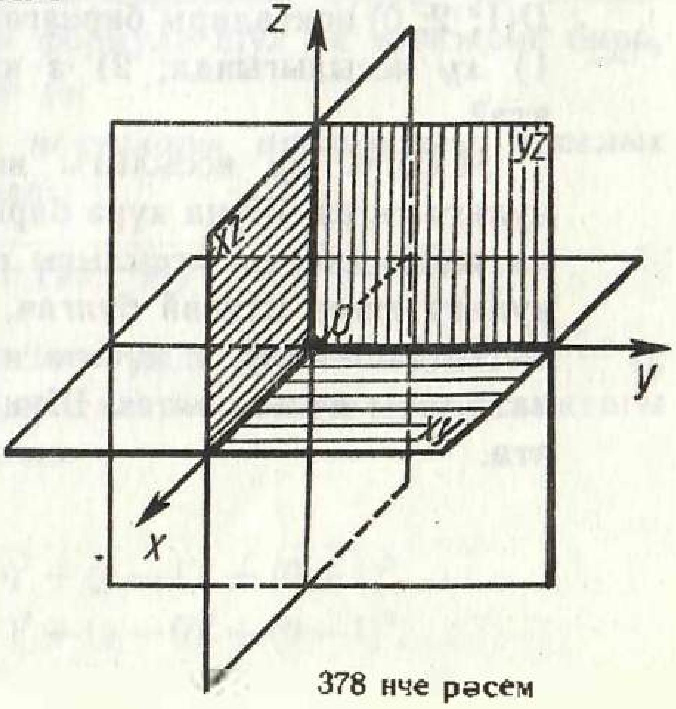
яссылыкларның кисешү сызыгы c дан 0,5 м ераклыкта A ноктасы алынган. β яссылыгында c турысына параллель һәм аннан 1,2 м ераклыкта b турысы үткәрелгән. A ноктасыннан b турысына кадәрге ераклыкны табыгыз.

62. α һәм β перпендикуляр яссылыклары c турысы буенча кисешәләр. α яссылыгында $a \parallel c$ итеп a турысы, β яссылыгында $b \parallel c$ итеп b турысы үткәрелгән. Әгәр a һәм c турылары арасындагы ераклык 1,5 м га, ә b һәм c турылары арасындагы ераклык 0,8 м га тигез булса, a һәм b турылары арасындагы ераклыкны табыгыз (377 нче рәсем).

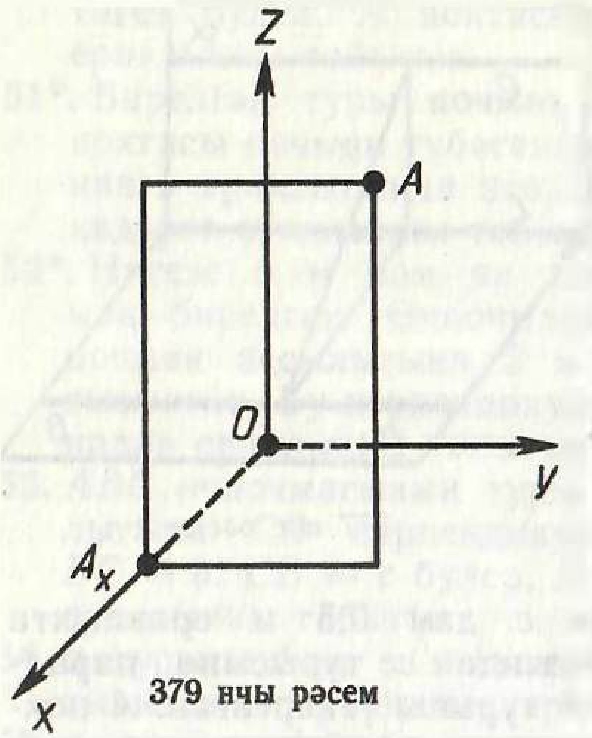
§ 18. ПРОСТРАНСТВОДА ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРЫ ҺӘМ ВЕКТОРЛАР

152. ПРОСТРАНСТВОДА ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРЫ КЕРТҮ

Бер үк O ноктасында кисешүче үзара перпендикуляр x, y, z турылары алыйк (378 нче рәсем). Бу турыларның һәр пары аша яссылык үткәрик. x һәм y турылары аша үтүче яссылык xy яссылыгы дип атала. Калган ике яссылык тиндәшле рәвештә xz һәм yz яссылыклары дип атала. x, y, z турылары —



378 нче рәсем



379 нчы рәсем

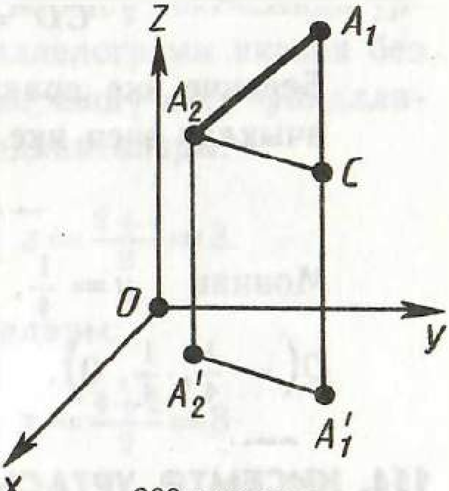
координаталы күчәрләр (яки *координата күчәрләре*) дип, аларның кисешү ноктасы *O* — *координаталар башлангычы* дип, ә *xy*, *yz*, *zx* *координаталы яссылыклар* дип атала. *O* ноктасы координата күчәрләренең һәркайсын ике ярымтурыга — ярымкүчәрләргә бүлә. Аларның берсен — уңай, икенчесен тискәре дип атап йөртергә килешик.

Хәзер ирекле рәвештә *A* ноктасы алыйк та аның аша *yz* яссылыгына параллель яссылык үткәрик (379 нчы рәсем). Ул *x* күчәрен ниндидер A_x ноктасында кисеп үтәр. Абсолют зурлыгы буенча OA_x кисемтәсенең озынлыгына тигез булган санны *A* ноктасының *x координатасы* дип атарбыз: A_x ноктасы уңай *x* ярымкүчәрендә ятса — уңай, тискәре *x* ярымкүчәрендә ятса — тискәре булыр. A_x ноктасы *O* ноктасы белән тәңгәл килсә, $x=0$ дип алырбыз. *A* ноктасының *y* һәм *z* координаталары шуңа аналогик рәвештә билгеләнәләр. Нокталың координаталарын ноктаның хәрефле тамгасы белән рәттән җәяләр эченә язарбыз: $A(x, y, z)$. Кайвакыт ноктаны аның координаталары белән генә $(x; y; z)$ дип тә тамгаларбыз.

Мәсьәлә (2). $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 2)$, $C(0; 0; 3)$; $D(1; 2; 0)$ нокталары бирелгән. Бу нокталарның кайсылары: 1) *xy* яссылыгында; 2) *z* күчәрендә; 3) *yz* яссылыгында ята?

Чишү. *xy* яссылыгы нокталарының *z* координатасы нульгә тигез. Шуңа күрә бары тик *D* ноктасы гына *xy* яссылыгында ята. *yz* яссылыгы нокталарының *x* координатасы нульгә тигез. Шулай булгач, *B* һәм *C* нокталары *yz* яссылыгында яталар. *z* күчәре нокталарының *x* һәм *y* координаталары нульгә тигез. Шуңа күрә *C* ноктасы *z* күчәрендә ята.

153. НОКТАЛАР АРАСЫНДАГЫ ЕРАКЛЫК



380 нче рәсем

$A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ һәм $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нокталары арасындагы ераклыкны бу нокталарның координаталары аша күрсәтик.

Башта A_1A_2 турысы z күчәренә параллель булмаган очракны карыйк (380 нче рәсем). A_1 һәм A_2 нокталары аша z күчәренә параллель турылар үткәрик. Алар xy яссылыгын A_1' һәм A_2' нокталарында кисеп үтәр. Бу нокталарның x һәм y координаталары A_1 һәм A_2 нокталарыныкы кебек үк булыр, ә z координатасы нульгә тигез. Хәзер A_2 ноктасы аша xy яссылыгына параллель яссылык үткәрик. Ул A_1A_1' турысын иңдидер C ноктасында кисеп үтәр. Пифагор теоремасы буенча

$$A_1A_2^2 = A_1C^2 + CA_2^2.$$

CA_2 һәм $A_1'A_2'$ кисемтәләре тигез, ә

$$A_1'A_2' = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

A_1C кисемтәсенең озынлыгы $|z_1 - z_2|$ на тигез. Шуңа күрә

$$A_1A_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Әгәр A_1A_2 кисемтәсе z күчәренә параллель булса, ул вакытта $A_1A_2 = |z_1 - z_2|$. Табылган формула шул ук нәтиҗәне бирә, чөнки бу очракта $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Шулай итеп, ***A_1 һәм A_2 нокталары арасындагы ераклык өчен түбәндәге формула табыла:***

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Мәсьәлә (5). xy яссылыгында бирелгән $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ -1;\ 0)$ нокталарыннан тигез ераклыктагы $D(x;\ y;\ 0)$ ноктасын табыгыз.

Чишү. Табабыз:

$$AD^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (0 + 1)^2,$$
$$BD^2 = (x + 1)^2 + (y - 0)^2 + (0 - 1)^2,$$

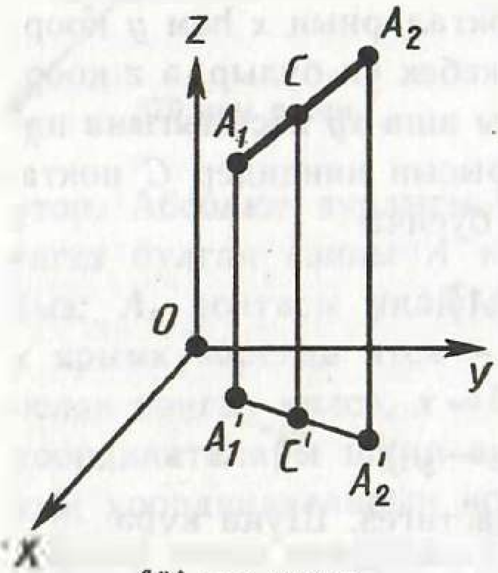
$$CD^2=(x-0)^2+(y+1)^2+(0-0)^2.$$

Беренче ике ераклыкны өченчесенә тигезләп, x һәм y ны ачыклау өчен ике тигезләмә табабыз:

$$-4y+1=0,\ 2x-2y+1=0.$$

Моннан $y=\frac{1}{4}$, $x=-\frac{1}{4}$. Эзләнелә торган нокта $D\left(-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ 0\right)$.

154. КИСЕМТӘ УРТАСЫНЫҢ КООРДИНАТАЛАРЫ



381 нче рәсем

$A_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ һәм $A_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ ирекле рәвештә алынган ике нокта булсын. A_1A_2 кисемтәсенең уртасын — C ноктасының координаталары x, y, z не — аның A_1 һәм A_2 очларының координаталары аша күрсәтик (381 нче рәсем). Моның өчен A_1, A_2 һәм C ноктaлары аша z күчәренә параллель турылар үткәрәбез. Алар xy яссылыгын $A_1'(x_1,\ y_1,\ 0)$, $A_2'(x_2,\ y_2,\ 0)$ һәм $C'(x,\ y,\ 0)$ нокталарында кисеп үтәләр. Фалес теоремасы буенча C' ноктасы $A_1'A_2'$ кисемтәсенең уртасы була. Ә без беләбез: xy яссылыгында кисемтә уртасының координаталары аның очларының координаталары аша

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

формулалары белән аңлатыла, z өчен аңлатма тапканда, xy яссылыгы урынына xz яки yz яссылыгын алу җитә. Бу вакытта z өчен аналогик формула табыла:

$$z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Мәсьәлә (9). Түбәләре $A\,(1,\ 3,\ 2)$, $B\,(0,\ 2,\ 4)$, $C\,(1,\ 1,\ 4)$, $D\,(2,\ 2,\ 2)$ нокталарында яткан $ABCD$ дүртпочмагының параллелограмм икәнен исбатлагыз.

Чишү. Диагональләре кисешеп, кисешү ноктасында урталай бүленгән дүртпочмакның параллелограмм икәнен без беләбез инде. Моны шушы мәсьәләне чишү өчен файдаланыйк. *AC* кисемтәсе уртасының координаталары:

$$x=\frac{1+1}{2}=1,\ y=\frac{3+1}{2}=2,\ z=\frac{2+4}{2}=3.$$

BD кисемтәсе уртасының координаталары:

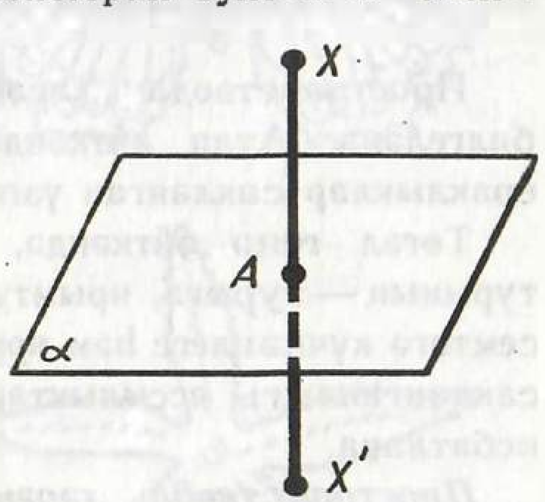
$$x=\frac{0+2}{2}=1,\ y=\frac{2+2}{2}=2,\ z=\frac{4+2}{2}=3.$$

Без *AC* һәм *BD* кисемтәләре урталарының координаталары бертигез икәнен күрәбез. Димәк, бу кисемтәләр кисешәләр һәм кисешү ноктасы белән урталай бүленәләр. Шулай булгач, *ABCD* дүртпочмагы — параллелограмм.

155. ПРОСТРАНСТВОДА СИММЕТРИЯ ҮЗГӘРТҮЕ

Пространствода фигуралар өчен үзгәртү төшенчәсе яссылыктагы кебек үк билгеләнә. Ноктага һәм турыга карата симметрия үзгәртүләре дә яссылыктагы кебек үк билгеләнәләр.

Ноктага һәм турыга карата симметриядән тыш, пространствода яссылыкка карата симметрия үзгәртүе дә карала. Бу үзгәртү түбәндәгечә эшләнә (382 нче рәсем). α — ирекле рәвештә алынган билгеле бер яссылык булсын. Фигураның *X* ноктасыннан α яссылыгына *XA* перпендикуляры төшерәбез һәм аның дәвамында *A* ноктасыннан *XA* га тигез булган *AX'* кисемтәсе салабыз. *X'* ноктасы α яссылыгына карата *X* ноктасына *симметрик* нокта дип, ә *X* ноктасын аңа симметрик булган *X'* ноктасына күчерә торган үзгәртү *α яссылыгына карата симметрия үзгәртүе* дип атала.



382 нче рәсем

Әгәр *X* ноктасы α яссылыгында ятса, *X* ноктасы үзенә күчә дип исәпләнә. Әгәр α яссылыгына карата симметрия үзгәртүе фигураны үзенә күчерсә, фигура *α яссылыгына карата симметрик фигура* дип, ә α яссылыгы *симметрия яссылыгы* дип атала.

Мәсьәлә (17). (1, 2, 3), (0, −1, 2), (1, 0, −3) нокталары бирелгән. Координата яссылыкларына карата бирелгән нокталарга симметрик нокталарны табыгыз.

Чишү. xy яссылыгына карата (1, 2, 3) ноктасына симметрик нокта xy яссылыгына перпендикуляр туры өстендә ята. Шуңа күрә аның x һәм y координаталары шул ук кала: $x=1$, $y=2$. Симметрик нокта xy яссылыгыннан икенче якта шундый ук ераклыкта ята. Шуңа күрә аның z координатасы бары тик тамгасы белән генә аерыла, ягъни $z=-3$. Шулай итеп, (1, 2, −3) ноктасы xy яссылыгына карата (1, 2, 3) ноктасына симметрик нокта булыр. Башка нокталар һәм калган координата яссылыклары өчен мәсьәлә аналогия буенча чишелә.

156. ТАБИГАТЬТӘ ҺӘМ ТОРМЫШТА СИММЕТРИЯ

Симметрия табигатьтә киң таралган. Аны үсемлекләрнең яфраклары һәм чәчәкләре төзелешендә, хайваннарның төрле органнарының урнашуында, кристаллик җисемнәр формасында күзәтергә мөмкин (383 нче рәсем).

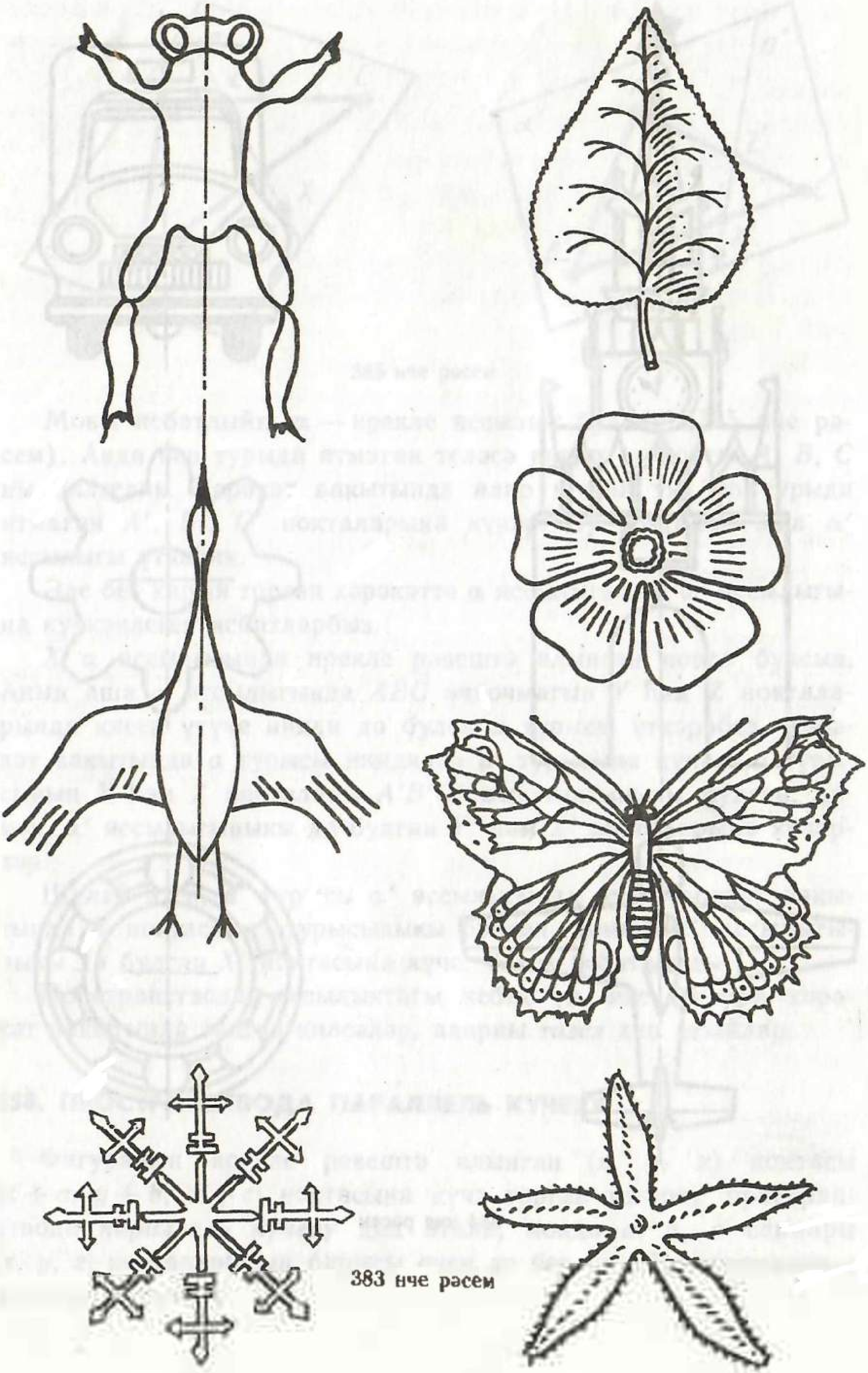
Симметрия тормышта, төзү эшләрендә, техникада да киң файдаланыла (384 нче рәсем).

157. ПРОСТРАНСТВОДА ХӘРӘКӘТ

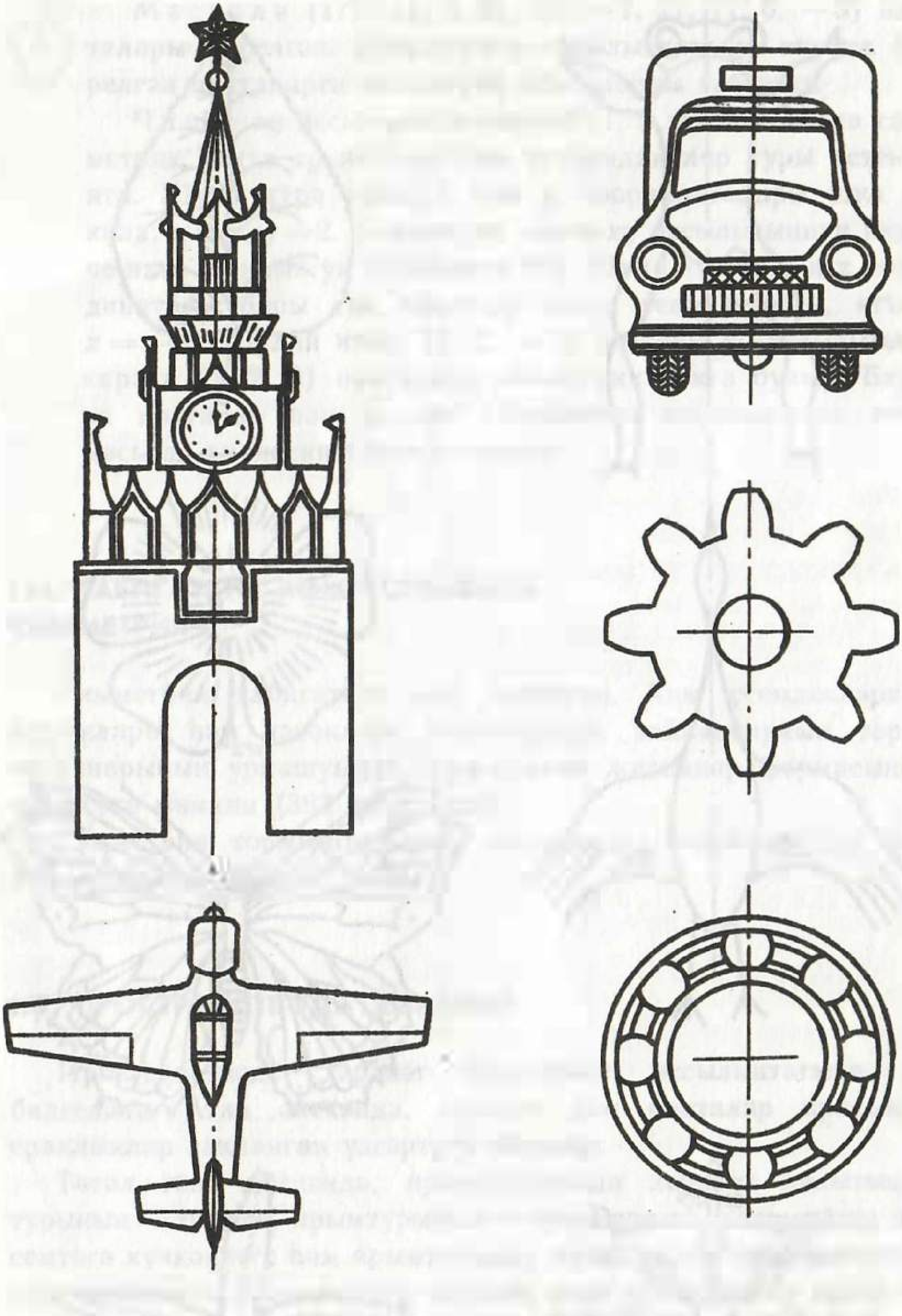
Пространствода хәрәкәт төшенчәсе яссылыктагыча ук билгеләнә. Атап әйткәндә, *хәрәкәт* дип нокталар арасында ераклыклар саклаган үзгәртүгә әйтәләр.

Төгәл генә әйткәндә, пространствода хәрәкәт вакытында турының — турыга, ярымтурының — ярымтурыга, кисемтәнең кисемтәгә күчкәнлеге һәм ярымтурылар арасындагы почмакларның сакланганлыгы яссылыктагы хәрәкәт өчен исбатланган кебек ук исбатлана.

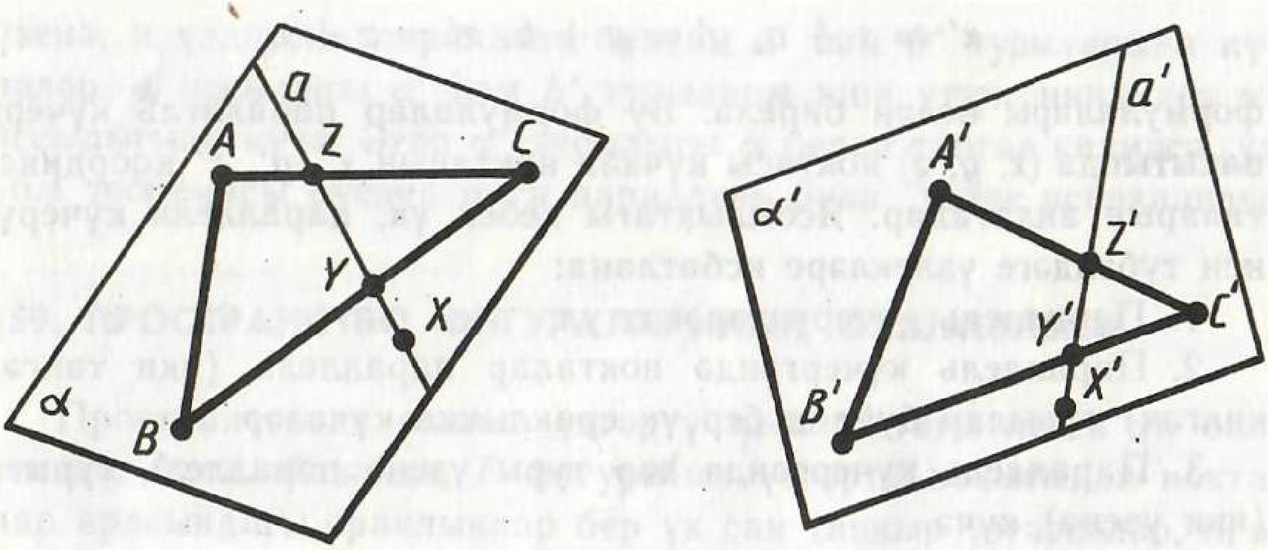
Пространствода хәрәкәт яссылыкны яссылыкка күчерә. Бу — пространствода хәрәкәтнең яңа үзлеге булып тора.



383 нче рәсем



384 нче рәсем



385 нче рәсем

Моны исбатлыйк. α — ирекле яссылык булсын (385 нче рәсем). Анда бер турыда ятмаган теләсә нинди өч нокта: *A*, *B*, *C* ны билгелик. Хәрәкәт вакытында алар шулай ук бер турыда ятмаган *A′*, *B′*, *C′* нокталарына күчәр. Бу нокталар аша α′ яссылыгы үткәрик.

Әле без карый торган хәрәкәттә α яссылыгының α′ яссылыгына күчкәнлеген исбатларбыз.

X α яссылыгында ирекле рәвештә алынган нокта булсын. Аның аша α яссылыгында *ABC* өчпочмагын *Y* һәм *Z* нокталарында кисеп үтүче нинди дә булса *a* турысы үткәрәбез. Хәрәкәт вакытында *a* турысы ниндидер *a′* турысына күчәр. *a* турысының *Y* һәм *Z* нокталары *A′B′C′* өчпочмагыныкы булган, димәк, α′ яссылыгыныкы да булган *Y′* һәм *Z′* нокталарына күчәрләр.

Шулай итеп, *a′* турысы α′ яссылыгында ята. Хәрәкәт вакытында *X* ноктасы *a′* турысыныкы булган, димәк, α′ яссылыгыныкы да булган *X′* ноктасына күчә. Үзлек исбатланды.

Пространствода, яссылыктагы кебек үк, ике фигура хәрәкәт вакытында тәңгәл килсәләр, аларны *тигез* дип атыйлар.

158. ПРОСТРАНСТВОДА ПАРАЛЛЕЛЬ КҮЧЕРҮ

Фигураның ирекле рәвештә алынган (x, y, z) ноктасы $(x+a, y+b, z+c)$ ноктасына күчә торган үзгәртү пространствода *параллель күчерү* дип атала, монда a, b, c саннары (x, y, z) нокталарының барысы өчен дә бер үк. Пространствода параллель күчерү

$$x' = x + a,\ y' = y + b,\ z' = z + c$$

формулалары белән бирелә. Бу формулалар параллель күчерү вакытында (x, y, z) ноктасы күчкән ноктаның x', y', z' координаталарын аңлаталар. Яссылыктагы кебек үк, параллель күчерүнең түбәндәге үзлекләре исбатлана:

1. Параллель күчерү хәрәкәт ул.

2. Параллель күчергәндә нокталар параллель (яки тәңгәл килгән) турылар буйлап бер үк ераклыкка күчәләр.

3. Параллель күчергәндә һәр туры үзенә параллель турыга (яки үзенә) күчә.

4. A һәм A' нокталары нинди генә булмасын, A ноктасы A' ноктасына күчә торган параллель күчерү бар һәм бу күчерү бердәнбер.

Мәсьәлә (23). Параллель күчергәндә $A(1, 0, 2)$ ноктасы $A(2, 1, 0)$ ноктасына күчсә, $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$ параллель күчерү формулаларыннан a, b, c ның кыйммәтләрен табыгыз.

Чишү. Параллель күчерү формулаларына A һәм A' нокталарының координаталарын, ягъни $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$, $x' = 2$, $y' = 1$, $z' = 0$ не куйсак, a, b, c ны табу өчен тигезләмәләр килеп чыгар:

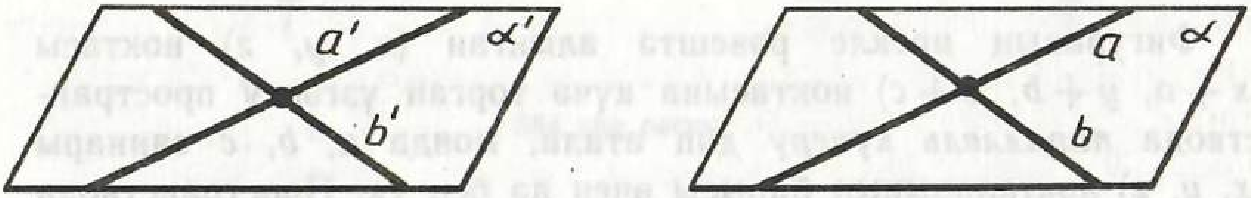
$$2 = 1 + a,\ 1 = 0 + b,\ 0 = 2 + c.$$

Моннан $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$.

Пространствода параллель күчерү өчен түбәндәге үзлек яңа булып тора:

5. ***Пространствода параллель күчергәндә һәр яссылык я үзенә, я параллель яссылыкка күчә.***

Чыннан да, α — ирекле рәвештә алынган яссылык булсын (386 нчы рәсем). Бу яссылыкта кисешүче a һәм b турылары үткәрик. Параллель күчергәндә a һәм b турыларының һәркайсы я



386 нчы рәсем

үзенә, яң үзләренә параллель булган a' һәм b' турыларына күчәләр. α яссылыгы a' һәм b' турылары аша үтүче нинди дер α' яссылыгына күчә. Әгәр α' яссылыгы α белән тәңгәл килмәсә, ул 16.4 теоремасы буенча α га параллель була. Үзлек исбатланды.

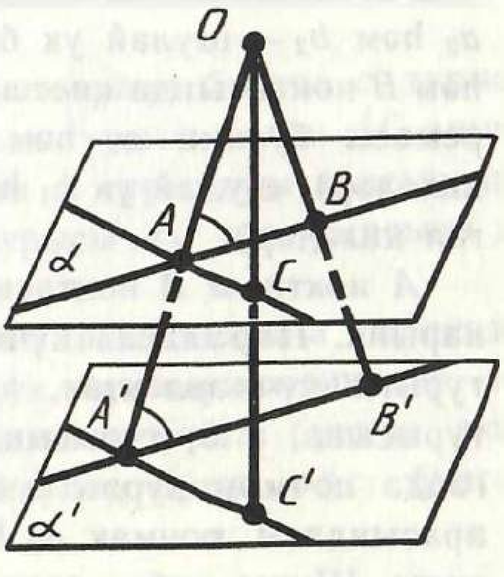
159. ПРОСТРАНСТВО ФИГУРАЛАРЫНЫҢ ОХШАШЛЫГЫ

Пространствода охшаш үзгәртү яссылыктагы кебек үк билгеләнә. Атап әйткәндә, F фигурасын үзгәртү вакытында нокталар арасындагы ераклыклар бер үк сан тапкыр үзгәрсәләр, ягъни F фигурасының теләсә нинди X һәм Y нокталары һәм бу фигура күчә торган F' фигурасының X' һәм Y' нокталары өчен $X'Y' = k \cdot XY$ үтәлсә, ул *охшаш үзгәртү* дип атала.

Яссылыктагы кебек үк, пространствода охшаш үзгәртү турыны — турыга, ярымтурыны — ярымтурыга, кисемтәне кисемтәгә күчерә һәм ярымтурылар арасындагы почмаклар саклана. 157 нче пункттагы кебек үк фикерләүләр ярдәмендә охшаш үзгәртү яссылыкны яссылыкка күчергәнлеге исбатлана. Яссылыктагы кебек үк, фигуралар охшаш үзгәртү ярдәмендә берсе икенчесенә күчерелсә, алар охшаш фигуралар дип аталалар.

Гомотетия пространствода охшаш үзгәртүләрнең иң гадие булып тора. Яссылыктагы кебек үк, O үзәгенә карата коэффициенты k булган гомотетия — OX нурының теләсә кайсы X ноктасын $OX' = k \cdot OX$ үтәлгән X' ноктасына күчерә торган охшаш үзгәртү ул.

Пространствода гомотетия үзгәртүе гомотетия үзәге аша үтмәүче теләсә нинди яссылыкны параллель яссылыкка (яки $k=1$ булганда үзенә) күчерә.



387 нче рәсем

Чыннан да, O — гомотетия үзәге, α исә O ноктасы аша үтми торган теләсә нинди яссылык булсын (387 нче рәсем). α яссылыгында теләсә нинди AB турысы алабыз. Гомотетия үзгәртүе OA нурындагы A ноктасын — A' ноктасына, OB нурындагы B ноктасын B' ноктасына күчерә, өстәвенә $\frac{OA'}{OA} = k$, $\frac{OB'}{OB} = k$,

монда k — гомотетия коэффициенты. Моннан AOB һәм $A'OB'$ өчпочмакларының охшаш икәнлеге килеп чыга. Ә бу өчпочмаклар охшаш булгач, аларның тиңдәшле OAB һәм $OA'B'$ почмаклары тигез була, димәк, AB һәм $A'B'$ турылары параллель.

Хәзер α яссылыгында икенче бер AC турысын алыйк. Гомотетиядә ул параллель $A'C'$ турысына күчәр. Әле карый торган гомотетиядә α яссылыгы $A'B'$, $A'C'$ турылары аша үтә торган α' яссылыгына күчәр. $AB \parallel A'B'$ һәм $AC \parallel A'C'$ булганлыктан, 16,4 теоремасы буенча α һәм α' яссылыклары параллельләр. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

160. ЧАЛЫШМА ТУРЫЛАР АРАСЫНДАГЫ ПОЧМАК

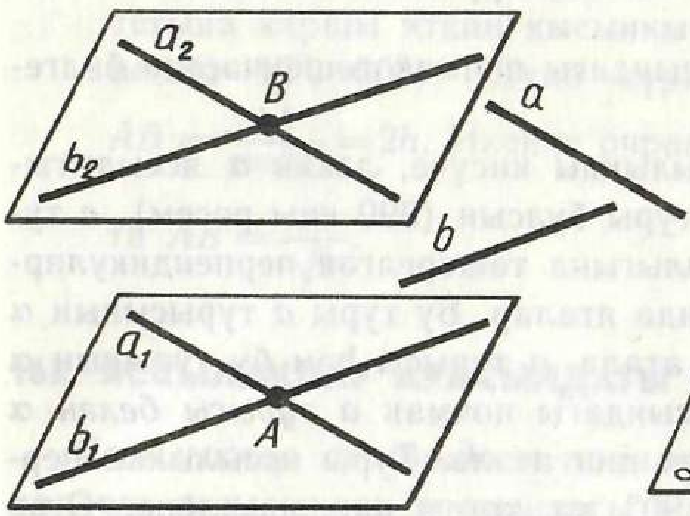
Кисешүче ике туры чиктәш һәм вертикаль почмаклар төзиләр. Вертикаль почмаклар тигез, ә чиктәш почмаклар бер-берсен 180° ка тутыралар. Боларның кечерәгенең почмакча үлчәме *турылар арасындагы почмак* дип атала. Перпендикуляр турылар арасындагы почмак билгеләмә буенча 90° ка тигез. Параллель турылар арасындагы почмак нульгә тигез дип исәпләнә.

Чалышма турыларга параллель итеп үткәрелгән ике кисешүче туры арасындагы почмак *чалышма турылар арасындагы почмак* дип атала.

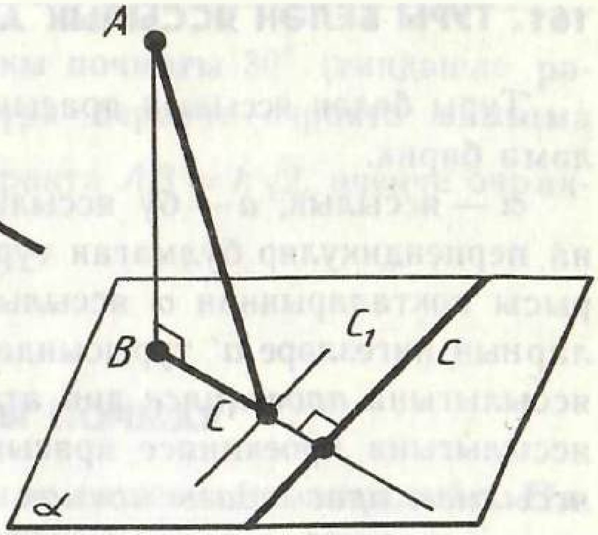
Бу почмак кисешүче турыларның кайсыларын алуга бәйле түгел. Моны исбатлыйк.

a_1 һәм b_1 — бирелгән a, b чалышма турыларына параллель һәм A ноктасында кисешүче турылар булсын (388 нче рәсем). a_2 һәм b_2 — шулай ук бирелгән чалышма турыларга параллель һәм B ноктасында кисешүче икенче бер турылар булсын. 16.2 теоремасы буенча a_1 һәм a_2 турылары параллель (яки тәңгәл киләләр), шулай ук b_1 һәм b_2 турылары да параллель (яки тәңгәл киләләр).

A ноктасы B ноктасына күчә торган параллель күчерү башкарыйк. Параллель күчергәндә һәр туры я үзенә, я параллель турыга күчкәнлектән, әлеге параллель күчерү a_1 турысын a_2 турысына, ә b_1 турысын b_2 турысына күчерә. Параллель күчергәндә почмак зурлыгы сакланганга күрә, a_1 һәм b_1 турылары арасындагы почмак a_2 һәм b_2 турылары арасындагы почмакка тигез. Шуны исбатларга кирәк иде дә.



388 нче рәсем



389 нчы рәсем

Алда бирелгән билгеләмәдән күренгәнчә, туры почмак ясап кисешүче турылар *перпендикуляр турылар* дип атала. Ләкин кайвакыт чалышма турыларны да, алар арасындагы почмак 90° ка тигез булганда, *перпендикуляр турылар* дип атыйлар.

Мәсьәлә (33). Яссылыктагы теләсә нинди туры яссылыкка үткәрелгән авышманың проекциясенә перпендикуляр булса, шул авышманың үзенә дә перпендикуляр, һәм киресенчә: яссылыктагы туры авышмага перпендикуляр булса, ул авышманың проекциясенә дә перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

Чишү. AB турысы α яссылыгына перпендикуляр, AC — авышма, C исә α яссылыгындагы BC га перпендикуляр туры булсын (389 нчы рәсем). Авышманың нигезе C аша $c \parallel c_1$ турысы үткәрәбез.

Өч перпендикуляр турындагы теорема буенча c_1 турысы AC авышмасына перпендикуляр. c турысы белән AC авышмасы арасындагы почмак AC һәм c_1 турылары арасындагы почмакка тигез, шуңа күрә c турысы AC авышмасына да перпендикуляр була.

Киресенчә: әгәр c турысы AC авышмасына перпендикуляр булса, c_1 турысы шулай ук аңа перпендикуляр, димәк, өч перпендикуляр турындагы теорема буенча аның проекциясе BC га да перпендикуляр була. $c \parallel c_1$ булгач, $c \perp BC$.

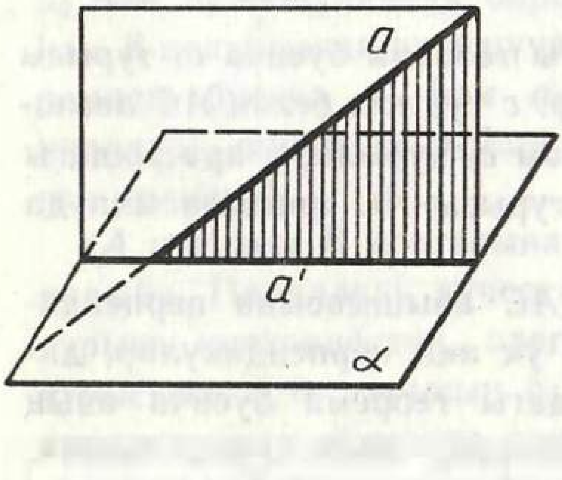
161. ТУРЫ БЕЛӘН ЯССЫЛЫК АРАСЫНДАГЫ ПОЧМАК

Туры белән яссылык арасындагы почмак төшенчәсенә билгеләмә бирик.

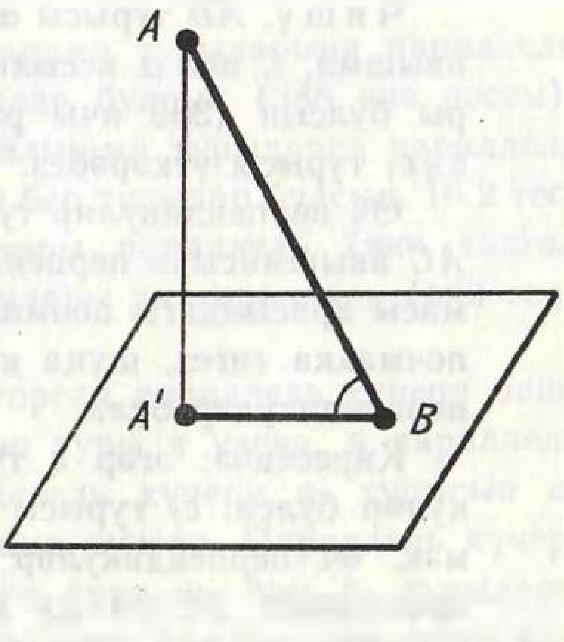
α — яссылык, a — бу яссылыкны кисүче, ләкин α яссылыгына перпендикуляр булмаган туры булсын (390 нчы рәсем). a турысы нокталарыннан α яссылыгына төшерелгән перпендикулярларның нигезләре a' турысында яталар. Бу туры a турысының α яссылыгына *проекциясе* дип атала. a турысы һәм бу турының α яссылыгына проекциясе арасындагы почмак *a турысы белән α яссылыгы арасындагы почмак* дип атала. Туры яссылыкка перпендикуляр булса, почмак 90° ка тигез дип исәпләнә. Әгәр параллель булса, ул вакытта 0°. a турысы, аның α яссылыгына a' проекциясе һәм a турысының α яссылыгы белән кисешү ноктасыннан шул яссылыкка торгызылган перпендикуляр яссылыкта яталар, шуңа күрә *туры белән яссылык арасындагы почмак шул ук туры һәм яссылыкка үткәрелгән перпендикуляр арасындагы почмакны 90° ка тутыра.*

Мәсьәлә (35). A ноктасы яссылыктан h ераклыгында тора. Бу ноктадан яссылыкка 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° лы почмак ясап үткәрелгән авышмаларның озынлыкларын табыгыз.

Чишү. Яссылыкка AA' перпендикуляры төшерәбез (391 нче рәсем). $AA'B$ — A' түбәсе янындагы почмагы туры булган турыпочмаклы өчпочмак. Бу өчпочмакның AA' ка-



390 нчы рәсем



391 нче рәсем

тетына каршы яткан кысынкы почмагы 30° (тиңдәшле рәвештә 45°, 60°). Шуңа күрә беренче очракта авышма $AB=\frac{AA'}{\sin 30^\circ}=2h$. Икенче очракта $AB=h\sqrt{2}$, өченче очракта $AB=\frac{2h}{\sqrt{3}}$.

162. ЯССЫЛЫКЛАР АРАСЫНДАГЫ ПОЧМАК

Яссылыклар арасындагы почмак төшенчәсен ачыклыйк. Параллель яссылыклар арасындагы почмак нульгә тигез дип исәпләнә.

Бирелгән яссылыклар кисешсеннәр дип. Аларның кисешү турысына перпендикуляр итеп, яссылык үткәрик. Ул бирелгән яссылыкларны ике туры буйлап кисеп үтә. Бу турылар арасындагы почмак *бирелгән яссылыклар арасындагы почмак* дип атала (392 нче рәсем).

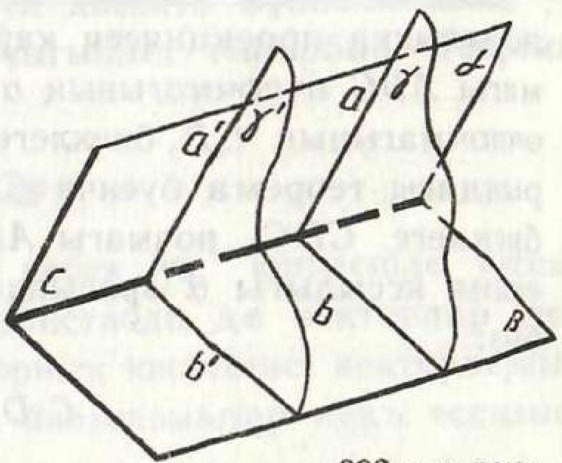
Шул рәвешле табылган почмак кисүче яссылыкны кайда алуга бәйле түгел. Моны исбатлыйк.

α һәм β яссылыклары c турысы буйлап кисешүче яссылыклар булсын. c турысына перпендикуляр итеп, γ яссылыгы үткәрәбез. Ул α һәм β яссылыкларын a һәм b турылары буйлап кисеп үтәр. α һәм β яссылыклары арасындагы почмак a һәм b турылары арасындагы почмакка тигез.

c турысына перпендикуляр икенче бер кисүче γ' яссылыгы алыйк. a' һәм b' — бу яссылыкның α һәм β яссылыклары белән кисешү турылары булсын.

γ яссылыгының c турысы белән кисешү ноктасын γ' яссылыгының c турысы белән кисешү ноктасына күчерә торган параллель күчерүне башкарыйк. Бу вакытта параллель күчерүнең үзлеге буенча a турысы a' турысына, b турысы b' турысына күчә.

Бу a белән b һәм a' белән b' турылары арасындагы почмаклар тигез дигән сүз. Шуны исбатларга кирәк иде дә.



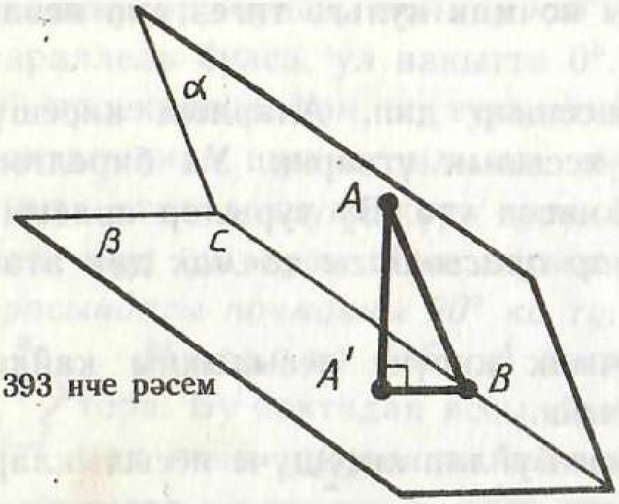
392 нче рәсем

Мәсьәлә (43). Ике яссылык 30° лы почмак ясап кисешәләр. Бу яссылыкларның берсендә яткан A ноктасы икенче яссылыктан a ераклыгында тора. Бу ноктадан яссылыкларның кисешү турысына кадәрге ераклыкны табыгыз.

Чишү. α һәм β — бирелгән яссылыклар һәм A α яссылыгында ятучы нокта булсын (393 нче рәсем). β яссылыгына — AA' перпендикуляры һәм яссылыкларның кисешү турысы c га AB перпендикуляры төшерәбез. Өч перпендикуляр турындагы теорема буенча $A'B \perp c$. ABA' өчпочмагының яссылыгы c турысына перпендикуляр һәм шуңа күрә ABA' турыпочмаклы өчпочмагының B түбәсе янындагы почмагы 30° ка тигез. Моннан язабыз:

$$AB = \frac{AA'}{\sin 30°} = a : \frac{1}{2} = 2a.$$

A ноктасыннан c турысына кадәрге ераклык $2a$ га тигез.



393 нче рәсем

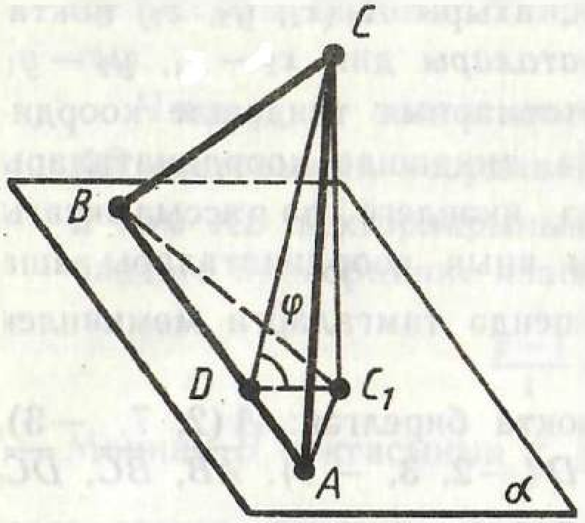
163. КҮППОЧМАКНЫҢ ОРТОГОНАЛЬ ПРОЕКЦИЯСЕНЕҢ МӘЙДАНЫ

Теорема 18.1. ***Күппочмакның яссылыкка ортогональ проекциясенең мәйданы күппочмак мәйданын күппочмак яссылыгы белән проекция яссылыгы арасындагы почмак косинусына тапкырлаганга тигез.***

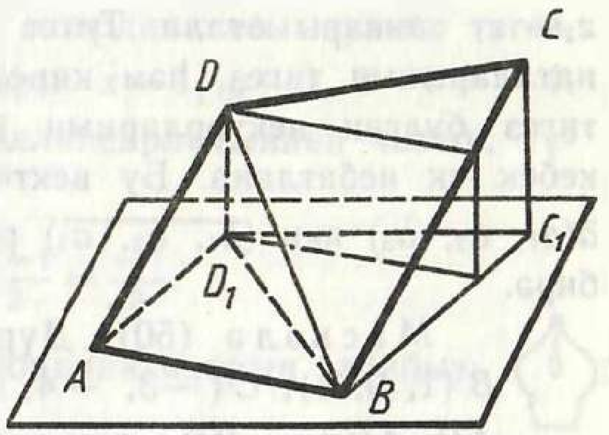
Исбатлау. Башта өчпочмак һәм аның бер ягы аша үтүче яссылыкка проекциясен карыйк (394 нче рәсем). ABC_1 өчпочмагы ABC өчпочмагының α яссылыгына проекциясе була. ABC өчпочмагының CD биеклеген үткәрәбез. Өч перпендикуляр турындагы теорема буенча C_1D кисемтәсе — ABC_1 өчпочмагының биеклеге. CDC_1 почмагы ABC өчпочмагы яссылыгы белән проекция яссылыгы α арасындагы почмак φ гә тигез. Моннан язабыз:

$$C_1D = CD \cdot \cos\varphi,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD, \quad S_{ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot C_1D.$$



394 нче рәсем



395 нче рәсем

Моннан

$$S_{ABC_1} = S_{ABC} \cos \varphi.$$

Шулай итеп, бу очрак өчен теорема дөрес. Теорема α яссылыгы урынына аңа параллель теләсә нинди яссылык алган очракта да дөрес булыр. Чыннан да, фигураны параллель яссылыкларга проекцияләгәндә, аның проекцияләре проекцияләү юнәлешендәге параллель күчерү белән тәңгәл килә. Ә параллель күчерү юлы белән тәңгәл китерелә торган фигуралар тигез.

Хәзер гомуми очракны карыйк. Бирелгән күппочмакны өчпочмакларга бүлгәлик. Проекция яссылыгына параллель ягы булмаган һәр өчпочмакны, уртак ягы проекция яссылыгына параллель булырлык итеп, ике өчпочмакка бүләбез. 395 нче рәсемдә ул $ABCD$ дүртпочмагы өчен күрсәтелгән.

Хәзер һәр бүлгәләү Δ өчпочмагы һәм аның Δ′ проекциясе өчен $S_{\Delta'} = S_{\Delta} \cos \varphi$ тигезлеген язабыз. Бу тигезлекләрнең барысын бергә буынлап кушарбыз. Ул вакытта сул кисәктә күппочмакның проекциясе мәйданын, ә уң кисәктә күппочмакның үз мәйданы белән cos φ нең тапкырчыгышын табарбыз. Теорема исбатланды.

164. ПРОСТРАНСТВОДА ВЕКТОРЛАР

Пространствода, яссылыктагы кебек үк, юнәлешле кисемтәне *вектор* дип атыйлар. Пространствода да векторлар өчен векторның абсолют зурлыгы, векторның юнәлеше, векторларның тигезлеге кебек төп төшенчәләргә билгеләмәләр нәкъ яссылыктагы кебек бирелә.

Башы $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ноктасында, ахыры $A_2(x_2, y_2, z_2)$ ноктасында булган векторның *координаталары* дип x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 саннары атала. Тигез векторларның тиңдәшле координаталарының тигез, һәм киресенчә, тиңдәшле координаталары тигез булган векторларның тигез икәнлеге дә яссылыктагы кебек үк исбатлана. Бу векторны аның координаталары аша $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$ яки $(\overline{a_1, a_2, a_3})$ рәвешендә тамгаларга мөмкинлек бирә.

Мәсьәлә (50). Дүрт нокта бирелгән: $A(2, 7, -3)$, $B(1, 0, 3)$, $C(-3, -4, 5)$, $D(-2, 3, -1)$. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ һәм $\overline{BD}$ векторлары арасыннан тигез векторларны күрсәтегез.

Чишү. Күрсәтелгән $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... векторларының координаталарын табып, тиңдәшле координаталарын чагыштырырга кирәк. Тигез векторларның тиңдәшле координаталары да тигез. Мәсәлән, $\overline{AB}$ векторының координаталары: $1-2=-1$, $0-7=-7$, $3-(-3)=6$. $\overline{DC}$ векторының да координаталары шундый ук: $-3-(-2)=-1$, $-4-3=$ $=-7$, $5-(-1)=6$. Шулай итеп, $\overline{AB}$ һәм $\overline{DC}$ векторлары тигез. $\overline{BC}$ һәм $\overline{AD}$ — тигез векторларның икенче пары.

165. ПРОСТРАНСТВОДА ВЕКТОРЛАР ӨСТЕНДӘ ГАМӘЛЛӘР

Векторларны кушу, векторны санга тапкырлау, векторларның скаляр тапкырчыгышы кебек гамәлләргә яссылыктагы кебек үк билгеләмә бирелә.

$\overline{c}(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$ векторы $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$ һәм $\overline{b}(b_1, b_2, b_3)$ векторларының *суммасы* дип атала.

$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ векторлы тигезлеге дә яссылыктагы кебек үк исбатлана.

$\lambda\overline{a}=(\overline{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3})$ векторы $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$ векторының λ санына *тапкырчыгышы* дип атала.

λa векторының абсолют зурлыгы $|\lambda||a|$ на тигезлеге, ә юнәлеше, $\lambda>0$ булганда, $\overline{a}$ векторының юнәлеше белән тәңгәл килгәнлеге, $\lambda<0$ булганда, $\overline{a}$ векторына капма-каршы юнәлештә икәнлеге дә яссылыктагы кебек үк исбатлана.

Мәсьәлә (54). $\overline{a}(1, 2, 3)$ векторы бирелгән. Бу векторга коллинеар һәм башы $A(1, 1, 1)$ ноктасында, ахыры

xy яссылыгындагы B ноктасында яткан векторны табыгыз.

Чишү. B ноктасының z координатасы нульгә тигез. AB векторының координаталары: $x-1$, $y-1$, $0-1=-1$. a һәм AB векторларының коллинеарлыгыннан чыгып, түбәндәге пропорцияне язабыз:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{-1}{3}.$$

Моннан B ноктасының x, y координаталарын табабыз:

$$x=\frac{2}{3},\ y=-\frac{1}{3}.$$

$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ саны $(\overline{a_1,\ a_2,\ a_3})$ һәм $(\overline{b_1,\ b_2,\ b_3})$ векторларының *скаляр тапкырчыгышы* дип атала. Векторларның скаляр тапкырчыгышы аларның абсолют зурлыклары белән бу векторлар арасындагы почмак косинусы тапкырчыгышына тигез икәнлеге дә нәкъ яссылыктагыча ук исбатлана.

Мәсьәлә (59). Дүрт нокта бирелгән: $A(0,\ 1,\ -1)$, $B(1,\ -2,\ 2)$, $C(3,\ 1,\ 0)$, $D(2,\ -3,\ 1)$. $\overline{AB}$ һәм $\overline{CD}$ векторлары арасындагы φ почмагының косинусын табыгыз.

Чишү. $\overline{AB}$ векторының координаталары $1-0=1$, $-1-1=-2$, $2-(-1)=3$;

$$|\overline{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}.$$

$\overline{CD}$ векторының координаталары $2-3=-1$, $-3-1=$ $=-4$, $1-0=1$;

$$|\overline{CD}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}.$$

Димәк,

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{CD}|}=\frac{1\cdot(-1)+(-2)\cdot(-4)+3\cdot1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=\frac{5}{\sqrt{63}}.$$

КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Пространствода ноктаның координаталарын ничек табалар? Аңлатып бирегез.
2. Ике нокта арасындагы ераклыкны бу нокталарның координаталары аша күрсәтегез.

3. Кисемтә уртасының координаталарын аның очларының координаталары аша күрсәтү өчен формулалар чыгарыгыз.
4. Ноктага карата симметрия үзгәртүе дип нәрсәгә әйтәбез? Нинди фигура үзәк симметрияле дип атала?
5. Яссылыкка карата симметрия үзгәртүе дип нәрсәгә әйтәбез? Аңлатып бирегез. Фигураның симметрия яссылыгы дип нәрсәгә әйтәләр?
6. Фигураның нинди үзгәртүе хәрәкәт дип атала?
7. Пространствода хәрәкәт яссылыкны яссылыкка күчергәнлеген исбатлагыз.
8. Пространствода нинди фигуралар тигез дип атала?
9. Параллель күчерүгә билгеләмә бирегез.
10. Параллель күчерүнең үзлекләрен санап чыгыгыз.
11. Пространствода параллель күчергәндә һәр яссылык я үзенә, я параллель яссылыкка күчкәнлеген исбатлагыз.
12. Охшаш үзгәртү дип нәрсә атала? Аның үзлекләрен санап чыгыгыз.
13. Нинди үзгәртү гомотетия дип атала? Пространствода гомотетия үзгәртүе гомотетия үзәге аша үтмәүче теләсә нинди яссылыкны параллель яссылыкка (яки үзенә) күчергәнен исбатлагыз.
14. Чалышма турылар арасындагы почмакка билгеләмә бирегез.
15. Туры һәм яссылык арасындагы почмакка билгеләмә бирегез.
16. Яссылыклар арасындагы почмакка билгеләмә бирегез.
17. Күппочмакның яссылыкка ортогональ проекциясенең мәйданы шул күппочмак мәйданы белән күппочмак яссылыгы һәм аның проекция яссылыгы арасындагы почмакның косинусы тапкырчыгышына тигез икәнен исбатлагыз.
18. Векторның абсолют зурлыгы дип нәрсәгә әйтәбез? Нинди векторлар бердәй юнәлешле дип атала?
19. Башы $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ноктасында, ахыры $A_2(x_2, y_2, z_2)$ ноктасында булган векторның координаталарына билгеләмә бирегез.
20. Векторлар өстендә кушу, санга тапкырлау, скаляр тапкырчыгыш гамәлләренә билгеләмә бирегез.

Мәсьәләләр

1. Пространствоның x һәм y координаталары нульгә тигез булган нокталары кайда ята?
2. A (1, 2, 3), B (0, 1, 2), C (0, 0, 3), D (1, 2, 0) нокталары бирелгән. Бу нокталарның кайсылары 1) xy яссылыгында; 2) z күчәрендә; 3) yz яссылыгында ята?
3. A (1, 2, 3) ноктасы бирелгән. Бу ноктадан координата

күчәрләренә һәм координата яссылыкларына төшерелгән перпендикулярларның нигезләрен табыгыз.

4. (1, 2, —3) ноктасыннан 1) координата яссылыкларына кадәр; 2) координата күчәрләренә кадәр; 3) координаталар башлангычына кадәр ераклыкларны табыгыз.

5. Өч нокта: $A(0, 1, -1)$, $B(-2, 0, 1)$, $C(0, -1, 0)$ бирелгән. xy яссылыгында бу нокталардан тигез ераклыктагы $D(x, y, 0)$ ноктасын табыгыз.

6. (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0) нокталарыннан тигез ераклыкта һәм yz яссылыгыннан 2 берәмлек ераклыкта торган нокталарны табыгыз.

7. x күчәрендә $A(1, 2, 3)$ һәм $B(-2, 1, 3)$ нокталарыннан тигез ераклыктагы $C(x, 0, 0)$ ноктасын табыгыз.

8. $A(1, 2, 3)$ ноктасыннан һәм координаталар башлангычыннан тигез ераклыктагы пространство нокталарының геометрик урыны тигезләмәсен төзегез.

9. Түбәләре: $A(1, 2, 3)$, $B(0, 2, 4)$, $C(1, 1, 4)$, $D(2, 2, 2)$ нокталарында булган $ABCD$ дүртпочмагының параллелограмм икәнен исбатлагыз.

10. Түбәләре: 1) $A(0, 2, -3)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(2, -2, -1)$, $D(3, -1, -5)$; 2) $A(2, 1, 3)$, $B(1, 0, 7)$, $C(-2, 1, 5)$, $D(-1, 2, 1)$ нокталарында булган $ABCD$ дүртпочмагының параллелограмм икәнен исбатлагыз.

11. Әгәр: 1) $A(6, 7, 8)$, $B(8, 2, 6)$, $C(4, 3, 2)$, $D(2, 8, 4)$; 2) $A(0, 2, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(2, 0, 2)$, $D(1, 2, 2)$ булса, $ABCD$ дүртпочмагының ромб икәнен исбатлагыз.

12. Кисемтәнең бер очы $A(2, 3, -1)$ һәм аның уртасы $C(1, 1, 1)$ бирелгән. Кисемтәнең икенче $B(x, y, z)$ очын табыгыз.

13. $ABCD$ параллелограммында аның өч түбәсенең координаталары билгеле: 1) $A(2, 3, 2)$, $B(0, 2, 4)$, $C(4, 1, 0)$; 2) $A(1, -1, 0)$, $B(0, 1, -1)$, $C(-1, 0, 1)$; 3) $A(4, 2, -1)$, $B(1, -3, 2)$, $C(-4, 2, 1)$. Параллелограммның D түбәсенең координаталарын табыгыз.

14. Очлары $A(a, c, -b)$ һәм $B(-a, d, b)$ нокталары булган кисемтәнең уртасы y күчәрендә ятканын исбатлагыз.

15. Очлары $C(a, b, c)$ һәм $D(p, q, -c)$ нокталары булган кисемтәнең уртасы xy яссылыгында ятканын исбатлагыз.

16. Координаталар яссылыгы xy ка карата симметрия үзгәртүе $x' = x$, $y' = y$, $z' = -z$ формулалары белән бирелгәнен исбатлагыз.

17. (1, 2, 3), (0, —1, 2), (1, 0, —3) нокталары бирелгән. Координата яссылыкларына карата бирелгән нокталарга симметрик нокталарны табыгыз.

18. (1, 2, 3), (0, —1, 2), (1, 0, —3) нокталары бирелгән. Координаталар башлангычына карата бу нокталарга симметрик нокталарны табыгыз.

19. Ноктага карата симметрия үзгәртүе хәрәкәт икәнен исбатлагыз.

20*. Яссылыкта карата симметрия үзгәртүе хәрәкәт икәнен исбатлагыз.

21. Пространствода хәрәкәт вакытында түгәрәк шундый ук радиуслы түгәрәккә күчкәнен исбатлагыз.

22. Пространствода хәрәкәт вакытында турыда яткан өч нокталарның шулай ук бер турыда яткан өч ноктага күчкәнен исбатлагыз.

23. Әгәр параллель күчергәндә $A(1, 0, 2)$ ноктасы $A'(2, 1, 0)$ ноктасына күчсә, $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$ параллель күчерүе формулаларыннан a, b, c ның кыйммәтләрен табыгыз.

24. Параллель күчергәндә $A(2, 1, -1)$ ноктасы $A'(1, -1, 0)$ ноктасына күчә. Координаталар башлангычы нинди ноктага күчә?

25. 1) $A(2, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(3, -2, 1)$, $D(2, -3, 0)$;
2) $A(-2, 3, 5)$, $B(1, 2, 4)$, $C(4, -3, 6)$, $D(7, -2, 5)$;
3) $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(3, -2, 2)$, $D(2, -3, 1)$;
4) $A(1, 1, 0)$, $B(0, 0, 0)$, $C(-2, 2, 1)$, $D(1, 1, 1)$ булса, A ноктасын — B ноктасына, ә C ноктасын D ноктасына күчерә торган параллель күчерү бармы?

26. Параллель күчерүдә параллелограмм үзенә тигез булган параллелограммга күчкәнен исбатлагыз.

27. Дүрт параллель туры параллель яссылыкларны $ABCD$ һәм тиңдәшле рәвештә $A_1B_1C_1D_1$ параллелограммнарының түбәләрендә кисеп үтәләр. $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ параллелограммнарын параллель күчерү юлы белән тәңгәл китереп булганын исбатлагыз.

28. Пространствода гомотетия үзгәртүе охшаш үзгәртү икәнен исбатлагыз.

29. S ноктасы аша үтүче өч туры бирелгән яссылыкны A, B, C нокталарында, ә аңа параллель яссылыкны A_1, B_1, C_1 нокталарында кисеп үтә. ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларының гомотетик икәнен исбатлагыз.

30. a турысы α яссылыгында ята, ә b турысы бу яссылыкка перпендикуляр. a һәм b турылары арасындагы почмак нәрсәгә тигез?

31*. Бер турыда ятмаган өч нокта: A, B, C бирелгән. Әгәр CA һәм CB турылары AB турысы белән α һәм β почмаклары төзесәләр һәм $\alpha+\beta<90°$ булса, CA һәм CB турылары арасындагы почмак нәрсәгә тигез?

32. a, b, c турылары бер үк яссылыкка параллельләр. b һәм c турылары a турысы белән $60°$ һәм $80°$ лы почмаклар төзесәләр, алар арасындагы почмак күпмегә тигез?

33. Яссылыктагы теләсә нинди туры яссылыкка үткәрелгән авышманың проекциясенә перпендикуляр булса, һәм киресенчә: яссылыктагы туры авышмага перпендикуляр булса, ул авышманың проекциясенә дә перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

34. 1) Параллель яссылыкларны кисүче туры аларны тигез почмаклар ясап кискәнен исбатлагыз.

2) Параллель турыларны кисүче яссылык аларны тигез почмаклар ясап кискәнен исбатлагыз.

35. A ноктасы яссылыктан h ераклыкта тора. Бу ноктадан яссылыкка 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° лы почмак ясап үткәрелгән авышмаларның озынлыкларын табыгыз.

36. Авышма a га тигез. Әгәр авышма яссылык белән 1) 45°; 2) 60°; 3) 30° лы почмаклар ясаса, бу авышманың яссылыкка проекциясе нәрсәгә тигез?

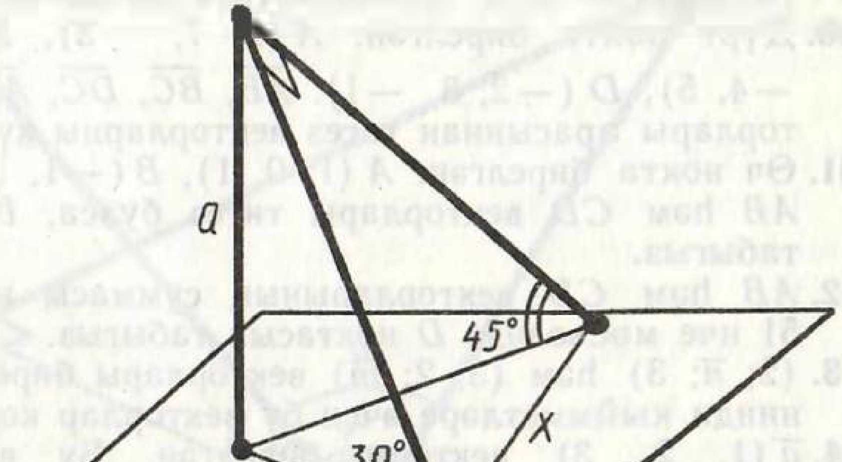
37. 10 м озынлыктагы кисемтә яссылыкны кисеп үтә; аның очлары яссылыктан 2 м һәм 3 м ераклыкта урнашкан. Бирелгән кисемтә белән яссылык арасындагы почмакны табыгыз.

38. Яссылыктан a ераклыктагы ноктадан яссылык белән 45° һәм 30° лы почмаклар, ә үзара туры почмак төзүче ике авышма үткәрелгән. Авышмаларның очлары арасындагы ераклыкны табыгыз (396 нчы рәсем).

39. Яссылыктан a ераклыкта торган ноктадан яссылык белән 45° лы почмаклар, ә үзара 60° лы почмак төзүче ике авышма үткәрелгән. Авышмаларның очлары арасындагы ераклыкны табыгыз.

40. Яссылыктан a ераклыкта торган ноктадан, яссылыкка 30° лы почмак ясап, ике авышма үткәрелгән; өстәвенә аларның проекцияләре 120° лы почмак төзи. Авышмаларның очлары арасындагы ераклыкны табыгыз.

41. Тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмакның бер катеты аша, икенче катеты белән 45° лы почмак ясап, яссылык үткәрелгән. Гипотенуза белән яссылык арасындагы почмакны табыгыз.



396 нчы рәсем

42. Параллель яссылыкларны кисүче яссылык аларны тигез почмаклар ясап кискәнен исбатлагыз.

43. Ике яссылык 30° лы почмак ясап кисешәләр. Бу яссылыкларның берсендә яткан A ноктасы икенче яссылыктан a ераклыкта тора. Бу ноктадан яссылыкларның кисешү турысына кадәрге ераклыкны табыгыз.

44. Яссылыкларның берсендә алынган нокта бу яссылыкларның кисешү турысыннан, шул ноктадан икенче яссылыкка кадәр ераклыкка караганда, ике тапкыр ераграк торса, яссылыклар арасындагы почмакны табыгыз.

45. Ике тигезьянлы өчпочмакның нигезләре уртак, ә аларның яссылыклары үзара 60° лы почмак төзи. Уртак нигез 16 м га тигез, бер өчпочмакның ян ягы 17 м, ә икенчесенең ян яклары перпендикуляр. Өчпочмакларның түбәләре арасындагы ераклыкны табыгыз.

46. AB нигезе уртак булган ABC һәм ABD тигезьянлы өчпочмаклары төрле яссылыкларда яталар, алар арасындагы почмак α га тигез. 1) $AB=24$ см, $AC=13$ см, $AD=37$ см, $CD=35$ см; 2) $AB=32$ м, $AC=65$ м, $AD=20$ м, $CD=63$ м булса, $\cos\alpha$ ны табыгыз.

47. Турыпочмаклы өчпочмакның катетлары 7 м һәм 24 м га тигез. Гипотенуза аша өчпочмак яссылыгы белән 30° лы почмак ясаучы яссылык үткәрелгән. Туры почмак түбәсеннән шул яссылыкка кадәрге ераклыкны табыгыз.

48. Ягы a га тигез булган тигезьяклы өчпочмак бирелгән. Өчпочмак яссылык белән 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° лы почмак төзесә, аның бу яссылыкка ортогональ проекциясенең мәйданын табыгыз.

49. 1) 46 нчы мәсьәләдәге ABC өчпочмагының ABD өчпочмагына ортогональ проекциясенең мәйданын табыгыз.
2) 46 нчы мәсьәләдәге ABD өчпочмагының ABC өчпочмагына ортогональ проекциясенең мәйданын табыгыз.

50. Дүрт нокта бирелгән: $A(2, 7, -3)$, $B(1, 0, 3)$, $C(-3, -4, 5)$, $D(-2, 3, -1)$. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ һәм $\overline{BD}$ векторлары арасыннан тигез векторларны күрсәтегез.

51. Өч нокта бирелгән: $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(0, 2, -1)$. AB һәм CD векторлары тигез булса, $D(x, y, z)$ ноктасын табыгыз.

52. AB һәм CD векторларының суммасы нульгә тигез булса, 51 нче мәсьәләдә D ноктасын табыгыз.

53. $(2; \overline{n}; 3)$ һәм $(3; 2; \overline{m})$ векторлары бирелгән. m һәм n ның нинди кыйммәтләре өчен бу векторлар коллинеар?

54. $\overline{a}(1, 2, 3)$ векторы бирелгән. Бу векторга коллинеар һәм башы $A(1, 1, 1)$ ноктасында, ахыры xy яссылыгындагы B ноктасында яткан векторны табыгыз.

55. n ның нинди кыйммәтләре өчен бирелгән векторлар перпен-

дикуляр: 1) $\overline{a}(2, -1, 3)$, $\overline{b}(1, 3, n)$; 2) $\overline{a}(n, -2, 1)$, $\overline{b}(n, -n, 1)$; 3) $\overline{a}(n, -2, 1)$, $\overline{b}(n, 2n, 4)$; 4) $\overline{a}(4, 2n, -1)$; $\overline{b}(-1, 1, n)$?

56. Өч нокта бирелгән: $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(0, 2, -1)$. c күчәрендә $\overline{AB}$ һәм $\overline{CD}$ векторлары перпендикуляр булырлык $D(0, 0, c)$ ноктасын табыгыз.

57*. $\overline{a}$ һәм $\overline{b}$ векторлары $60°$ лы почмак төзи, ә $\overline{c}$ векторы аларга перпендикуляр. $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ векторының абсолют зурлыгын табыгыз.

58*. Озынлыклары берәмлеккә тигез булган $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ векторлары пар-пар $60°$ лы почмак төзиләр. 1) $\overline{a}$ һәм $\overline{b}+\overline{c}$; 2) $\overline{a}$ һәм $\overline{b}-\overline{c}$ векторлары арасындагы φ почмагын табыгыз.

59. Дүрт нокта бирелгән: $A(0, 1, -1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(3, 1, 0)$, $D(2, -3, 1)$. $\overline{AB}$ һәм $\overline{CD}$ векторлары арасындагы φ почмагының косинусын табыгыз.

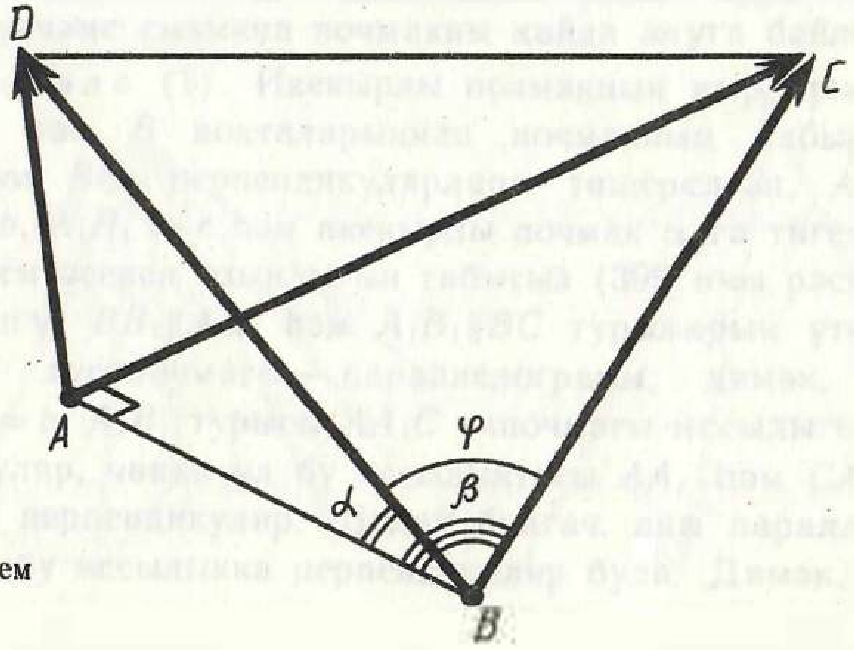
60. Өч нокта бирелгән: $A(0, 1, -1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(3, 1, 0)$. ABC өчпочмагында C почмагының косинусын табыгыз.

61*. a һәм b векторларын эченә алган турылар арасындагы φ почмагының

$$|\overline{a}\overline{b}| = |\overline{a}|\,|\overline{b}|\cos\varphi$$

тигезләмәсеннән табылганын исбатлагыз.

62*. ABC өчпочмагының туры почмаклы A түбәсеннән өчпочмак яссылыгына AD перпендикуляры торгызылган. ABD почмагы α га, ә ABC почмагы β га тигез булса, $\overline{BC}$ һәм $\overline{BD}$ векторлары арасындагы φ почмагының косинусын табыгыз (397 нче рәсем).



397 нче рәсем

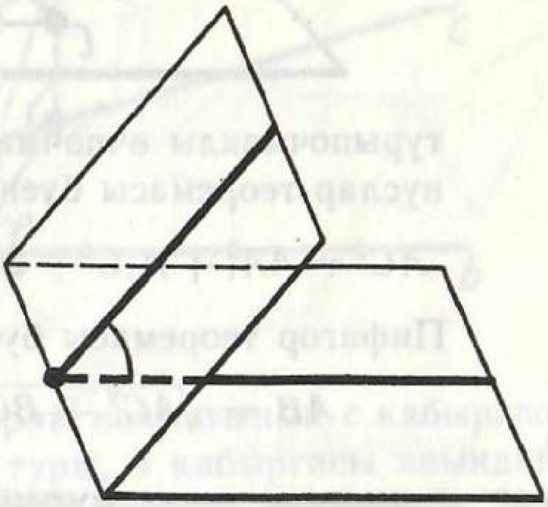
63. Авышма яссылык белән $45°$ лы почмак төзи. Яссылыкта авышманың нигезе аша, шул авышма проекциясенә $45°$ лы почмак ясап, туры үткәрелгән. Бу туры белән авышма арасындагы φ почмагын табыгыз.

64*. Яссылыктан читтә алынган ноктадан перпендикуляр һәм перпендикуляр белән α почмагы ясаучы ике тигез авышма үткәрелгән. Авышмалар арасындагы почмак β га тигез булса, авышмаларның проекцияләре арасындагы φ почмагын табыгыз.

11 нче сыйныф

§ 19. КҮПКЫРЛЫКЛАР

166. ИКЕКЫРЛЫ ПОЧМАК



398 нче рәсем

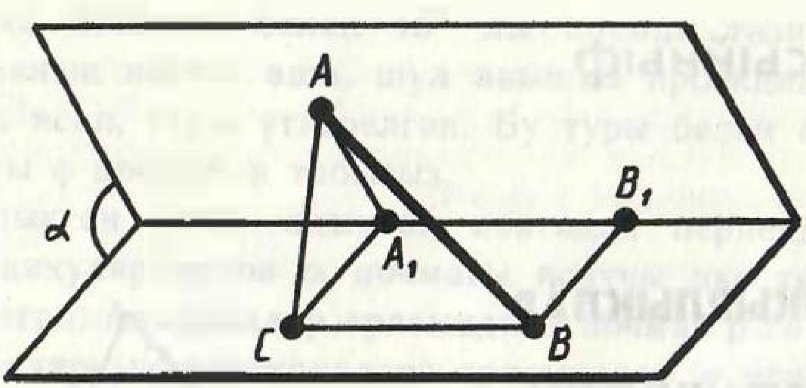
Чикләре уртак туры булган ике ярымъяссылыктан торган фигура *икекырлы почмак* дип атала (398 нче рәсем). Ярымъяссылыклар икекырлы почмакның *кырлары* дип, ә аларны чикләүче туры — *кабыргасы* дип атала.

Икекырлы почмакның кабыргасына перпендикуляр итеп үткәрелгән яссылык аның кырларын ике ярымтуры буйлап кисеп үтә. Бу ярымтурылар белән төзелгән почмак икекырлы почмакның *сызыкча почмагы* дип атала.

Икекырлы почмакка тиңдәшле сызыкча почмакның үлчәме икекырлы почмакның үлчәме итеп алына. Икекырлы почмакның барлык сызыкча почмаклары параллель күчерү юлы белән тәңгәл китерелә алалар, димәк, алар тигез. Шуңа күрә икекырлы почмакның үлчәме сызыкча почмакны кайда алуга бәйле түгел.

Мәсьәлә (1). Икекырлы почмакның кырларында яткан A һәм B нокталарыннан почмакның кабыргасына AA_1 һәм BB_1 перпендикулярлары төшерелгән. $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ һәм икекырлы почмак α га тигез булса, AB кисемтәсенең озынлыгын табыгыз (399 нчы рәсем).

Чишү. $BB_1 \| A_1C$ һәм $A_1B_1 \| BC$ турыларын үткәрәбез. A_1B_1BC дүртпочмагы — параллелограмм, димәк, $A_1C = BB_1 = b$. A_1B_1 турысы AA_1C өчпочмагы яссылыгына перпендикуляр, чөнки ул бу яссылыктагы AA_1 һәм CA_1 турыларына перпендикуляр. Шулай булгач, аңа параллель BC турысы бу яссылыкка перпендикуляр була. Димәк, ABC —



399 нчы рәсем

турыпочмаклы өчпочмак һәм аның C почмагы туры. Косинуслар теоремасы буенча

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

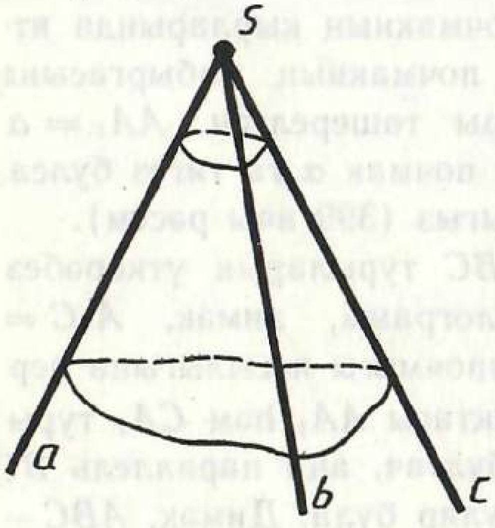
Пифагор теоремасы буенча

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + c^2}.$$

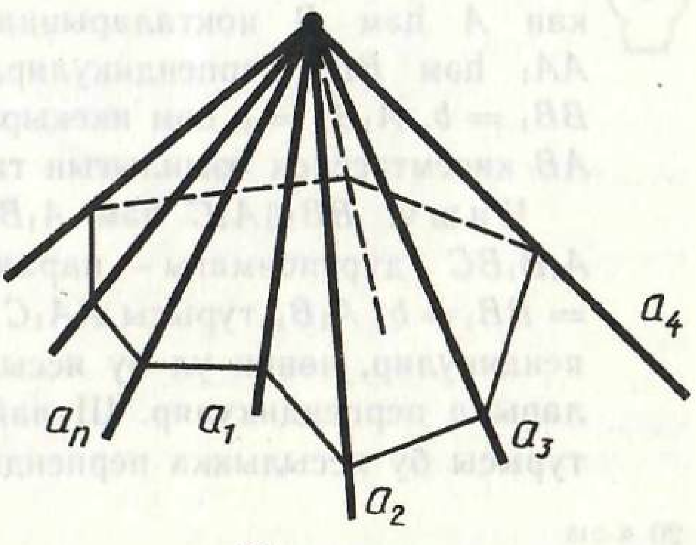
167. ӨЧКЫРЛЫ ҺӘМ КҮПКЫРЛЫ ПОЧМАКЛАР

Бер ноктадан чыккан, ләкин бер яссылыкта ятмаучы a, b, c нурларын карыйк. Өч яссы почмак: (ab), (bc) һәм (ac) дан төзелгән фигура *өчкырлы* (abc) *почмагы* дип атала (400 нче рәсем). Бу яссы почмаклар өчкырлы почмакның *кырлары* дип, ә аларның яклары — *кабыргалары* дип атала. Яссы почмакларның уртак түбәсе өчкырлы почмакның *түбәсе* дип атала. Өчкырлы почмакның кырлары белән төзелгән икекырлы почмаклар *өчкырлы почмакның икекырлы почмаклары* дип атала.

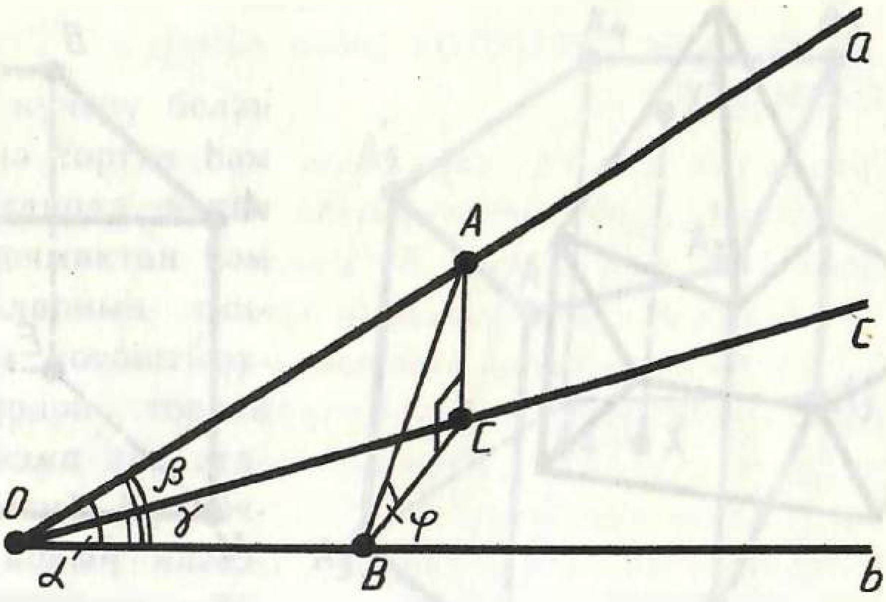
Күпкырлы почмакка төшенчә аналогия буенча бирелә (401 нче рәсем).



400 нче рәсем



401 нче рәсем



402 нче рәсем

Мәсьәлә (2). (abc) өчкырлы почмагының c кабыргасы янындагы икекырлы почмагы туры, b кабыргасы янындагы икекырлы почмагы φ гә тигез, ә (bc) яссы почмагы γ га тигез $\left(\varphi,\ \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$. Калган ике яссы почмакны: $\alpha = \angle(ab)$, $\beta = \angle(ac)$ ны табыгыз.

Чишү. a кабыргасында ирекле рәвештә алынган ноктадан b кабыргасына AB перпендикулярын, ә c кабыргасына AC перпендикулярын төшерәбез (402 нче рәсем). Өч перпендикуляр турындагы теорема буенча CB b кабыргасына перпендикуляр.

OAB, OCB, AOC һәм ABC турыпочмаклы өчпочмакларыннан табабыз:

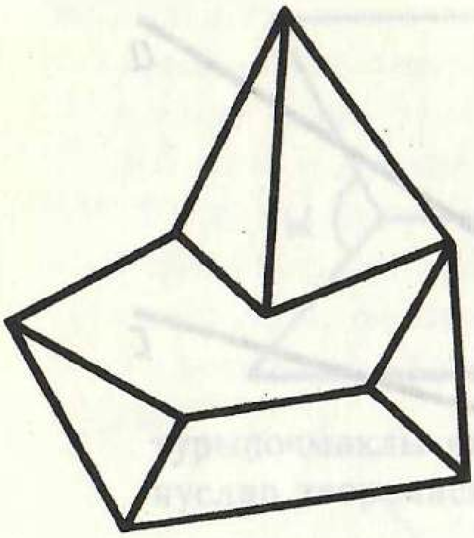
$$\operatorname{tg}\alpha = AB : OB = \frac{BC}{\cos\varphi} : \frac{BC}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi},$$

$$\operatorname{tg}\beta = AC : OC = BC\operatorname{tg}\varphi : \frac{BC}{\sin\gamma} = \operatorname{tg}\varphi\sin\gamma,$$

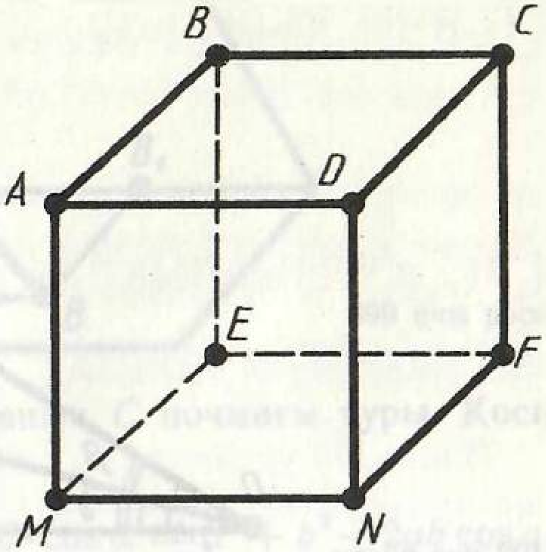
Искәрмә: α, β, γ, φ почмаклары арасындагы

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi},\ \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\varphi\sin\gamma$$

бәйләнешләре ике почмакны белгәндә, калган ике почмакны табарга мөмкинлек бирә.



403 нче рәсем



404 нче рәсем

168. КҮПКЫРЛЫК

Стереометриядә җисемнәр дип аталган пространство фигуралары өйрәнелә. Геометрик җисемне пространствоның өслек белән чикләнгән физик җисем алып торган бер кисәге дип күз алдына китерергә кирәк.

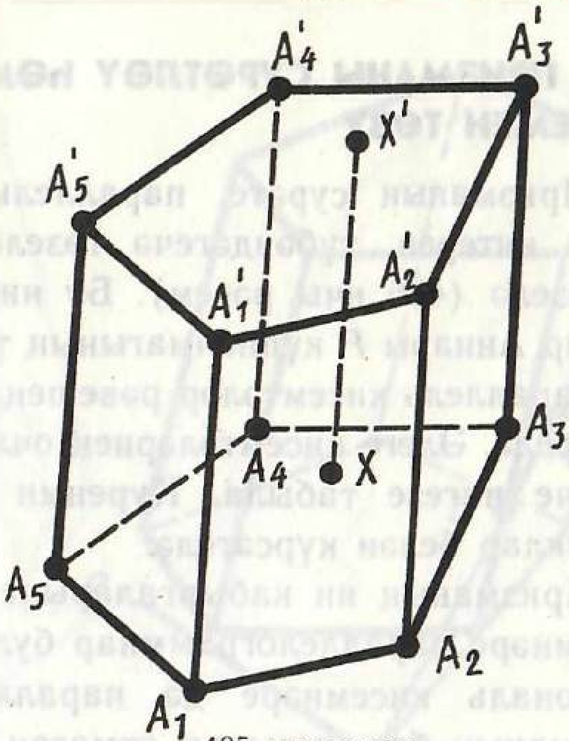
Өслеге чикле сандагы яссылыклар белән чикләнгән җисем *күпкырлык* дип атала (403 нче рәсем). Әгәр күпкырлык үзен чикләүче һәр яссылыкның бер ягында гына ятса, ул *кабарынкы күпкырлык* дип атала. Кабарынкы күпкырлыкның өслеге белән аны чикләүче яссылыкның уртак кисәге *күпкырлыкның кыры* дип атала. Кабарынкы күпкырлыкның кырлары яссы кабарынкы күппочмаклардан тора. Кырның яклары — *күпкырлыкның кабыргалары* дип, ә түбәләре *күпкырлыкның түбәләре* дип атала.

Бирелгән билгеләмәне сезгә таныш булган куб мисалында аңлатыйк (404 нче рәсем). Куб — кабарынкы күпкырлык ул. Аның өслеге алты квадраттан гыйбарәт: $ABCD$, $BEFC$, ... Алар аның кырлары булып тора. Бу квадратларның яклары AB, BC, BE, ... кубның кабыргалары була. Бу квадратларның түбәләре A, B, C, E, ...— кубның түбәләре. Кубның алты кыры, унике кабыргасы һәм сигез түбәсе бар.

Безнең төп өйрәнү объекты булган иң гади күпкырлыкларга — призма һәм пирамидаларга — билгеләмә биргәндә без, нигездә, җисем төшенчәсеннән файдаланмабыз. Аларга пространствоның аларныкы булган барлык нокталары күрсәтелгән геометрик фигуралар буларак билгеләмә бирелер. Геометрик җисем һәм аның өслегенә гомуми төшенчә соңрак бирелер.

169. ПРИЗМА

Параллель күчерү белән тәңгәл китерелә торган һәм төрле яссылыкларда яткан ике яссы күппочмактан һәм бу күппочмакларның тиңдәш түбәләрен тоташтыручы кисемтәләрдән торган күпкырлык *призма* дип атала (405 нче рәсем). Күппочмаклар — *призманың нигезләре* дип, ә тиңдәшле түбәләрне тоташтыручы кисемтәләр *призманың ян кабыргалары* дип атала.



405 нче рәсем

Параллель күчерү хәрәкәт булганга күрә, ***призманың нигезләре тигез.***

Параллель күчерүдә яссылык параллель яссылыкка күчкәнлектән, ***призманың нигезләре параллель яссылыкларда ята.***

Параллель күчерүдә нокталар параллель (яки тәңгәл килүче) турылар буенча бер үк ераклыкка күчә, шуңа күрә ***призманың ян кабыргалары параллель һәм тигез.***

Призманың өслеге аның нигезләреннән һәм ян өслегеннән тора. *Ян өслеге* — параллелограммнар. Бу параллелограммнарның һәркайсының ике ягы — нигезләренең тиңдәшле яклары, ә калган икесе күрше ян кабыргалар була.

Призманың нигез яссылыклары арасындагы ераклык аның *биеклеге* дип атала. Призманың бер кыр өстендә ятмаган ике түбәсен тоташтыручы кисемтә аның *диагонале* дип атала.

Призманың нигезе n-почмаклардан торса, ул *n-почмаклы призма* дип атала.

Киләчәктә бер нигезе кабарынкы күппочмаклар булган призмаларны гына карарбыз. Андый призмалар кабарынкы күпкырлыклар була.

405 нче рәсемдә бишпочмаклы призма сурәтләнгән. $A_1A_2...A_5$, $A'_1A'_2...A'_5$ бишпочмаклары аның нигезләре була. XX' — нигезләренең тиңдәшле нокталарын тоташтыручы кисемтә. $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ..., $A_5A'_5$ — призманың ян кабыргалары. $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ... параллелограммнары — призманың ян кырлары.

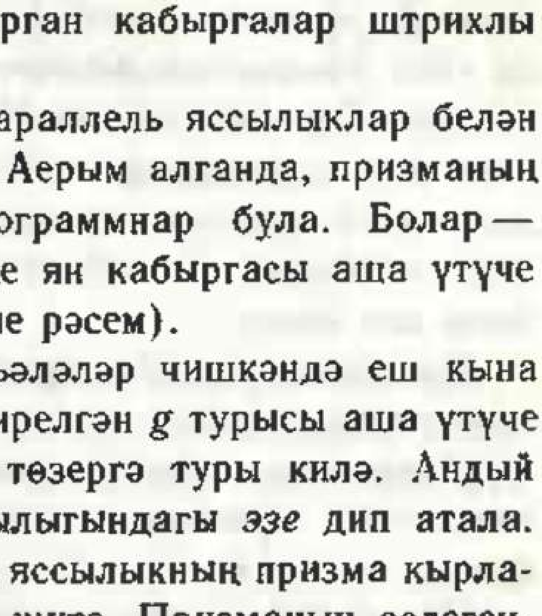
170. ПРИЗМАНЫ СУРӘТЛӘҮ ҺӘМ АНЫҢ КИСЕМЕН ТӨЗҮ

Призманың сурәте, параллель проекцияләү кагыйдәләренә туры китереп, түбәндәгечә төзелә. Башта нигезләренең берсе *P* төзелә (406 нчы рәсем). Бу нинди дә булса яссы күппочмак булыр. Аннары *P* күппочмагының түбәләреннән тигез озынлыктагы параллель кисемтәләр рәвешендә призманың ян кабыргалары үткәрелә. Әлеге кисемтәләрнең очларын тоташтырып, призманың икенче нигезе табыла. Күренми торган кабыргалар штрихлы сызыклар белән күрсәтелә.

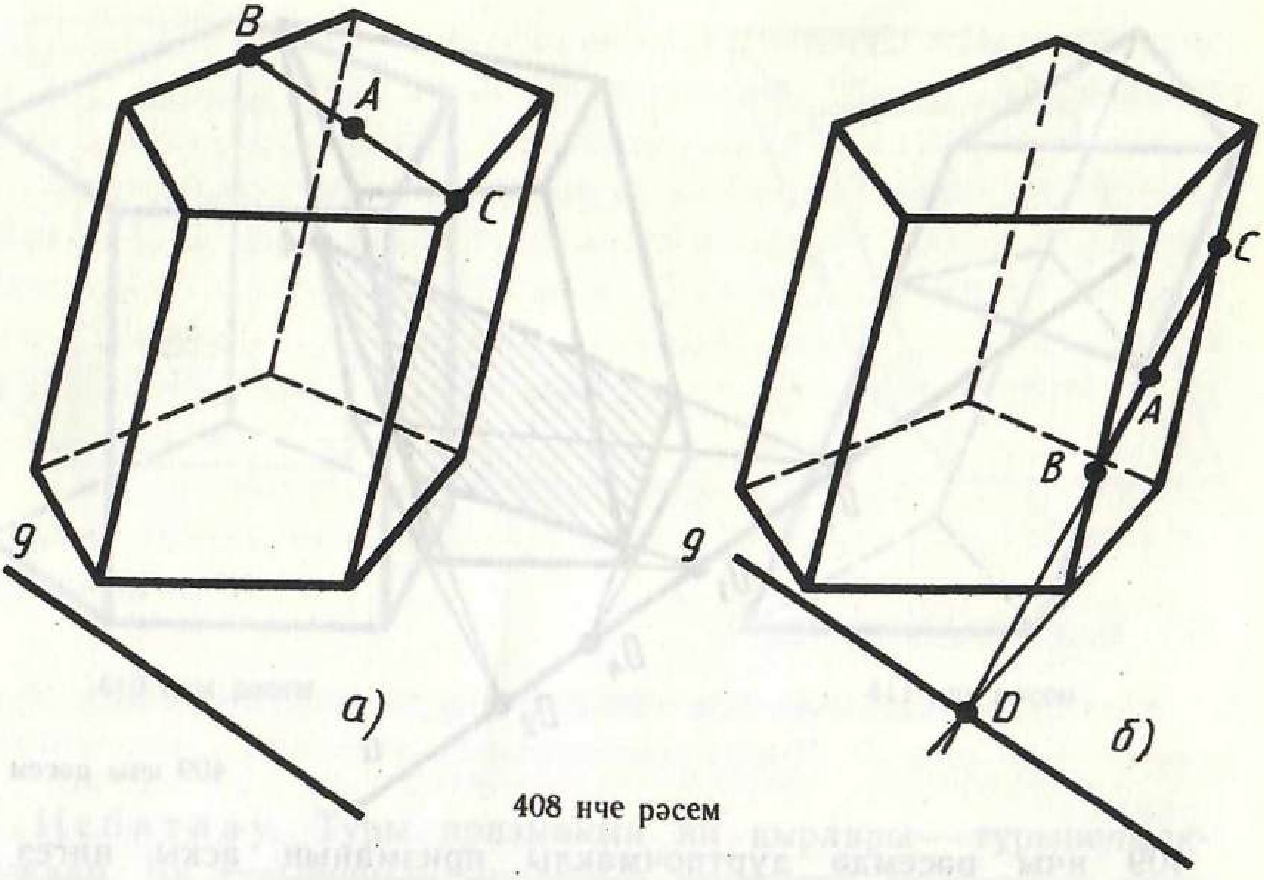
Призманың ян кабыргаларына параллель яссылыклар белән кисемнәре параллелограммнар була. Аерым алганда, призманың диагональ кисемнәре дә параллелограммнар була. Болар — призманың бер кырында ятмаган ике ян кабыргасы аша үтүче яссылыклар белән кисемнәре (407 нче рәсем).

Практикада, атап әйткәндә, мәсьәләләр чишкәндә еш кына призманың бер нигез яссылыгында бирелгән *g* турысы аша үтүче яссылык белән призманың кисемен төзергә туры килә. Андый туры кисүче яссылыкның нигез яссылыгындагы *эзе* дип атала. Призманың кисемен төзү өчен кисүче яссылыкның призма кырлары белән кисешү кисемтәләрен төзү җитә. Призманың өслеген-

406 нчы рәсем



407 нче рәсем



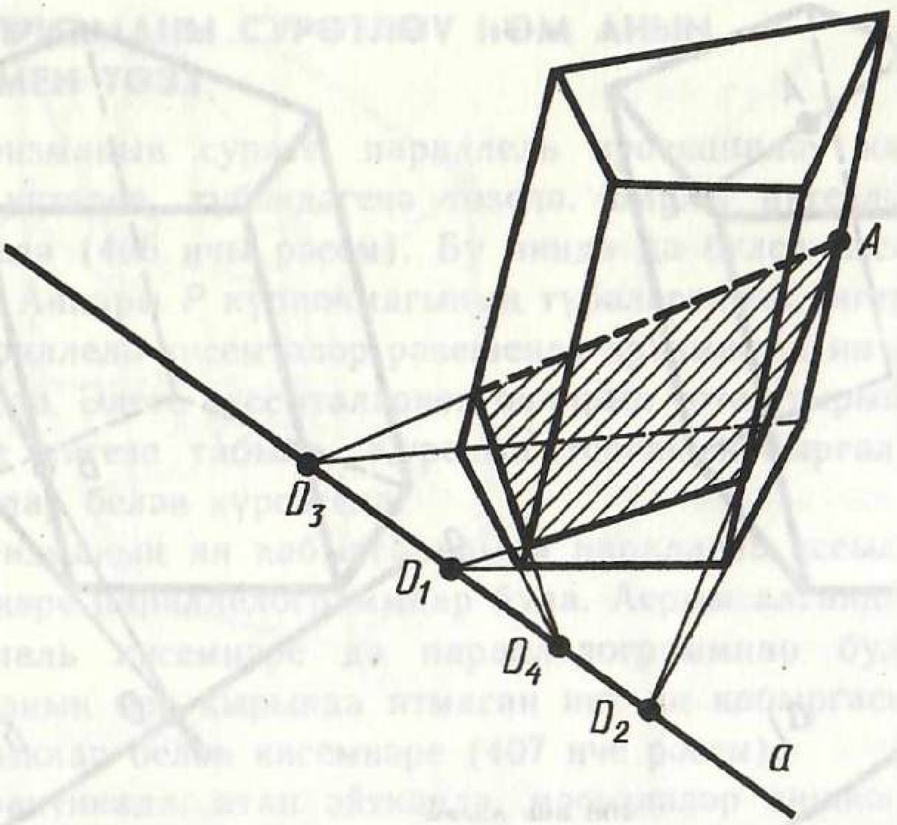
408 нче рәсем

дә кисемнеке дә булган ниндидер A ноктасы билгеле булганда андый кисемнең ничек төзелүен күрсәтик (408 нче рәсем).

Әгәр бирелгән A ноктасы призманың икенче нигезендә ятса, аның кисүче яссылык белән кисешү сызыгы — g эзенә параллель һәм A ноктасын үз эченә алган BC кисемтәсе булыр (408 нче рәсем, *а*).

Әгәр A ноктасы призманың ян кырында ятса, бу кырның кисүче яссылык белән кисешү сызыгы 408 нче *б* рәсемендә күрсәтелгәнчә төзелә. Атап әйткәндә, кыр яссылыгының бирелгән g эзе белән кисешү ноктасы — D төзелә, аннары A һәм D нокталары аша туры үткәрелә. Без карый торган кыр яссылыгындагы AD турысының BC кисемтәсе — бу кырның кисүче яссылык белән кисешү сызыгы була да инде. A ноктасын эченә алган кыр g эзенә параллель булса, кисүче яссылык бу кырны A ноктасы аша үтүче һәм g турысына параллель булган BC кисемтәсе буенча кисә.

BC кисемтәсенең очлары күрше кырларда да ята. Шуңа күрә әле тасвирлаган ысул белән кисүче яссылыкның бу кырлар белән дә кисешү сызыкларын төзергә мөмкин һ. б.



409 нчы рәсем

409 нчы рәсемдә дүртпочмаклы призманың аскы нигез яссылыгында яткан a турысы һәм ян кабыргаларының берсендә яткан A ноктасы аша үтүче яссылык белән кисемен төзү күрсәтелгән.

171. ТУРЫ ПРИЗМА

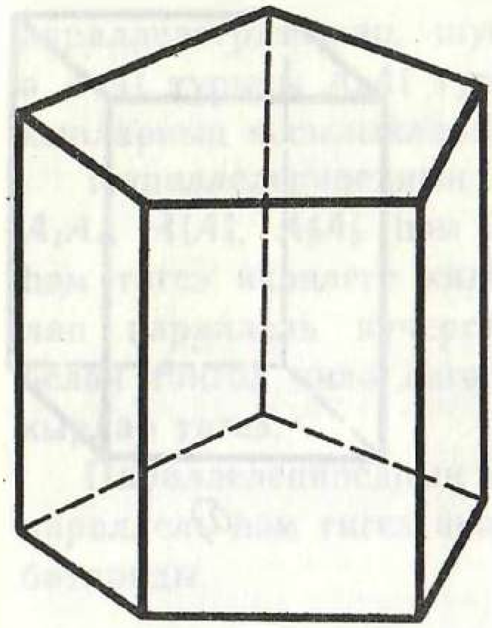
Призманың ян кабыргалары нигезләренә перпендикуляр булса, ул *туры призма* дип атала. Ян кабыргалары нигезләренә перпендикуляр булмаса, ул *авыш призма* дип атала.

Туры призманың ян кырлары турыпочмаклыклардан гыйбарәт. Туры призманы рәсемдә сурәтләгәндә гадәттә аның ян кабыргаларын вертикаль итеп үткәрәләр (410 нчы рәсем).

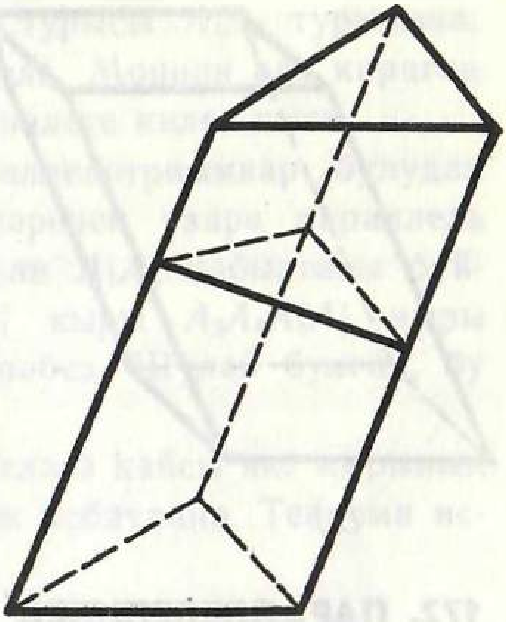
Туры призманың нигезләре төзек күппочмаклардан торса, ул *төзек призма* дип атала.

Призманың ян өслеге (дөресрәге, *ян өслеге мәйданы*) дип аның ян кырларының мәйданнары суммасы атала. Призманың *тулы өслеге* ян өслеге белән нигез мәйданнарының суммасына тигез.

Теорема 19.1. ***Туры призманың ян өслеге нигез периметры белән призманың биеклеге, ягъни ян кабыргасының озынлыгы тапкырчыгышына тигез.***



410 нчы рәсем



411 нче рәсем

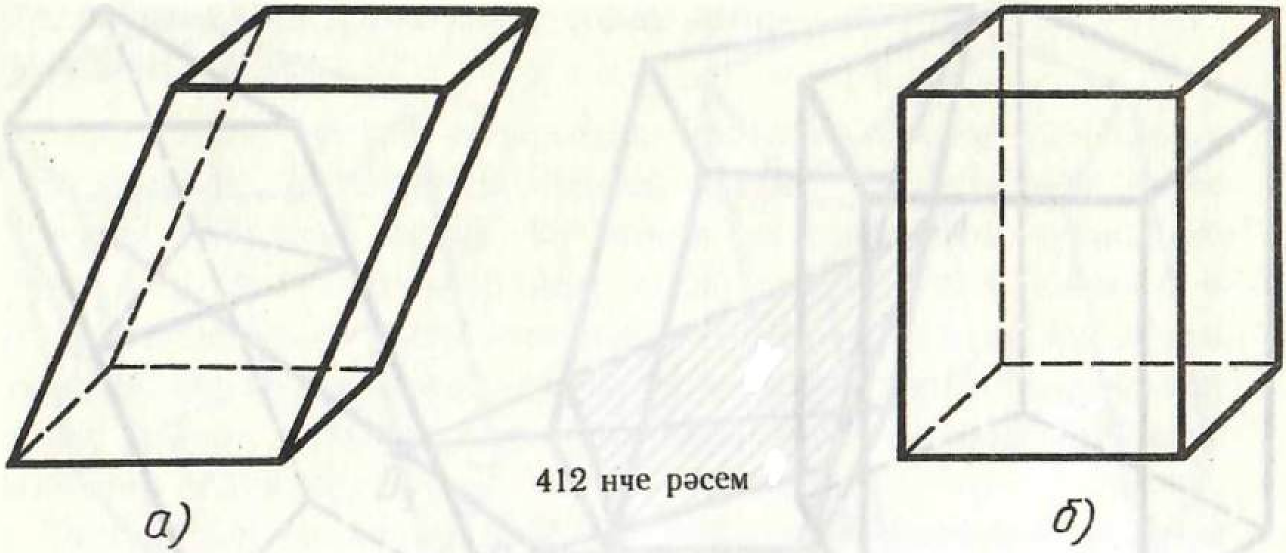
Исбатлау. Туры призманың ян кырлары — турыпочмаклыклар. Бу турыпочмаклыкларның нигезләре призманың нигезендә яткан күппочмакның яклары була, ә биеклекләре аның ян кабыргаларының озынлыгына тигез. Моннан призманың ян өслеге

$$S = a_1 l + a_2 l + ... + a_n l = pl$$

га тигез икәнлеге чыга, монда p — призма нигезенең периметры, l — ян кабыргасының озынлыгы. Теорема исбатланды.

Мәсьәлә (22). Авыш призманың ян кабыргаларына перпендикуляр итеп, аның барлык ян кабыргаларын кисүче кисем үткәрелгән. Кисемнең периметры p га, ян кабыргалары l га тигез булса, призманың ян өслеген табыгыз.

Чишү. Үткәрелгән кисем яссылыгы призманы ике кисәккә бүлә (411 нче рәсем). Аларның берсен, призманың нигезләре тәңгәл килерлек итеп, параллель күчерик. Бу вакытта баштагы призманың кисеме — нигезе булып хезмәт иткән, ә ян кабыргалары l га тигез булган туры призма килеп чыгар. Бу призманың да ян өслеге шул ук калыр. Шулай итеп, баштагы призманың ян өслеге pl га тигез.



412 нче рәсем

172. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

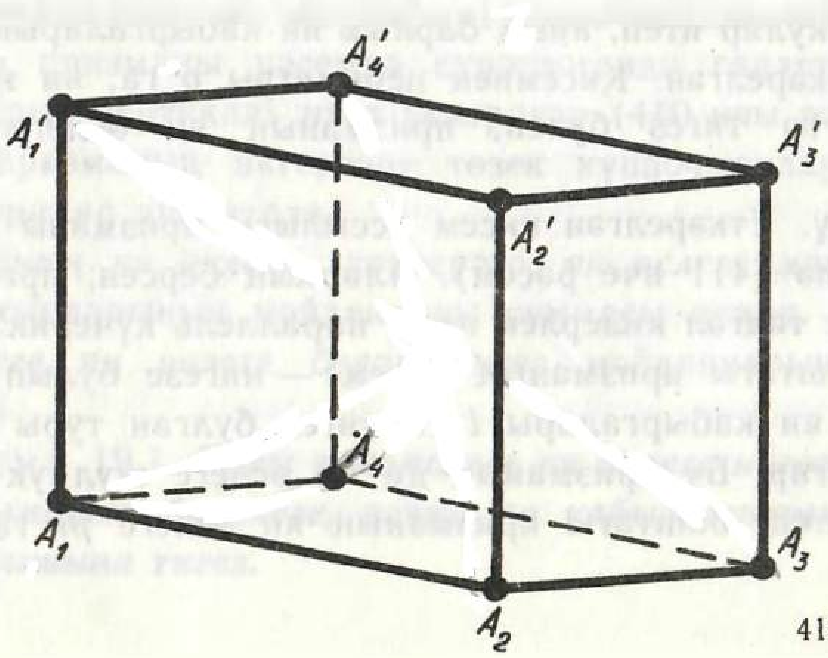
Призманың нигезе параллелограмм булса, ул *параллелепипед* дип атала. Параллелепипедның кырлары — параллелограммнар.

412 нче *а* рәсемендә — авыш параллелепипед, 412 нче *б* рәсемендә туры параллелепипед сурәтләнгән.

Параллелепипедның уртак түбәләре булмаган кырлары *каршы ятучы кырлары* дип атала.

Теорема 19.2. ***Параллелепипедның каршы ятучы кырлары параллель һәм тигез.***

Исбатлау. Параллелепипедның каршы ятучы кайсы да булса ике кырын, мәсәлән, $A_1A_2A_2'A_1'$ һәм $A_3A_4A_4'A_3'$ кырларын карыйк (413 нче рәсем). Параллелепипедның барлык кырлары —



413 нче рәсем

параллелограммнар, шуңа күрә A_1A_2 турысы A_4A_3 турысына, ә $A_1A'_1$ турысы $A_4A'_4$ турысына параллель. Моннан әле караган кырларның яссылыклары параллель икәнлеге килеп чыга.

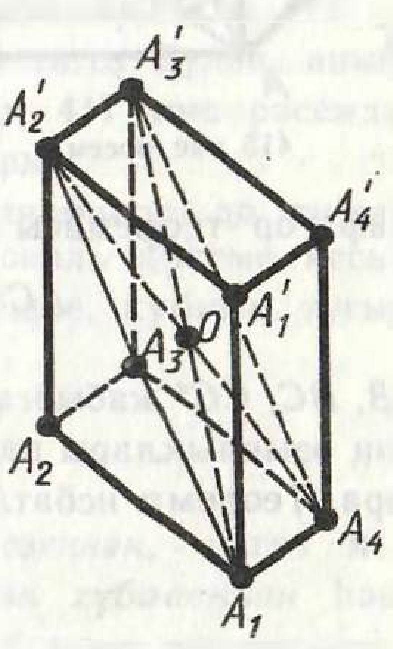
Параллелепипедның кырлары параллелограммнар булудан A_1A_4, $A'_1A'_4$, $A'_2A'_3$ һәм A_2A_3 кисемтәләренең үзара параллель һәм тигез икәнлеге килеп чыга. Моннан A_1A_4 кабыргасы буйлап параллель күчергәндә, $A_1A_2A'_2A'_1$ кыры $A_3A_4A'_4A'_3$ кыры белән тәңгәл килә дигән нәтиҗәгә киләбез. Шулай булгач, бу кырлар тигез.

Параллелепипедның каршы ятучы теләсә кайсы ике кырының параллель һәм тигез икәнлеге шулай ук исбатлана. Теорема исбатланды.

173. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДНЫҢ ҮЗӘК СИММЕТРИЯСЕ

Теорема 19.3. ***Параллелепипедның диагональләре бер ноктада кисешәләр һәм кисешү ноктасы белән урталай бүленәләр.***

Исбатлау. Параллелепипедның нинди дә булса ике диагонален, мәсәлән, $A_1A'_3$ һәм $A_4A'_2$ не карыйк (414 нче рәсем). $A_1A'_2A_3A_4$ һәм $A_2A'_2A'_3A_3$ дүртпочмаклары A_2A_3 ягы уртак булган параллелограммнар, шуңа күрә аларның A_1A_4 һәм $A'_2A'_3$ яклары бер-берсенә параллель һәм, димәк, бер яссылыкта яталар. Бу яссылык параллелепипедның каршы ятучы кырларының яссылыкларын $A_1A'_2$ һәм $A_4A'_3$ параллель турылары буенча кисеп үтә. Шулай булгач, $A_4A_1A'_2A'_3$ дүртпочмагы — параллелограмм. Параллелепипедның $A_1A'_3$ һәм $A_4A'_2$ диагональләре бу параллелограммның диагональләре булып тора. Шуңа күрә алар кисешәләр һәм кисешү ноктасы O белән урталай бүленәләр.



414 нче рәсем

Аналогик рәвештә $A_1A'_3$ һәм $A_2A'_4$ диагональләренең һәм шулай ук $A_1A'_3$ һәм $A_3A'_1$ диагональләренең дә кисешүләре һәм кисешү ноктасы белән урталай бүленүе исбатлана. Моннан параллелепипедның дүрт диагонале дә бер ноктада кисешәләр һәм кисешү ноктасы белән

урталай бүленәләр дигән нәтиҗәгә киләбез. Теорема исбатланды.

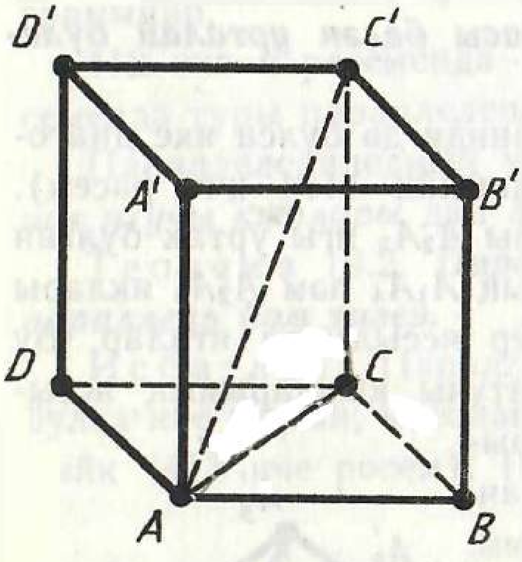
19.3 теоремасыннан ***параллелепипед диагональләренең кисешү ноктасы аның симметрия үзәге*** икәнлеге килеп чыга.

174. ТУРЫПОЧМАКЛЫ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Нигезе турыпочмаклык булган туры параллелепипед *турыпочмаклы параллелепипед* дип атала. Турыпочмаклы параллелепипедның барлык кырлары — турыпочмаклыклар.

Барлык кабыргалары тигез булган турыпочмаклы параллелепипед *куб* дип атала.

Турыпочмаклы параллелепипедның параллель булмаган кабыргаларының озынлыклары аның *сызыкча үлчәмнәре* (*үлчәнешләре*) дип атала. Турыпочмаклы параллелепипедның өч сызыкча үлчәме бар.



415 нче рәсем

Теорема 19.4. ***Турыпочмаклы параллелепипедның теләсә кайсы диагоналенең квадраты аның өч сызыкча үлчәменең квадратлары суммасына тигез.***

Исбатлау. Турыпочмаклы $ABCDA'B'C'D'$ параллелепипедын карыйк (415 нче рәсем). Турыпочмаклы $AC'C$ өчпочмагыннан Пифагор теоремасы буенча табабыз:

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2.$$

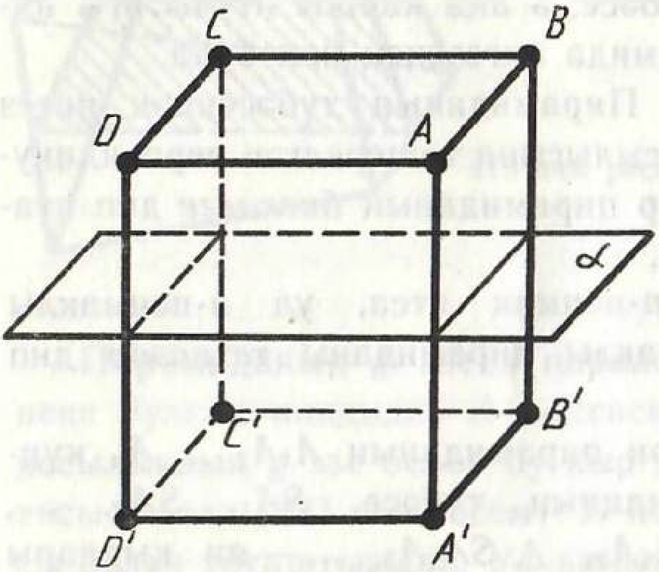
Турыпочмаклы ACB өчпочмагыннан Пифагор теоремасы буенча язабыз: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Моннан

$$AC'^2 = CC'^2 + AB^2 + BC^2.$$

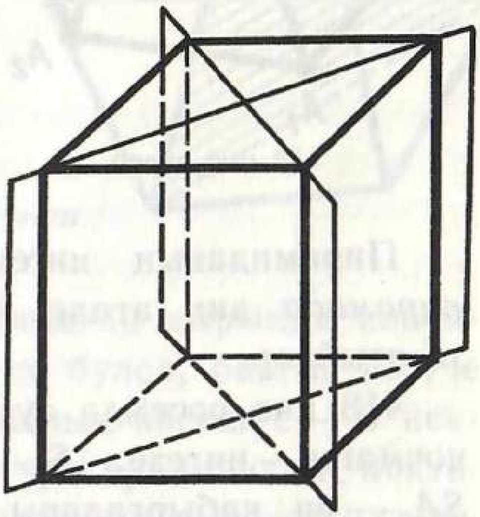
AB, BC, CC' кабыргалары параллель түгел, шулай булгач, аларның озынлыклары параллелепипедның сызыкча үлчәмнәре булып тора. Теорема исбатланды.

175. ТУРЫПОЧМАКЛЫ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДНЫҢ СИММЕТРИЯСЕ

Һәр параллелепипед кебек ук, турыпочмаклы параллелепипедның да симметрия үзәге — диагональләренең кисешү ноктасы бар. Аның шулай ук симметрия үзәге аша кырларына параллель үтә торган өч симметрия яссылыгы бар. 416 нчы рәсемдә шун-



416 нчы рәсем



417 нче рәсем

дый яссылыкларның берсе бирелгән. Ул параллелепипедның дүрт параллель кабыргасының урталары аша үтә. Кабыргаларның очлары симметрик нокталар була.

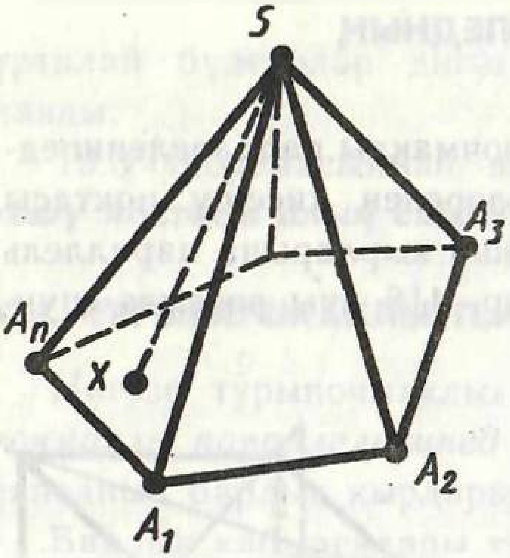
Параллелепипедның сызыкча үлчәмнәре төрле булса, аның югарыда аталганнан башка симметрия яссылыклары юк.

Параллелепипедның ике сызыкча үлчәме тигез булса, аның тагын ике симметрия яссылыгы бар. Болар: 417 нче рәсемдә күрсәтелгән диагональ кисемнәре яссылыклары.

Параллелепипедның барлык сызыкча үлчәмнәре дә тигез, ягъни куб булса, аның теләсә кайсы диагональ кисеме яссылыгы симметрия яссылыгы була. Шул рәвешле, кубның тугыз симметрия яссылыгы бар.

176. ПИРАМИДА

Яссы күппочмактан — *пирамиданың нигезеннән,* нигез яссылыгында ятмаган ноктадан — *пирамиданың түбәсеннән* һәм түбәне нигез нокталары белән тоташтыручы барлык кисемтәләрдән торган күпкырлык *пирамида* дип атала (418 нче рәсем).



418 нче рәсем

Пирамиданың түбәсен нигез түбәләре белән тоташтыручы кисемтәләр *ян кабыргалар* дип атала.

Пирамиданың өслеге аның нигезеннән һәм ян кырларыннан гыйбарәт. Аның һәр ян кыры — өчпочмак. Түбәләренең берсе — пирамиданың түбәсе, ә аңа каршы ятучы ягы пирамида нигезенең ягы була.

Пирамиданың түбәсеннән нигез яссылыгына төшерелгән перпендикуляр пирамиданың *биеклеге* дип атала.

Пирамиданың нигезендә n-почмак ятса, ул n-почмаклы *пирамида* дип атала. Өчпочмаклы пирамиданы *тетраэдр* дип тә атыйлар.

418 нче рәсемдә сурәтләнгән пирамиданың $A_1A_2 \dots A_n$ күппочмагы — нигезе, S — пирамиданың түбәсе, SA_1, SA_2, ..., SA_n — ян кабыргалары, $\triangle SA_1A_2$, $\triangle SA_2A_3$, ... — ян кырлары була.

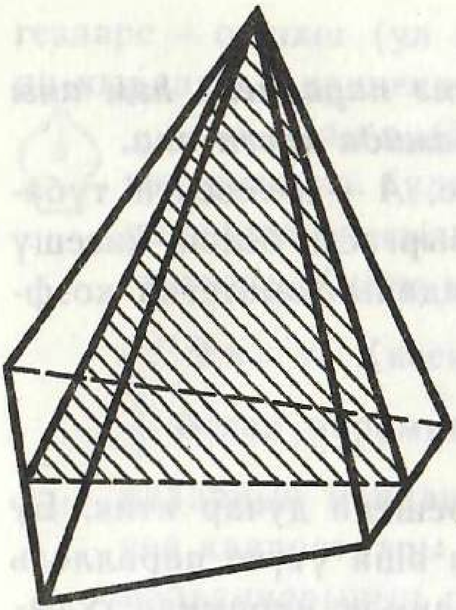
Алга таба без нигезендә кабарынкы күппочмаклар яткан пирамидаларны гына карарбыз. Андый пирамидалар кабарынкы күпкырлыклар була.

177. ПИРАМИДА ҺӘМ АНЫҢ ЯССЫ КИСЕМНӘРЕН ТӨЗҮ

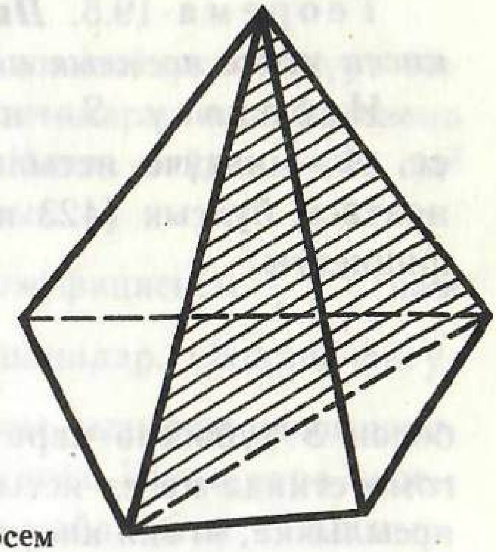
Пирамиданың сурәтен, параллель проекцияләү кагыйдәләренә таянып, түбәндәгечә төзиләр. Башта пирамиданың нигезе төзелә. Ул ниндидер яссы күппочмак булыр. Аннары пирамиданың түбәсе билгеләнә һәм ян кабыргалары ярдәмендә нигезенең түбәләре белән тоташтырыла. 418 нче рәсемдә бишпочмаклы пирамида сурәтләнгән.

Пирамиданың түбәсе аша үтүче яссылыклар белән кисемнәре өчпочмаклар була (419 нчы рәсем). Аерым алганда, *диагональ кисемнәре* өчпочмаклардан гыйбарәт. Бу — пирамиданың күрше булмаган ике ян кабыргасы аша үтүче яссылык белән кисеме (420 нче рәсем).

Нигезе яссылыгында бирелгән g эзе буенча пирамиданың яссылык белән кисеме призма кисеме кебек үк төзелә. Пирамиданың яссылык белән кисемен төзү өчен, аның ян кырларын кисүче яссылык белән кисешү сызыкларын төзү җитә.



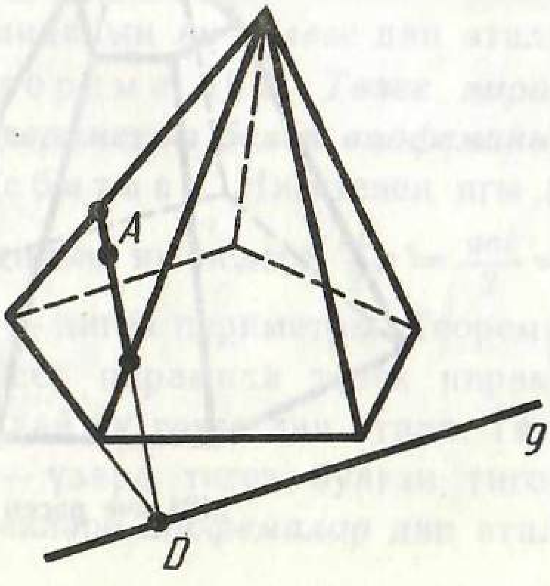
419 нчы рәсем



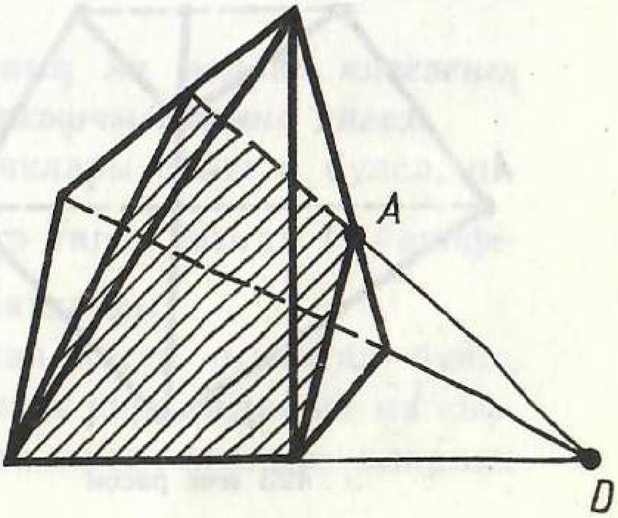
420 нче рәсем

Пирамиданың g эзенә параллель булмаган кырында кисемнеке булган ниндидер A ноктасы билгеле булса, башта кисүче яссылыкның g эзе белән бу кыр яссылыгының кисешүе — D ноктасы төзелә (421 нче рәсем). D ноктасы туры ярдәмендә A ноктасы белән тоташтырыла. Ул вакытта бу турының кыр өстендә яткан кисемтәсе әлеге кыр белән кисүче яссылыкның кисешүе була. Әгәр A ноктасы g эзенә параллель кыр өстендә ятса, кисүче яссылык бу кырны g эзенә параллель кисемтә буенча кисә. Күрше ян кырга күчкәч, кисүче яссылык белән кисешүен төзү шулай ук дәвам ителә. Нәтиҗәдә пирамиданың яссылык белән кисеме табылыр.

422 нче рәсемдә нигезенең ягы һәм ян кабыргасының берсендә яткан A ноктасы аша үтүче яссылык белән дүртпочмаклы пирамиданың кисемен төзү күрсәтелгән.



421 нче рәсем



422 нче рәсем

178. КИСЕК ПИРАМИДА

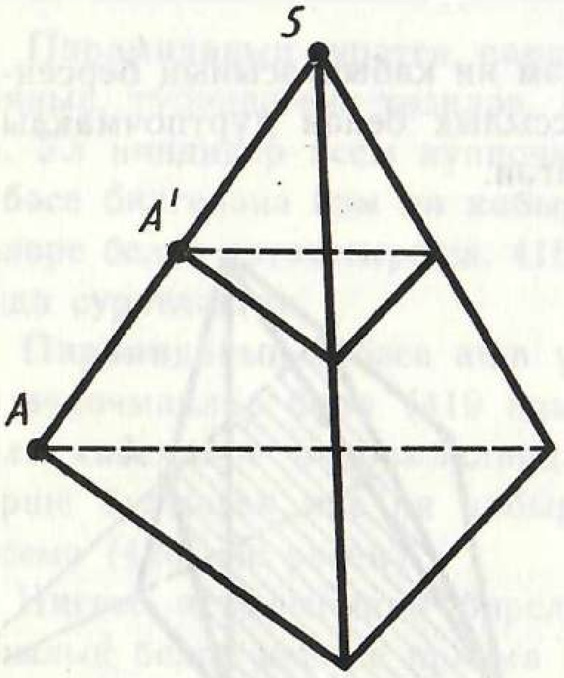
Теорема 19.5. ***Пирамиданың нигезенә параллель һәм аны кисеп үтүче яссылык аңардан охшаш пирамида кисеп ала.***

Исбатлау. S — пирамиданың түбәсе, A — нигезенең түбәсе, A' — кисүче яссылыкның SA ян кабыргасы белән кисешү ноктасы булсын (423 нче рәсем). Пирамиданы гомотетия коэффициенты

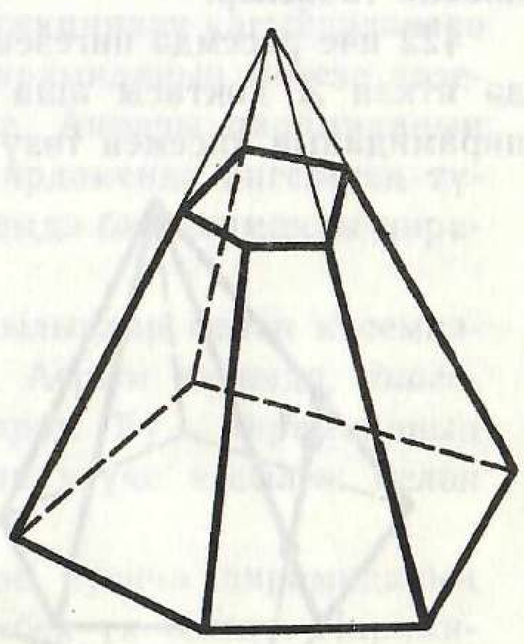
$$k = \frac{SA'}{SA}$$

белән S түбәсенә карата гомотетия үзгәрешенә дучар итик. Бу гомотетиядә нигез яссылыгы — A' ноктасы аша үтүче параллель яссылыкка, ягъни кисүче яссылыкка күчә, димәк, пирамида тулысынча шул яссылык белән кисеп алынган пирамида кисәгенә күчә. Гомотетия ул охшаш үзгәртү булганлыктан, пирамиданың кисеп алынган кисәге бирелгән пирамидага охшаш була. Теорема исбатланды.

19.5 теоремасы буенча пирамиданың нигез яссылыгына параллель булган һәм аның ян кырларын кисүче яссылык аңардан охшаш пирамида кисеп ала. Бу пирамиданың икенче кисәге шулай ук күпкырлык була һәм ул *кисек пирамида* дип атала (424 нче рәсем). Кисек пирамиданың параллель яссылыкларда яткан кырлары *пирамиданың нигезләре* дип атала; калган кырлары *ян кырлар* дип атала. Кисек пирамиданың ни-



423 нче рәсем



424 нче рәсем

гезләре — охшаш (ул гына да түгел, гомотетик) күппочмаклар, ян кырлары — трапецияләр.

Мәсьәлә (54). Пирамиданың ян кабыргасы дүрт тигез кисәккә бүленгән һәм бүлү нокталары аша нигезенә параллель яссылыклар үткәрелгән. Нигез мәйданы 400 см^2 га тигез. Кисем мәйданнарын табыгыз.

Чишү. Кисемнәр охшашлык коэффициенты $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ һәм $\frac{3}{4}$ белән пирамиданың нигезенә охшашлар. Охшаш фигураларның мәйданнары чагыштырмасы сызыкча үлчәмнәренең квадратлары чагыштырмасына тигез. Шуңа күрә кисем мәйданнарының пирамиданың нигез мәйданына чагыштырмасы $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{2}{4}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ кебек булыр. Шулай булгач, кисем мәйданнары $400\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=25$ (см)^2, $400\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^2=100$ (см)^2, $400\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=225$ (см^2) булыр.

179. ТӨЗЕК ПИРАМИДА

Пирамиданың нигезе төзек күппочмак булып, биеклегенең нигезе шул күппочмакның үзәге белән тәңгәл килсә, ул *төзек пирамида* дип атала. Пирамиданың биеклеген эченә алган туры төзек пирамиданың *күчәре* дип атала. Төзек пирамиданың ян кабыргалары тигез икәнлеге үзеннән-үзе аңлашыла; шулай булгач, ян кырлары — үзара тигез булган тигезьянлы өчпочмаклар.

Төзек пирамидада ян кырының түбәдән үткәрелгән биеклеге *апофема* дип атала. Аның ян кырларының мәйданнары суммасы пирамиданың *ян өслеге* дип атала.

Теорема 19.6. ***Төзек пирамиданың ян өслеге нигезенең ярымпериметры белән апофеманың тапкырчыгышына тигез.***

Исбатлау. Нигезенең ягы a, ә яклары саны n булса, пирамиданың ян өслеге $\frac{al}{2}n=\frac{anl}{2}=\frac{pl}{2}$ гә тигез, монда l — апофема, p — нигез периметры. Теорема исбатланды.

Кисек пирамида төзек пирамидадан кисеп алынган булса, ул шулай ук *төзек* дип атала. Төзек кисек пирамиданың ян кырлары — үзара тигез булган тигезьянлы трапецияләр; аларның биеклекләре *апофемалар* дип атала.

Мәсьәлә (69). Төзек кисек пирамиданың ян өслеге нигез периметрларының ярымсуммасы белән апофемасының тапкырчыгышына тигез. Шуны исбатлагыз.

Чишү. Пирамиданың ян кырлары — һәркайсының өске нигезе a га, аскы нигезе b га, биеклеге (апофемасы) l га тигез булган трапецияләр. Шуңа күрә бер кырының мәйданы $\frac{1}{2}(a+b)l$ га тигез. Барлык кырларының мәйданы, ягъни ян өслеге $\frac{1}{2}(an+bn)l$ га тигез, монда n — пирамида нигезенең түбәләре саны, an һәм bn — нигезләренең периметрлары.

180. ТӨЗЕК КҮПКЫРЛЫКЛАР

Кабарынкы күпкырлыкның кырлары — яклар саны бер үк булган төзек күппочмаклар булып, күпкырлыкның һәр түбәсендә бер үк сандагы кабыргалары очрашсалар, ул *кабарынкы төзек күпкырлык* дип атала.

Биш төрле кабарынкы төзек күпкырлык бар (425 нче рәсем): *төзек тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.*

Төзек тетраэдрның кырлары — төзек өчпочмаклар, һәр түбәсендә өчәр кабыргасы очраша. Тетраэдр — барлык кабыргалары тигез булган өчпочмаклы пирамида ул.

Кубның барлык кырлары — квадратлар, һәр түбәсендә өчәр кабыргасы очраша. Куб — барлык кабыргалары тигез булган турыпочмаклы параллелепипед ул.

Октаэдрның кырлары — төзек өчпочмаклар, ләкин тетраэдрдан аермалы буларак, аның һәр түбәсендә дүртәр кабыргасы очраша.

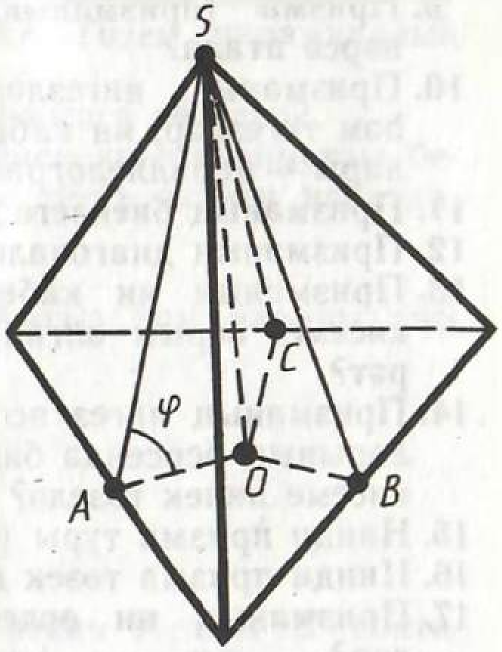
Додекаэдрның кырлары — төзек бишпочмаклар. Аның һәр түбәсендә өчәр кабыргасы очраша.

425 нче рәсем

Икосаэдрның кырлары — төзек өчпочмаклар, ләкин тетраэдрдан һәм октаэдрдан аермалы буларак, һәр түбәсендә бишәр кабыргасы очраша.

Мәсьәлә (81). Төзек тетраэдрның икекырлы почмакларын табыгыз.

Чишү. Тетраэдрның S түбәсеннән аның бу түбәдә очраша торган кырларының SA, SB, SC биеклекләрен һәм тетраэдрның SO биеклеген үткәрик (426 нчы рәсем). Тетраэдрның кабыргасын a аша тамгаласак, кырларының биеклекләре $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ гә тигез булыр. SA, SB, SC биеклекләренең тигезлегеннән OA, OB, OC кисемтәләренең тигезлеге килеп чыга. Ә алар тетраэдрның нигезендәге өчпочмакның якларына перпендикуляр (өч перпендикуляр турындагы теорема буенча). Моннан O ноктасы — тетраэдрның нигезенә камаулы әйләнә үзәге икәнлеге килеп чыга. Шулай булгач, OA, OB һәм OC кисемтәләре $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ га тигез. A ноктасын эченә алган кабырга янындагы икекырлы почмакны φ дип тамгалыйк. Ул вакытта



426 нчы рәсем

$$\cos\varphi = \frac{OA}{AS} = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}, \quad \varphi \approx 70^\circ 32'.$$

Тетраэдрның калган кабыргалары янындагы икекырлы почмакларының зурлыгы шундый ук икәнлеге үзеннән-үзе ачык.

КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Икекырлы почмак (почмакның кыры, почмакның кабыргасы) нәрсә ул?
2. Икекырлы почмакның сызыкча почмагы дип нәрсәгә әйтәләр?

21*

3. Ни өчен икекырлы почмакның үлчәме сызыкча почмакны кайда алуга бәйле түгел?
4. Өчкырлы почмак (өчкырлы почмакның кырлары, кабыргалары) дип нәрсәгә әйтәләр? Аңлатып бирегез.
5. Өчкырлы почмакның яссы һәм икекырлы почмаклары дип нәрсәгә әйтәләр? Аңлатып бирегез.
6. Күпкырлык дип нәрсәгә әйтәләр?
7. Нинди күпкырлык кабарынкы дип атала?
8. Кабарынкы күпкырлыкның кыры, кабыргасы, түбәсе дип нәрсәгә әйтәләр?
9. Призма (призманың нигезе, ян кыры, кабыргасы) дип нәрсә атала?
10. Призманың нигезләре параллель яссылыкларда яталар һәм тигезләр, ян кабыргалары параллель һәм тигез, ян кырлары — параллелограммнар. Шуны исбатлагыз.
11. Призманың биеклеге дип нәрсәгә әйтәләр?
12. Призманың диагонале дип нәрсә атала?
13. Призманың ян кабыргаларына параллель яссылык белән кисеме, аерым алганда диагональ кисеме, нәрсәдән гыйбарәт?
14. Призманың нигез яссылыгында бирелгән туры һәм ян кырларының берсендә бирелгән нокта аша үтүче яссылык белән кисеме ничек төзелә?
15. Нинди призма туры (авыш) призма дип атала?
16. Нинди призма төзек дип атала?
17. Призманың ян өслеге (тулы өслеге) дип нәрсәгә әйтәләр?
18. Туры призманың ян өслеге нигез периметры белән призманың биеклеге тапкырчыгышына тигез икәнен исбатлагыз.
19. Параллелепипед нәрсә ул?
20. Параллелепипедның каршы ятучы кырлары параллель һәм тигез икәнен исбатлагыз.
21. Параллелепипедның диагональләре бер ноктада кисешкәнен һәм кисешү ноктасы белән урталай бүленгәнен исбатлагыз.
22. Параллелепипед диагональләренең кисешү ноктасы аның симметрия үзәге булганын исбатлагыз.
23. Нинди параллелепипед турыпочмаклы дип атала? Турыпочмаклы параллелепипедның сызыкча үлчәмнәре дип нәрсәгә әйтәләр?
24. Куб дип нәрсә атала?
25. Турыпочмаклы параллелепипедта теләсә кайсы диагоналенең квадраты аның сызыкча өч үлчәнешенең квадратлары суммасына тигез икәнен исбатлагыз.
26. Турыпочмаклы параллелепипедның ничә симметрия яссылыгы бар?

27. Пирамида (пирамиданың нигезе, ян кырлары, кабыргасы, биеклеге) дип нәрсә атала?

28. Пирамиданың түбәсе аша үтүче яссылыклар белән кисемнәре нәрсәдән гыйбарәт?

29. Пирамиданың диагональ кисеме дип нәрсәгә әйтәләр?

30. Пирамиданың нигез яссылыгында бирелгән туры һәм бер ян кырында бирелгән нокта аша үтүче яссылык белән кисемен төзегез.

31. Пирамиданың нигезенә параллель яссылык аннан охшаш пирамида кисеп алганын исбатлагыз.

32. Кисек пирамида дип нәрсә аталганын аңлатып бирегез.

33. Нинди пирамида төзек дип атала? Төзек пирамиданың күчәре дип нәрсәгә әйтәләр?

34. Төзек пирамиданың апофемасы дип нәрсәгә әйтәләр?

35. Төзек пирамиданың ян өслеге нигезенең ярымпериметры белән апофемасының тапкырчыгышына тигез икәнен исбатлагыз.

36. Нинди күпкырлык төзек дип атала?

37. Төзек күпкырлыкның биш төрен санагыз һәм аларны тасвирлап бирегез.

МӘСЬӘЛӘЛӘР

1. Икекырлы почмакның кырларында яткан A һәм B нокталарыннан почмакның кабыргасына AA_1 һәм BB_1 перпендикулярлары төшерелгән. 1) $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B_1=c$ һәм икекырлы почмак α га тигез булса, AB кисемтәсенең озынлыгын табыгыз. 2) $AA_1=3$, $BB_1=4$, $A_1B_1=6$, $AB=7$ булса, икекырлы α почмагын табыгыз.

2. (abc) өчкырлы почмагының c кабыргасы янындагы икекырлы почмагы туры, b кабыргасы янындагы икекырлы почмагы φ гә, ә (bc) яссы почмагы γ га тигез $\left(\varphi,\ \gamma<\frac{\pi}{2}\right)$. Калган ике яссы почмагы: $\alpha=\angle(ab)$ һәм $\beta=\angle(ac)$ ны табыгыз.

3. Өчкырлы почмакның бер яссы почмагы γ га, ә аның янындагы икекырлы почмаклары φ гә тигез $\left(\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$. γ почмагы яссылыгы белән каршы ятучы кабырга арасында хасил булган калган ике яссы почмак α һәм β ны табыгыз.

4*. Өчкырлы почмакның ике яссы почмагы кысынкы һәм α га тигез, ә өченче почмагы γ га тигез. Яссы α почмакларына каршы ятучы икекырлы φ почмакларын һәм γ почмагы яссылыгы белән аңа каршы ятучы кабырга арасында хасил булган β почмагын табыгыз.

5. Призманың нигезләренә параллель яссылык белән кисеме нигезләренә тигез икәнен исбатлагыз.

6. n-почмаклы призманың ничә диагональ кисеме бар?

7. Дүртпочмаклы призманың нигезенең ягы һәм икенче нигезенең бер түбәсе аша үтүче яссылык белән кисемен төзегез.

8. Дүртпочмаклы призманың ян кабыргаларындагы өч нокта аша үтүче яссылык белән кисемен төзегез.

9. Призманың бер ян кабыргасы нигез яссылыгына перпендикуляр. Призманың калган ян кабыргалары да нигез яссылыгына перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

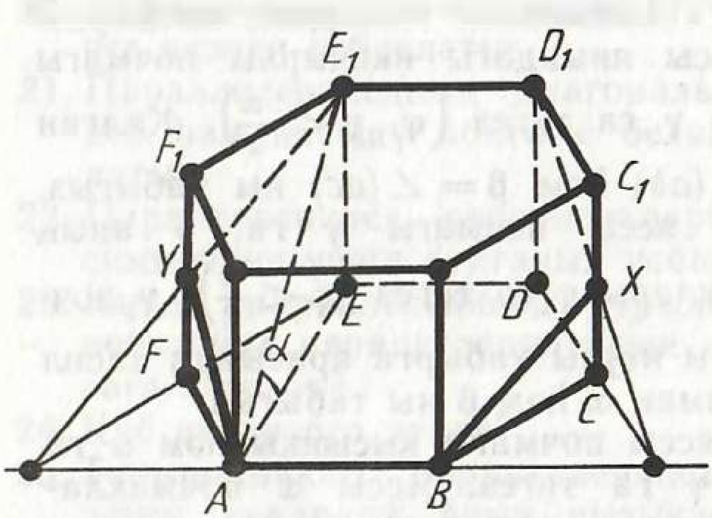
10. Өчпочмаклы туры призма нигезенең яклары 10 см, 17 см һәм 21 см, ә призманың биеклеге 18 см. Ян кабыргасы һәм нигезенең кечерәк биеклеге аша үткәрелгән кисемнең мәйданын табыгыз.

11. Авыш призманың ян кабыргасы 15 см га тигез һәм нигез яссылыгына 30° лы почмак ясап авышкан. Призманың биеклеген табыгыз.

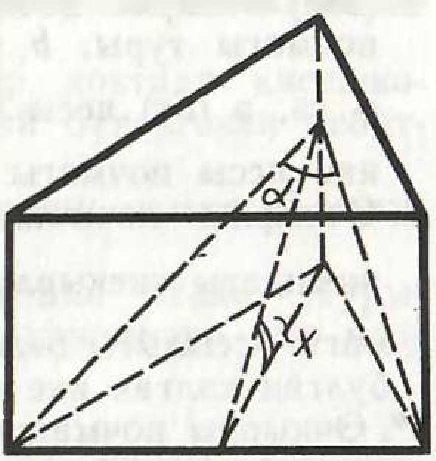
12*. Өчпочмаклы авыш призманың ян кабыргалары арасындагы ераклыклар 37 см, 13 см һәм 40 см га тигез. Призманың зуррак ян кыры белән каршы яткан ян кабыргасы арасындагы ераклыкны табыгыз.

13. Призманың нигезендә ягы a га тигез булган төзек алтыпочмак ята, ә ян кырлары — квадратлар. Призманың диагональләрен һәм диагональ кисемнәренең мәйданнарын табыгыз.

14*. Ян кырлары квадратлар булган төзек алтыпочмаклы призманың аскы нигезенең ягы һәм өске нигезенең аңа каршы яткан ягы аша яссылык үткәрегез. Призма нигезенең ягы a га тигез. Төзелгән кисемнең мәйданын табыгыз (427 нче рәсем).



427 нче рәсем



428 нче рәсем

15. Өчпочмаклы төзек призманың аскы нигезенең ягы аша ян кырларын үзара α почмагы төзүче кисемтәләр буйлап кисүче яссылык үткәрелгән. Бу яссылыкның нигез яссылыгына авышлык почмагын табыгыз (428 нче рәсем).

16. Дүртпочмаклы төзек призмада нигезенең чиктәш ике ягының урталары аша өч ян кабыргасын кисүче һәм нигез яссылыгына α почмагы ясап авышкан яссылык үткәрелгән. Нигезенең ягы a га тигез. Килеп чыккан кисемнең мәйданын табыгыз.

17. Дүртпочмаклы төзек призманың нигез мәйданы 144 см^2 га, биеклеге 14 см га тигез. Призманың диагоналең табыгыз.

18. Дүртпочмаклы төзек призманың ян кырының мәйданы Q га тигез. Диагональ кисеменең мәйданын табыгыз.

19*. Дүртпочмаклы төзек призманың нигезенең ягы 15 кә, биеклеге 20 гә тигез. Нигезенең ягыннан призманың бу якны кисмәүче диагоналенә кадәр иң кыска ераклыкны табыгыз (429 нчы рәсем).

20. Өчпочмаклы туры призманың барлык кабыргалары тигез. Ян өслеге 12 м^2 га тигез. Биеклеген табыгыз.

21. Дүртпочмаклы төзек призманың ян өслеге 32 м^2 га, ә тулы өслеге 40 м^2 га тигез. Биеклеген табыгыз.

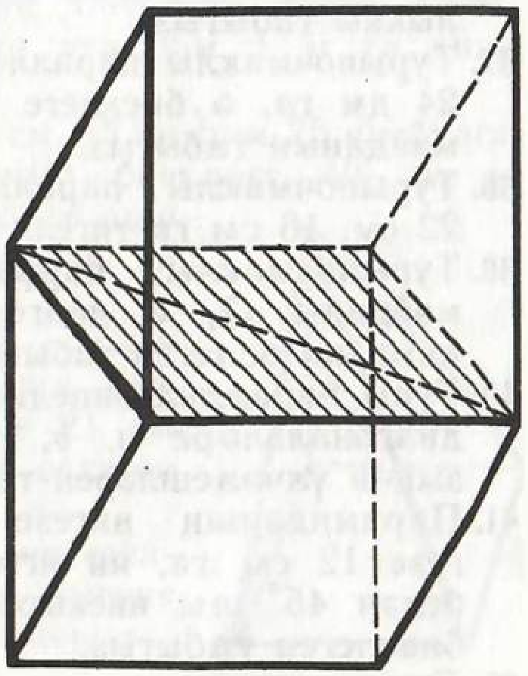
22*. Авыш призманың ян кабыргаларына перпендикуляр итеп, аның барлык ян кабыргаларын кисүче кисем үткәрелгән. Кисемнең периметры p га, ян кабыргалары l га тигез булса, призманың ян өслеген табыгыз.

23. Өчпочмаклы авыш призманың ян кабыргаларын эченә алган параллель турылар арасындагы ераклыклар 2 см, 3 см, һәм 4 см га, ә ян кабыргалары 5 см га тигез. Призманың ян өслеген табыгыз.

24. Нигезенең ягы a, ян кабыргасы b буенча 1) өчпочмаклы; 2) дүртпочмаклы; 3) алтыпочмаклы төзек призманың тулы өслеген табыгыз.

25. Өчпочмаклы төзек призмада нигезенең ягы һәм каршы яткан кабыргасының уртасы аша үткәрелгән яссылык нигез белән 45° лы почмак төзи. Нигезенең ягы l. Призманың ян өслеген табыгыз.

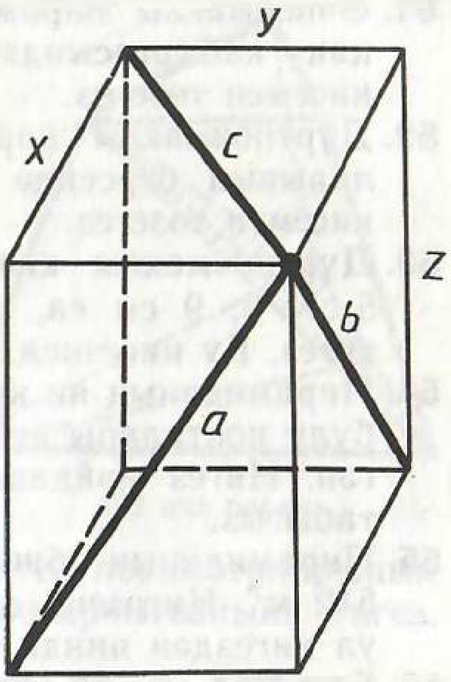
26. Параллелепипедның өч кырының мәйданнары 1 м^2, 2 м^2 һәм 3 м^2. Параллелепипедның тулы өслеге нәрсәгә тигез?



429 нчы рәсем

27. Параллелепипедның бер түбәдә очрашучы өч кабыргасы белән төзелгән почмаклары билгеле. Теләсә кайсы икенче түбәсендә очрашучы кабыргалары белән төзелгән почмакларны ничек табарга?
28. Параллелепипед нигезенең үзәкләрен тоташтыручы кисемтәнең ян кабыргаларга параллель икәнен исбатлагыз.
29. Туры параллелепипед нигезенең 6 м һәм 8 м лы яклары 30° лы почмак төзи, ян кабыргасы 5 м га тигез. Бу параллелепипедның тулы өслеген табыгыз.
30. Туры параллелепипедның нигез яклары 3 см һәм 8 см га тигез, алар арасындагы почмагы 60°. Ян өслеге 220 $см^2$ га тигез. Тулы өслеген табыгыз.
31. Туры параллелепипедның нигез яклары 3 см һәм 5 см, ә нигез диагональләренең берсе 4 см. Параллелепипедның кечерәк диагонале нигез яссылыгы белән 60° лы почмак төзи, аның зуррак диагонален табыгыз.
32. Һәр кабыргасы a га, ә нигезенең почмагы 60° ка тигез булган туры параллелепипедның диагональләрен табыгыз.
33*. Туры параллелепипедның ян кабыргасы 5 м га, нигезенең яклары 6 м һәм 8 м га, ә нигез диагональләренең берсе 12 м га тигез. Параллелепипедның диагональләрен табыгыз.
34. Туры параллелепипедның ян кабыргасы 1 м га, нигезенең яклары 23 дм һәм 11 дм га тигез, ә нигезенең диагональләре 2:3 чагыштырмасында. Диагональ кисемнәренең мәйданнарын табыгыз.
35. Турыпочмаклы параллелепипедның өч үлчәнеше 1) 1, 2, 2; 2) 2, 3, 6; 3) 6, 6, 7 буенча диагональләрен табыгыз.
36*. Кубның кабыргасы a га тигез. Кубның түбәсеннән аның башка ике түбәсен тоташтыручы диагоналенә кадәр ераклыкны табыгыз.
37. Турыпочмаклы параллелепипед нигезенең яклары 7 дм һәм 24 дм га, ә биеклеге 8 дм га тигез. Диагональ кисеменең мәйданын табыгыз.
38. Турыпочмаклы параллелепипедның өч үлчәнеше 10 см, 22 см, 16 см га тигез. Өслеген табыгыз.
39. Турыпочмаклы параллелепипедның биеклеге h, нигез мәйданы Q, ә диагональ кисеменең мәйданы M булса, аның ян өслеген табыгыз.
40. Туры параллелепипедның өч кырының бер түбәдә очрашучы диагональләре a, b, c га тигез. Параллелепипедның сызыкча үлчәнешләрен табыгыз (430 нчы рәсем).
41. Пирамиданың нигезе — тигезьянлы өчпочмак. Аның нигезе 12 см га, ян ягы 10 см га тигез. Ян кырлары нигез белән 45° лы икекырлы почмаклар төзиләр. Пирамиданың биеклеген табыгыз.
42. Пирамиданың нигезе — яклары 6 см һәм 8 см булган туры-

почмаклык. Пирамиданың һәр ян кабыргасы 13 см га тигез. Пирамиданың биеклеген исәпләп чыгарыгыз.



430 нчы рәсем

43 Пирамиданың нигезе булып төзек өчпочмак хезмәт итә; ян кырларының берсе нигезенә перпендикуляр, ә калган икесе α почмагы ясап авышкан. Ян кабыргалары нигез яссылыгы белән нинди почмак ясый?

44. Пирамиданың нигезендә гипотенузасы a га тигез булган турыпочмаклы өчпочмак ята. Һәр ян кабыргасы нигез яссылыгы белән β почмагы төзи. Пирамиданың биеклеген табыгыз.

45. Пирамиданың нигезе — катетлары 6 см һәм 8 см булган турыпочмаклы өчпочмак. Нигез янындагы икекырлы почмаклары 60° ка тигез. Пирамиданың биеклеген табыгыз.

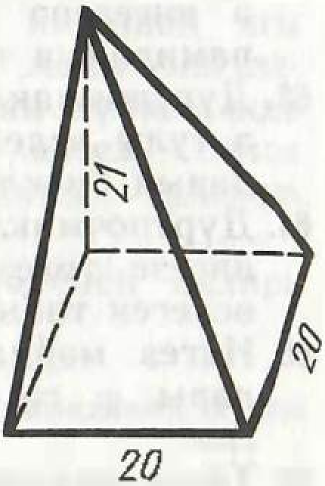
46. Пирамиданың нигезе — параллелограмм. Аның яклары 3 см һәм 7 см, ә бер диагонале 6 см; пирамиданың нигез диагональләренең кисешү ноктасы аша үтүче биеклеге 4 см га тигез. Пирамиданың ян кабыргасын табыгыз.

47*. Пирамиданың нигезе — диагональләре 6 м һәм 8 м га тигез булган ромб; пирамиданың биеклеге ромб диагональләренең кисешү ноктасы аша үтә һәм 1 м га тигез. Пирамиданың ян өслеген табыгыз.

48. Пирамиданың нигезе — яклары 40 см, 25 см һәм 25 см булган тигезьянлы өчпочмак. Пирамиданың биеклеге 40 см лы якка каршы яткан почмакның түбәсе аша үтә һәм 8 см га тигез. Пирамиданың ян өслеген табыгыз.

49. Пирамиданың нигезе — квадрат, аның биеклеге нигезенең бер түбәсе аша үтә. Нигезенең ягы 20 дм га, биеклеге 21 дм га тигез булса, пирамиданың ян өслеген табыгыз (431 нче рәсем).

50. Пирамиданың түбәсе һәм аның нигезендә бирелгән ике ноктасы аша үтүче яссылык белән пирамиданың кисемен төзегез.



431 нче рәсем

51. Өчпочмаклы пирамиданың нигез ягы һәм аңа каршы яткан кабыргасындагы нокта аша үтүче яссылык белән кисемен төзегез.

52. Дүртпочмаклы пирамиданың нигез ягы һәм ян кабыргаларының берсендә яткан нокта аша үтүче яссылык белән кисемен төзегез.

53. Дүртпочмаклы кисек пирамиданың бер нигезенең яклары 6, 7, 8, 9 см га, ә икенче нигезенең кечерәк ягы 5 см га тигез. Бу нигезнең калган якларын табыгыз.

54. Пирамиданың ян кабыргасы дүрт тигез кисәккә бүленгән һәм бүлү нокталары аша нигезгә параллель яссылыклар үткәрелгән. Нигез мәйданы 400 $см^2$ га тигез. Кисем мәйданнарын табыгыз.

55. Пирамиданың биеклеге 16 м га тигез. Нигез мәйданы 512 $м^2$. Нигезенә параллель кисемнең мәйданы 50 $м^2$ булса, ул нигездән нинди ераклыкта урнашкан?

56. Биеклеге h ка тигез булган өчпочмаклы төзек пирамидада нигезенең ягы a аша, каршы ятучы ян кабыргасына перпендикуляр итеп, яссылык үткәрелгән. Кисем мәйданын табыгыз.

57. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың биеклеге 7 см га, ә нигезенең ягы 8 см га тигез. Ян кабыргасын табыгыз.

58. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың түбә янындагы яссы почмагы α га тигез. Пирамиданың нигезе янындагы икекырлы x почмагын табыгыз.

59. Нигезенең бирелгән a ягы һәм b ян кабыргасы аша 1) өчпочмаклы; 2) дүртпочмаклы; 3) алтыпочмаклы төзек пирамиданың биеклеген табыгыз.

60. Нигезенең бирелгән a ягы һәм b биеклеге аша 1) өчпочмаклы; 2) дүртпочмаклы; 3) алтыпочмаклы төзек пирамиданың апофемасын табыгыз.

61. Нигезенең a ягы һәм h биеклеге аша 1) өчпочмаклы; 2) дүртпочмаклы; 3) алтыпочмаклы төзек пирамиданың тулы өслеген табыгыз.

62. Алтыпочмаклы төзек пирамиданың ян кабыргасы a га, ә нигезенә камаулы әйләнәнең радиусы r га тигез. Пирамиданың тулы өслеген табыгыз.

63. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың ян өслеге 14,76 $м^2$ га, ә тулы өслеге 18 $м^2$ га тигез. Нигезенең ягын һәм пирамиданың биеклеген табыгыз.

64. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың диагональ кисеме белән нигезе тигез зурлыкта. Нигезенең ягы a тигез булса, ян өслеген табыгыз.

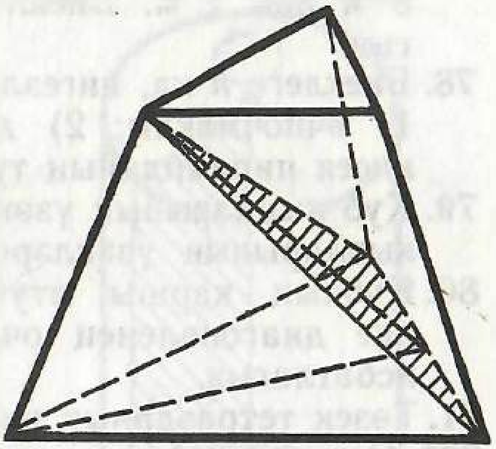
65. Нигез мәйданы Q га, нигез янындагы икекырлы почмаклары φ гә тигез булган пирамиданың ян өслеген табыгыз.

66. Төзек пирамиданың нигез мәйданы Q га, ә ян өслеге S ка

тигез. Пирамиданың нигезе янындагы икекырлы почмакларын табыгыз.

67. Өчпочмаклы төзек пирамиданың ян кабыргасы 10 см га, ян өслеге 144 см^2 га тигез. Пирамида нигезенең ягын һәм апофемасын табыгыз.

68. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың ян кабыргасы 5 см га, ә тулы өслеге 16 см^2 га тигез. Пирамида нигезенең ягын табыгыз.



432 нче рәсем

69. Төзек кисек пирамиданың ян өслеге нигез периметрларының ярымсуммасы белән апофемасының тапкырчыгышына тигез. Шуны исбатлагыз.

70. Дүртпочмаклы төзек кисек пирамиданың биеклеге 7 см га тигез. Нигезләренең яклары 10 см һәм 2 см. Пирамиданың ян кабыргасын табыгыз.

71. Өчпочмаклы төзек кисек пирамида нигезләренең яклары 4 дм һәм 1 дм. Ян кабыргасы 2 дм. Пирамиданың биеклеген табыгыз.

72. Дүртпочмаклы төзек кисек пирамиданың биеклеге 2 см га, нигезләренең яклары 3 см һәм 5 см га тигез. Пирамиданың диагонален табыгыз.

73. Өчпочмаклы төзек кисек пирамида нигезләренең яклары 2 см һәм 6 см. Ян кыры зуррак нигез яссылыгы белән 60° лы почмак ясый. Биеклеген табыгыз.

74. Өчпочмаклы төзек кисек пирамиданың зуррак нигезенең ягы *a* га, кечерәгенеке *b* га тигез. Ян кабыргасы нигез белән 45° лы почмак ясый. Пирамиданың ян кабыргасы һәм күчәре[1] аша үтүче кисемнең мәйданын табыгыз.

75. Дүртпочмаклы төзек кисек пирамиданың биеклеге 4 см га тигез. Нигезләренең яклары 2 см һәм 8 см га тигез. Диагональ кисемнәренең мәйданнарын табыгыз.

76. Өчпочмаклы төзек кисек пирамидада аскы нигезнең ягы 8 м, өскесенеке — 5 м, ә биеклеге 3 м. Аскы нигезенең ягы һәм өске нигезенең аңа каршы яткан түбәсе аша кисем үткәрегез. Кисем мәйданын һәм кисем белән аскы нигез арасындагы икекырлы почмакны табыгыз (432 нче рәсем).

77. Дүртпочмаклы төзек кисек пирамида нигезләренең яклары

---

[1] Төзек кисек пирамиданың күчәре тиңдәшле тулы пирамиданың күчәре белән тәңгәл килә.

8 м һәм 2 м. Биеклеге 4 м га тигез. Тулы өслеген табыгыз.

78. Биеклеге *h* ка, нигезләренең яклары *a* һәм *b* га тигез булган 1) өчпочмаклы; 2) дүртпочмаклы; 3) алтыпочмаклы төзек кисек пирамиданың тулы өслеген табыгыз.

79. Куб кырларының үзәкләре — октаэдрның түбәләре, ә октаэдр кырларының үзәкләре кубның түбәләре икәнен исбатлагыз.

80. Кубның каршы ятучы кырларының параллель булмаган ике диагоналенең очлары тетраэдрның түбәләре булганын исбатлагыз.

81. Төзек тетраэдрның икекырлы почмакларын табыгыз.

82*. Октаэдрның икекырлы почмакларын табыгыз.

83. Төзек тетраэдрның нинди симметрия яссылыклары бар?

84*. Төзек октаэдрның, додекаэдрның һәм икосаэдрның ничә симметрия яссылыгы бар?

§ 20. ӘЙЛӘНҮ ҖИСЕМНӘРЕ

181. ЦИЛИНДР

Параллель күчергәндә тәңгәл килә торган, бер яссылыкта ятмаган ике түгәрәктән һәм бу түгәрәкләрнең тиңдәшле нокталарын тоташтыручы барлык кисемтәләрдән торган җисем *цилиндр* (төгәлрәк әйткәндә, түгәрәк цилиндр) дип атала (433 нче рәсем). Түгәрәк әйләнәләренең тиңдәшле нокталарын тоташтыручы кисемтәләр *цилиндрның төзүчеләре* дип атала.

Параллель күчерү хәрәкәт булганга күрә, ***цилиндрның нигезләре тигез.***

Параллель күчерүдә яссылык параллель яссылыкка (яки үзенә) күчкәнлектән, ***цилиндрның нигезләре параллель яссылыкларда яталар.***

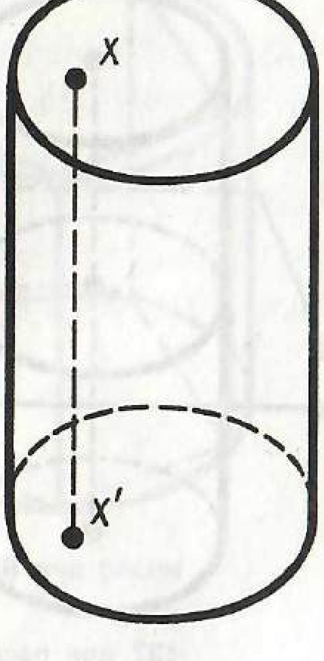
Параллель күчерүдә нокталар параллель (яки тәңгәл килүче) турылар буйлап бер үк ераклыкка күчә, шуңа күрә ***цилиндрның төзүчеләре параллель һәм тигез.***

Цилиндрның өслеге нигезләрдән һәм ян өслектән гыйбарәт. Ян өслек төзүчеләрдән төзелгән.

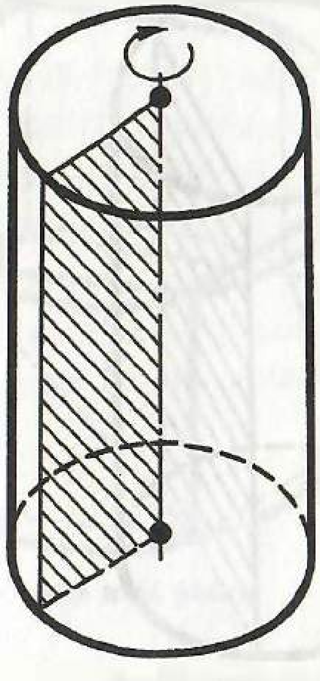
Цилиндрның төзүчеләре нигез яссылыкларына перпендикуляр булсалар, ул *туры цилиндр* дип атала.

Киләчәктә без бары тик туры цилиндрны гына карарбыз һәм кыскалык өчен цилиндр дип кенә сөйләрбез.

Туры цилиндрны, турыпочмаклыкның бер ягын күчәр итеп



433 нче рәсем



434 нче рәсем

алып, шул як тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан дип карарга мөмкин (434 нче рәсем).

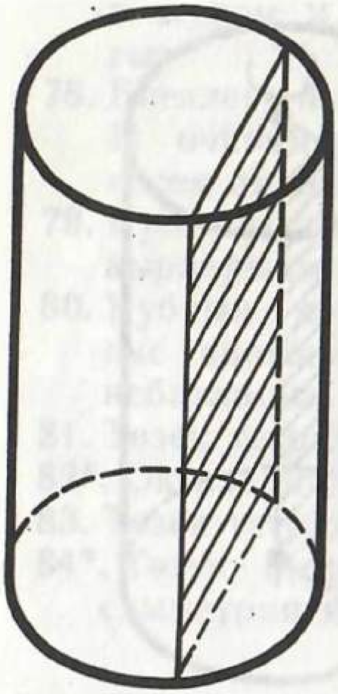
Цилиндрның нигез радиусы аның *радиусы* дип атала. Нигез яссылыклары арасындагы ераклык цилиндрның *биеклеге* дип атала. Нигезләренең үзәкләре аша үтүче туры цилиндрның *күчәре* дип атала. Ул төзүчеләргә параллель.

182. ЦИЛИНДРНЫҢ ЯССЫЛЫКЛАР БЕЛӘН КИСЕМНӘРЕ

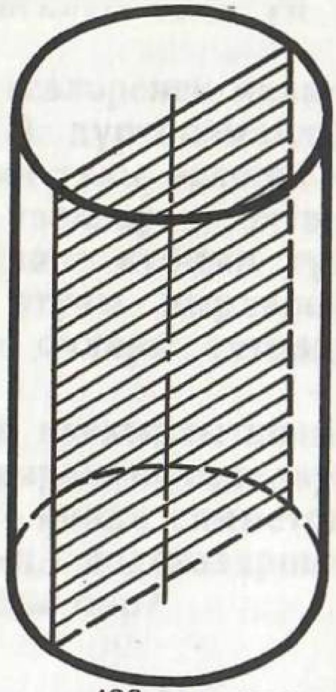
Цилиндрның күчәренә параллель яссылык белән киceмe турыпочмаклыктан гыйбарәт (435 нче рәсем). Аның ике ягы — цилиндрның төзүчеләре, ә калган икесе — нигезләренең параллель хордалары. Аерым алганда, күчәр кисеме турыпочмаклык була. Бу — цилиндрның аның күчәре аша үтүче яссылык белән кисеме (436 нчы рәсем).

Мәсьәлә (2). Цилиндрның күчәр кисеме — мәйданы Q га тигез булган квадрат. Цилиндр нигезенең мәйданын табыгыз.

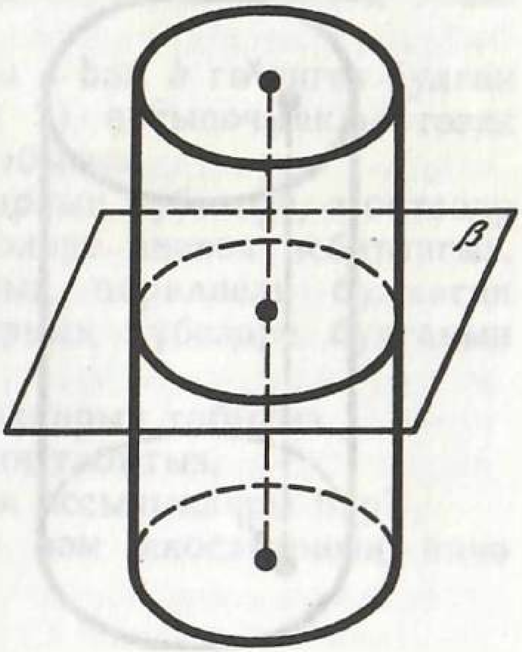
Чишү. Квадратның ягы $\sqrt{Q}$ га тигез. Ул — нигезнең диаметрына тигез. Шуңа күрә нигез мәйданы $\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2=\frac{\pi Q}{4}$.



435 нче рәсем



436 нчы рәсем



437 нче рәсем

Теорема 20.1. ***Цилиндрның нигез яссылыгына параллель яссылык аның ян өслеген нигез әйләнәсенә тигез булган әйләнә буенча кисеп үтә.***

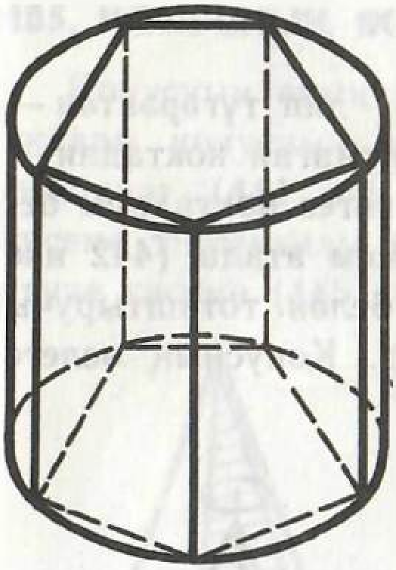
Исбатлау. β — цилиндрның нигез яссылыгына параллель яссылык булсын (437 нче рәсем). Цилиндрның күчәре юнәлешендә β яссылыгын цилиндрның нигез яссылыгы белән тәңгәл китерә торган параллель күчерү ян өслекнең β яссылыгы белән кисемен нигез әйләнәсе белән тәңгәл китерә. Теорема исбатланды.

183. КАМАУЛЫ ҺӘМ КАМАУЧЫ ПРИЗМАЛАР

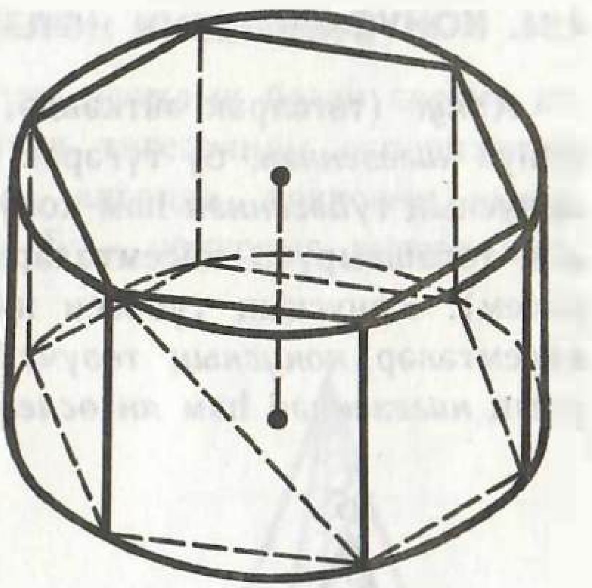
Нигез яссылыклары — цилиндрның нигез яссылыклары, ә ян кабыргалары цилиндрның төзүчеләре булган призма цилиндрга *камаулы призма* дип атала (438 нче рәсем).

Мәсьәлә (7). Цилиндрга алтыпочмаклы төзек призма камалган. Нигез радиусы цилиндрның биеклегенә тигез булса, аның ян кырының диагонале белән цилиндр күчәре арасындагы почмакны табыгыз.

Чишү. Әйләнәгә камаулы төзек алтыпочмакның ягы радиуска тигез булганга күрә, призманың ян кырлары — квадратлар (439 нчы рәсем). Призманың кабыргалары цилиндрның күчәренә параллель, шуңа күрә кырының диагонале белән цилиндрның күчәре арасындагы почмак шул



438 нче рәсем

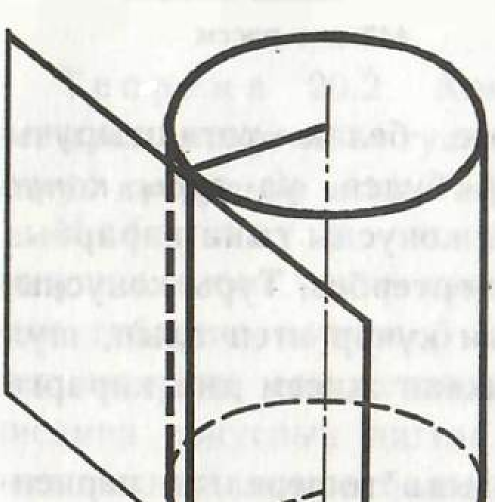


439 нчы рәсем

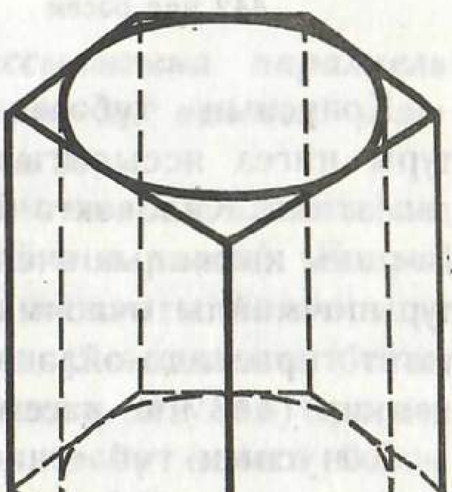
диагональ белән ян кабырга арасындагы почмакка тигез була. Ә бу почмак 45° ка тигез, чөнки кырлары — квадратлар.

Цилиндрның төзүчесе аша үтеп, бу төзүчене эченә алган һәм күчәр кисеменә перпендикуляр яссылык *цилиндрга орынма яссылык* дип атала (440 нчы рәсем).

Нигез яссылыклары — цилиндрның нигез яссылыклары булган, ә ян кырлары цилиндрга орынган призма *цилиндрны камаучы призма* дип атала (441 нче рәсем).



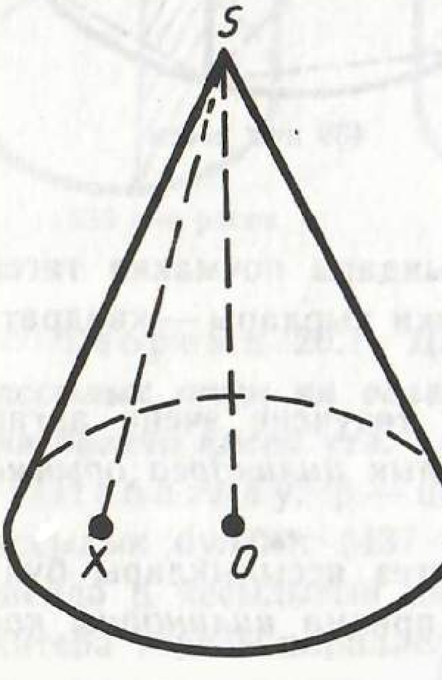
440 нчы рәсем



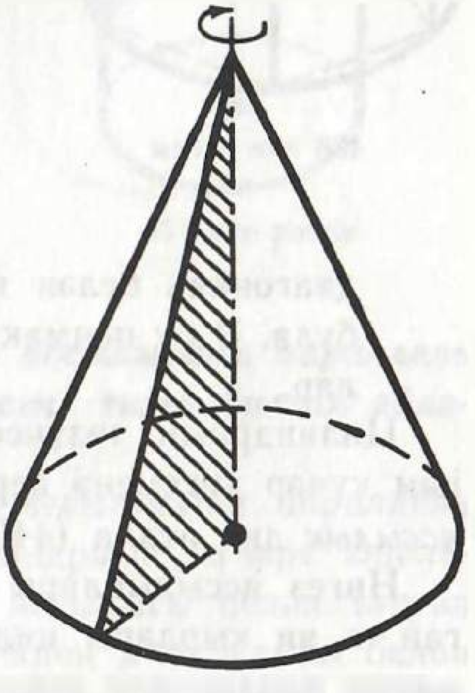
441 нче рәсем

184. КОНУС

Конус (төгәлрәк әйткәндә, *түгәрәк конус*) дип түгәрәктән — конус *нигезеннән*, бу түгәрәк яссылыгында ятмаган ноктадан — конусның *түбәсеннән* һәм конусның түбәсен нигез нокталары белән тоташтыручы кисемтәләрдән торган җисем атала (442 нче рәсем). Конусның түбәсен нигез әйләнәсе белән тоташтыручы кисемтәләр *конусның төзүчеләре* дип атала. Конусның өслеге аның *нигезеннән* һәм *ян өслегеннән* тора.



442 нче рәсем



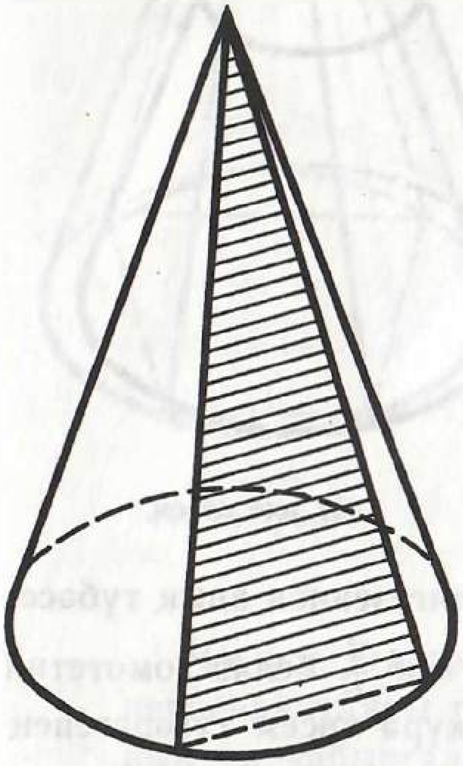
443 нче рәсем

Конусның түбәсен нигезенең үзәге белән тоташтыручы туры нигез яссылыгына перпендикуляр булса, ул *туры конус* дип атала. Киләчәктә без бары тик туры конусны гына карарбыз һәм аны кыскалык өчен конус дип кенә йөртербез. Туры конусны, турыпочмаклы өчпочмакның бер катетын күчәр итеп алып, шул катет тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан җисем дип карарга мөмкин (443 нче рәсем).

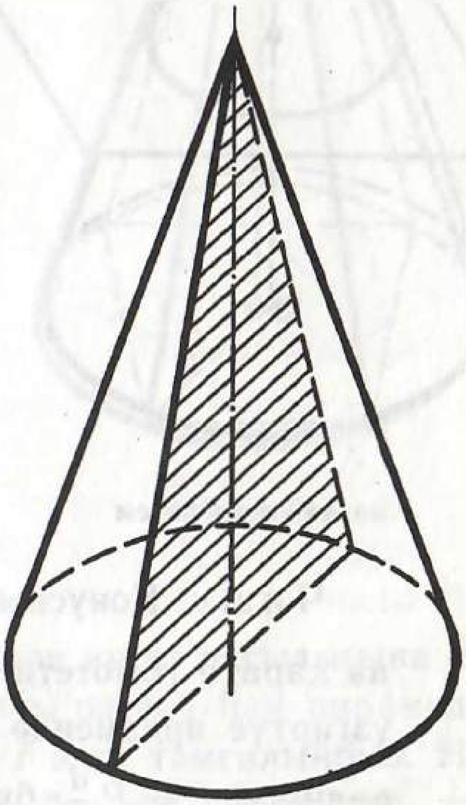
Конусның түбәсеннән нигез яссылыгына төшерелгән перпендикуляр аның *биеклеге* дип атала. Тулы конус биеклегенең нигезе нигезенең үзәге белән тәңгәл килә. Конусның биеклеген эченә алган туры *туры түгәрәк конусның күчәре* дип атала.

185. КОНУСНЫҢ ЯССЫЛЫКЛАР БЕЛӘН КИСЕМНӘРЕ

Конусның аның түбәсе аша үтүче яссылык белән киселеме ян яклары конусның төзүчеләре булган тигезьянлы өчпочмактан гыйбарәт (444 нче рәсем). Аерым алганда, конусның күчәр кисеме тигезьянлы өчпочмак була. Бу — конусның күчәре аша үтүче кисеме (445 нче рәсем).



444 нче рәсем

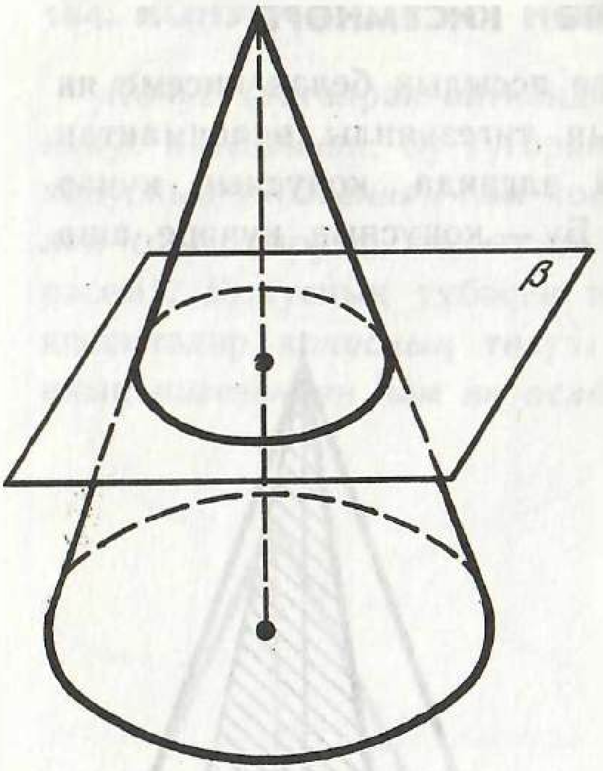


445 нче рәсем

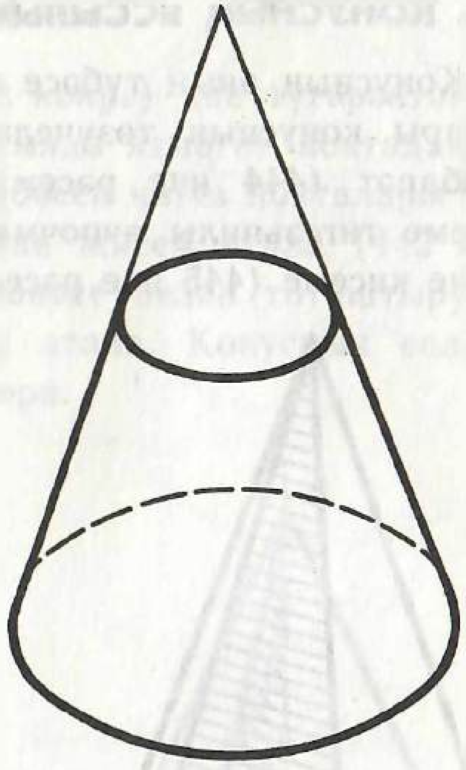
Т е о р е м а 20.2. ***Конусның нигез яссылыгына параллель яссылык конусны — түгәрәк буенча, ә аның ян өслеген үзәге конус күчәрендә яткан әйләнә буенча кисеп үтә.***

И с б а т л а у. β — конусның нигез яссылыгына параллель һәм конусны кисеп үтүче яссылык булсын (446 нчы рәсем). Конусның түбәсенә карата β яссылыгын нигез яссылыгы белән тәңгәл китерүче гомотетия үзгәртүе конусның β яссылыгы белән кисемен конусның нигезе белән тәңгәл китерә. Шулай булгач, яссылыкның конус белән кисеме — түгәрәк, ә ян өслеге белән кисеме үзәге конус күчәрендә яткан әйләнә була. Теорема исбатланды.

М ә с ь ә л ә (15). Конус түбәсеннән d ераклыкта нигезенә параллель яссылык белән кистерелгән. Конусның нигез радиусы R, биеклеге H булса, кисем мәйданын табыгыз.



446 нчы рәсем



447 нче рәсем

Чишү. Конусның кисеме конус нигезеннән аның түбәсенә карата гомотетия коэффициенты $k = \frac{d}{H}$ белән гомотетия үзгәртүе ярдәмендә табыла. Шуңа күрә кисем түгәрәгенең радиусы $r = R\frac{d}{H}$ була. Шулай булгач, кисем мәйданы

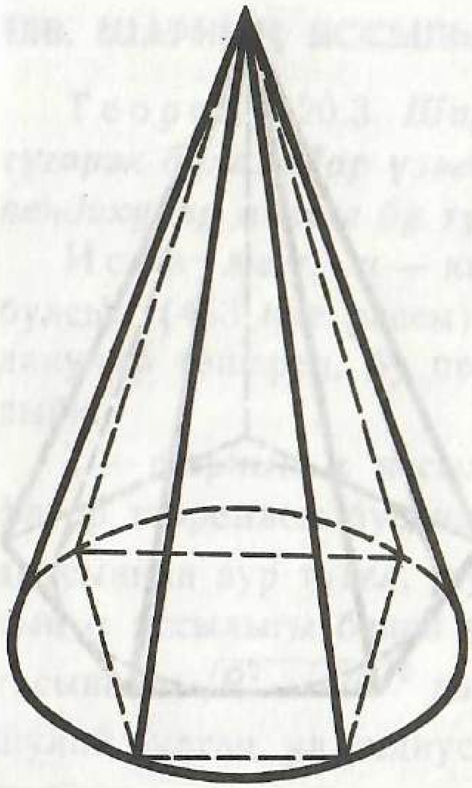
$$S = \pi R \frac{d^2}{H^2}.$$

Конусның күчәренә перпендикуляр яссылык аннан кечерәк конус кисеп ала. Бу конусның калган икенче кисәге *кисек конус* дип атала (447 нче рәсем).

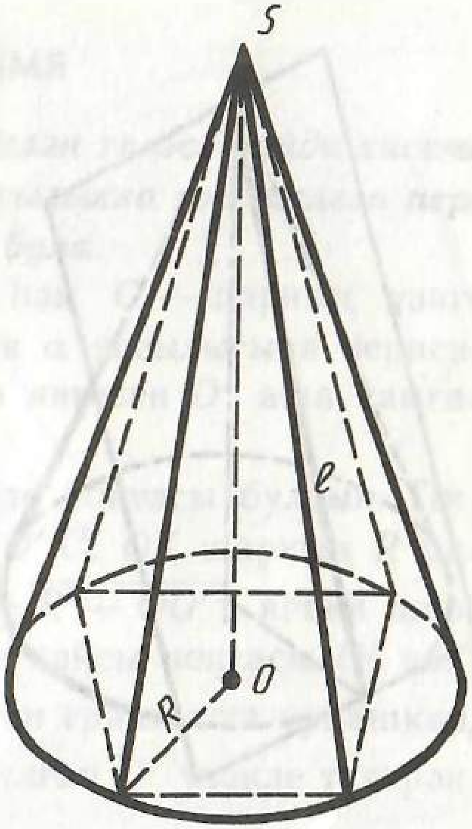
186. КАМАУЛЫ һӘМ КАМАУЧЫ ПИРАМИДАЛАР

Нигезе — конус нигезендәге әйләнәгә камалган күппочмак, ә түбәсе конус түбәсе булган пирамида конуска *камаулы пирамида* дип атала (448 нче рәсем). Конуска камаулы пирамиданың ян кабыргалары конусның төзүчеләре була.

Мәсьәлә (25). Пирамиданың барлык ян кабыргалары тигез. Аның ниндидер конуска камаулы пирамида икәнен исбатлагыз.



448 нче рәсем



449 нчы рәсем

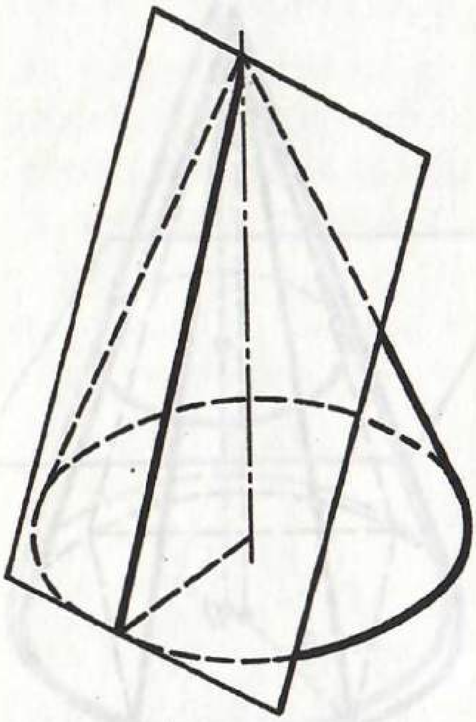
Чишү. Пирамиданың түбәсеннән нигез яссылыгына SO перпендикуляры төшерәбез (449 нчы рәсем) һәм пирамиданың ян кабыргалары озынлыгын l аша тамгалыйбыз. Нигезенең түбәләре O ноктасыннан бер үк ераклыкта яталар:

$$R=\sqrt{l^2-OS^2}.$$

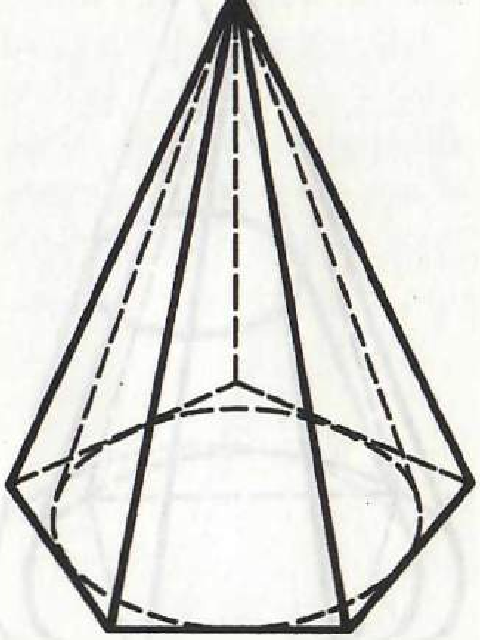
Моннан пирамиданың конуска камалганлыгы килеп чыга, аның түбәсе — пирамида түбәсе, ә нигезе — O үзәкле, R радиуслы түгәрәк.

Конусның төзүчесе аша үтеп, бу төзүчене эченә алган һәм күчәр кисеме яссылыгына перпендикуляр яссылык *конуска орынма яссылык* дип атала (450 нче рәсем).

Нигезе конус нигезен камаучы күппочмак булган, ә түбәсе конус түбәсе белән тәңгәл килгән пирамида *конусны камаучы пирамида* дип атала (451 нче рәсем). Камаучы пирамиданың ян кыр яссылыклары конуска орынма яссылыклар булып торалар.



450 нче рәсем

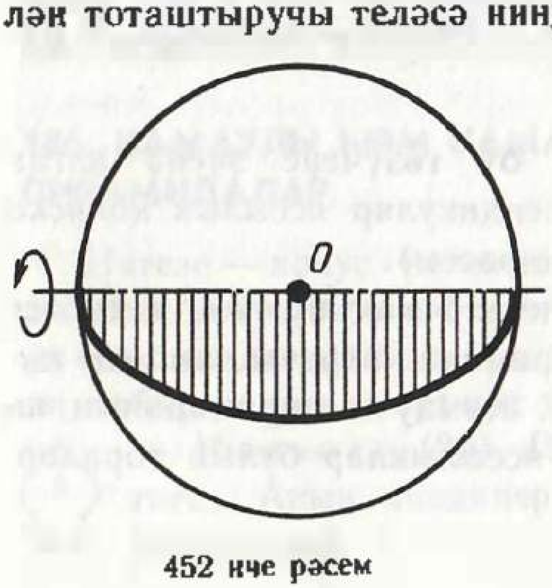


451 нче рәсем

187. ШАР

Пространствоның бирелгән ноктасыннан ераклыгы бирелгән ераклыктан артмаган барлык нокталарыннан торган җисем *шар* дип атала. Бу нокта үзе — шарның *үзәге* дип, ә бирелгән ераклык *шарның радиусы* дип атала.

Шарның чиге *шар өслеге* яки *сфера* дип атала. Шулай итеп, шарның үзәгеннән радиус ераклыгындагы барлык нокталары сфера нокталары була. Шарның үзәген шар өстендәге нокта белән тоташтыручы теләсә нинди кисемтә радиус дип атала.



452 нче рәсем

Шар үзәге аша үтеп, шар өслегенең ике ноктасын тоташтыручы кисемтә *диаметр* дип атала. Теләсә кайсы диаметрның очлары *шарның диаметраль каршы ятучы нокталары* дип атала.

Шар цилиндр һәм конус кебек әйләнү җисеме булып тора. Ул ярымтүгәрәкне күчәр буларак диаметры тирәсендә әйләндерүдән килеп чыга (452 нче рәсем).

188. ШАРНЫҢ ЯССЫЛЫК БЕЛӘН КИСЕМЕ

Теорема 20.3. ***Шарның яссылык белән теләсә нинди киселе түгәрәк була. Шар үзәгеннән кисүче яссылыкка төшерелгән перпендикуляр нигезе бу түгәрәкнең үзәге була.***

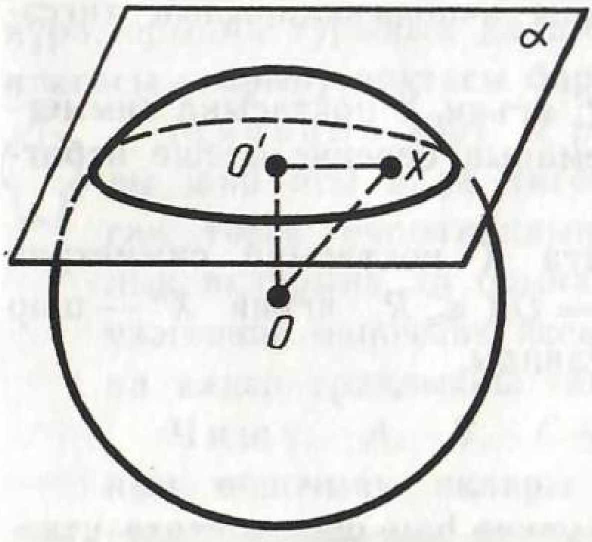
Исбатлау. α — кисүче яссылык һәм O — шарның үзәге булсын (453 нче рәсем). Шар үзәгеннән α яссылыгына перпендикуляр төшереп, бу перпендикулярның нигезен O' аша тамгалыйк.

X — шарның α яссылыгындагы ирекле ноктасы булсын. Пифагор теоремасы буенча $OX^2 = OO'^2 + O'X^2$. OX шарның R радиусыннан зур түгел, шуңа күрә $O'X \leqslant \sqrt{R^2 - OO'^2}$, ягъни шарның α яссылыгы белән киселенең теләсә кайсы ноктасы O' ноктасыннан $\sqrt{R^2 - OO'^2}$ дан да зур булмаган ераклыкта урнашкан, шулай булгач, ул радиусы $\sqrt{R^2 - OO'^2}$ булган O' үзәкле түгәрәктә ята.

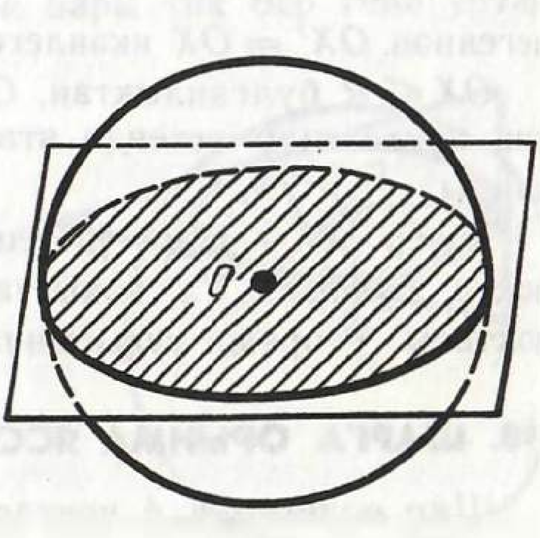
Киресенчә, бу түгәрәкнең теләсә кайсы X ноктасы шар ноктасы була. Ә бу — шарның α яссылыгы белән киселе O' үзәкле түгәрәк була дигән сүз. Теорема исбатланды.

Шарның үзәге аша үтүче яссылык *диаметраль яссылык* дип атала. Шарның диаметраль яссылык белән киселе — *зур түгәрәк* дип, ә сфера белән киселе *зур әйләнә* дип атала (454 нче рәсем).

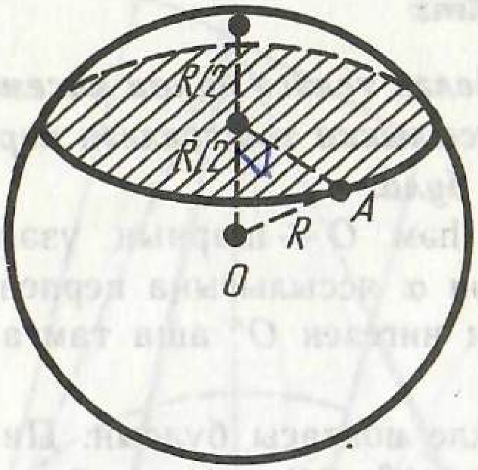
Мәсьәлә (30). Шар радиусының уртасы аша шул радиуска перпендикуляр яссылык үткәрелгән. Килеп чыккан



453 нче рәсем



454 нче рәсем



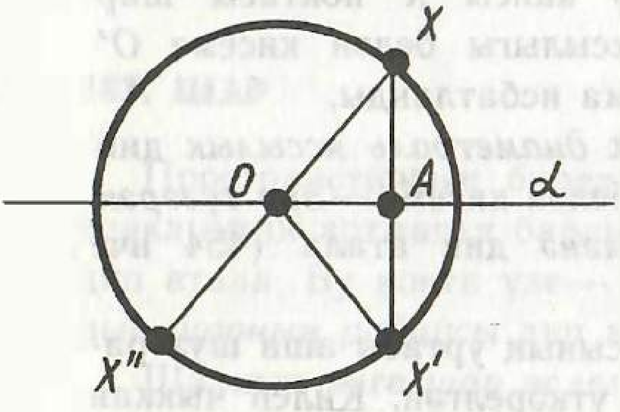
455 нче рәсем

кисем мәйданының зур түгәрәк мәйданына чагыштырмасы нәрсәгә тигез?

Чишү. Шарның радиусы R булса (455 нче рәсем), кисем түгәрәгенең радиусы $\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=R\sqrt{\frac{3}{4}}$ була. Бу түгәрәк мәйданының зур түгәрәк мәйданына чагыштырмасы $\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2:\pi R^2=\frac{3}{4}$ була.

189. ШАРНЫҢ СИММЕТРИЯСЕ

Теорема 20.4. ***Шарның теләсә кайсы диаметраль яссылыгы аның симметрия яссылыгы була. Шарның үзәге аның симметрия үзәге була.***



456 нчы рәсем

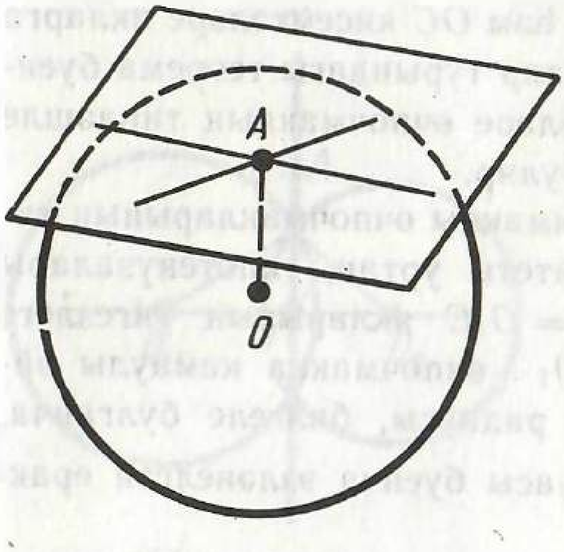
Исбатлау. α — диаметраль яссылык һәм X — шарның ирекле ноктасы булсын (456 нчы рәсем). α яссылыгына карата X ноктасына симметрик булган X' ноктасы төзик. XX' кисемтәсе α яссылыгына перпендикуляр һәм бу яссылык белән үзенең уртасында (A ноктасында) кисешә. OAX һәм OAX' турыпочмаклы өчпочмакларының тигезлегеннән $OX'=OX$ икәнлеге чыга.

$OX\leqslant R$ булганлыктан, $OX'\leqslant R$, ягъни X ноктасына симметрик нокта шар өстендә ята. Теореманың беренче өлеше исбатланды.

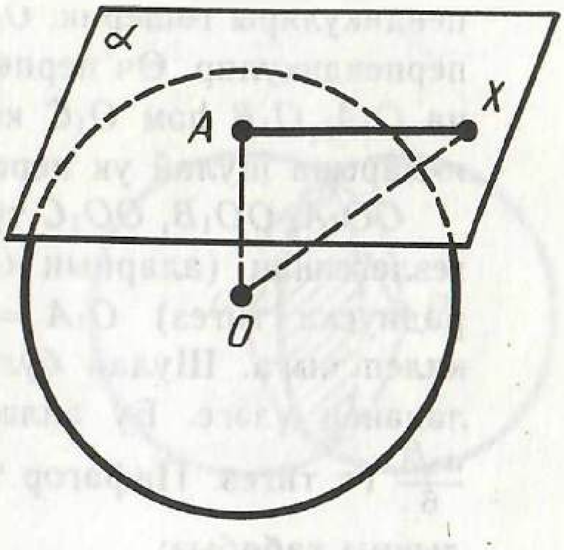
Хәзер X'' — шар үзәгенә карата X ноктасына симметрик нокта булсын. Ул вакытта $OX''=OX\leqslant R$, ягъни X'' — шар ноктасы. Теорема тулысынча исбатланды.

190. ШАРГА ОРЫНМА ЯССЫЛЫК

Шар өслегенең A ноктасы аша үтүче һәм шул ноктага үткәрелгән радиуска перпендикуляр яссылык *орынма яссылык* дип атала. A ноктасы *орыну ноктасы* дип атала (457 нче рәсем).



457 нче рәсем



458 нче рәсем

Теорема 20.5. ***Орынма яссылыкның шар белән бары тик бер генә уртак ноктасы — орыну ноктасы була.***

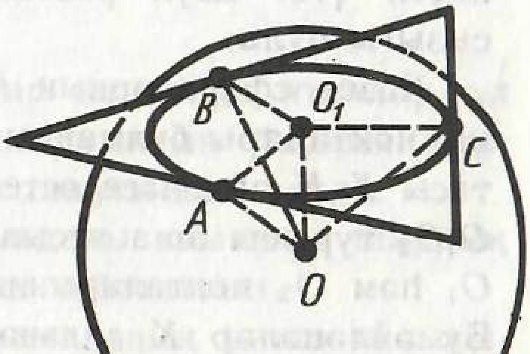
Исбатлау. α — шарга орынма яссылык, A — орыну ноктасы булсын (458 нче рәсем). α яссылыгында A белән тәңгәл килмәгән нинди дә булса X ноктасы алыйк. OA — перпендикуляр, OX — авышма булганлыктан,

$$OX > OA = R.$$

Шулай булгач, X ноктасы шар ноктасы түгел. Теорема исбатланды.

Шарга орынма яссылык өстендә яткан һәм аның орыну ноктасы аша үткән туры *шарга* шул ноктадагы *орынма* дип атала. Орынма яссылыкның шар белән бер генә уртак ноктасы булганга күрә, орынма турының да шар белән бары тик бер генә уртак ноктасы — орыну ноктасы бар.

Мәсьәлә (39). R радиуслы шар ягы a га тигез булган төзек өчпочмакның барлык якларына да орына. Шар үзәгеннән өчпочмак яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.



459 нчы рәсем

Чишү. A, B, C — шарның өчпочмак яклары белән орыну нокталары булсын (459 нчы рәсем). Шар үзәгеннән өчпочмак яссылыгына OO_1 пер-

пендикуляры төшерик. OA, OB һәм OC кисемтәләре якларга перпендикуляр. Өч перпендикуляр турындагы теорема буенча O_1A, O_1B һәм O_1C кисемтәләре өчпочмакның тиңдәшле якларына шулай ук перпендикуляр.

OO_1A, OO_1B, OO_1C турыпочмаклы өчпочмакларының тигезлегеннән (аларның OO_1 катеты уртак, гипотенузалары радиуска тигез) $O_1A = O_1B = O_1C$ якларының тигезлеге килеп чыга. Шулай булгач, O_1 — өчпочмакка камаулы әйләнәнең үзәге. Бу әйләнәнең радиусы, билгеле булганча, $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ га тигез. Пифагор теоремасы буенча эзләнелгән ераклыкны табабыз:

$$\sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}.$$

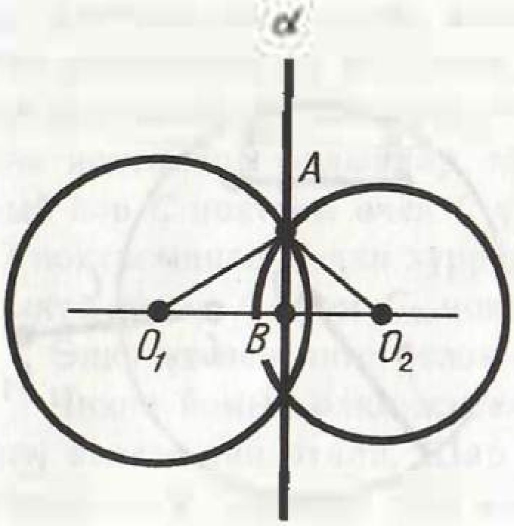
191. ИКЕ СФЕРАНЫҢ КИСЕШҮЕ

Теорема 20.6. ***Ике сфераның кисешү сызыгы әйләнә була.***

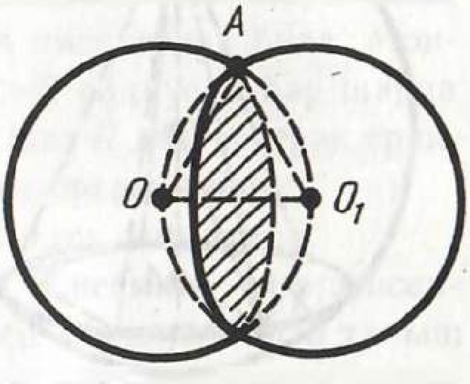
Исбатлау. O_1 һәм O_2 — сфераларның үзәкләре, A — аларның кисешү ноктасы булсын (460 нчы рәсем). A ноктасы аша O_1O_2 турысына перпендикуляр α яссылыгы үткәрик.

α яссылыгының O_1O_2 турысы белән кисешү ноктасын B хәрефе белән тамгалыйк. 20.3 теоремасы буенча α яссылыгы ике сфераны да A ноктасы аша үтүче B үзәкле K әйләнәсе буенча кисеп үтә. Шул рәвешле, K әйләнәсе сфераларның кисешү сызыгы була.

Хәзер сфераларның K әйләнәсе нокталарыннан башка кисешү нокталары булмавын күрсәтербез. Сфераларның кисешү ноктасы X K әйләнәсе өстендә ятмый дип уйлыйк. X ноктасы һәм O_1O_2 турысы аша яссылык үткәрәбез. Ул сфераларны үзәкләре O_1 һәм O_2 нокталарында булган әйләнәләр буенча кисеп үтәр. Бу әйләнәләр K әйләнәсенеке булган ике ноктада һәм тагын X ноктасында кисешәләр: Ләкин ике әйләнәнең икедән күбрәк уртак ноктасы булуы мөмкин түгел. Без каршылыкка очрадык. Шулай итеп, безнең сфераларның кисешмәсе әйләнә (K) була. Теорема исбатланды.



460 нчы рәсем



461 нче рәсем

Мәсьәлә (44). R радиуслы ике тигез шар берсенең үзәге икенчесенең өслегендә ятарлык итеп урнашкан. Аларның өслекләренең кисешү сызыгының озынлыгын табыгыз.

Чишү. Шарларның үзәкләре аша кисем үткәрик (461 нче рәсем). Мәсьәләдә сүз барган сызык әйләнә була (теорема 20.6). Аның радиусы ягы R га тигез булган тигезъяклы OAO_1 өчпочмагының биеклегенә тигез. Биеклеге $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ гә тигез. Шулай булгач, сызыкның озынлыгы $\pi R\sqrt{3}$ га тигез.

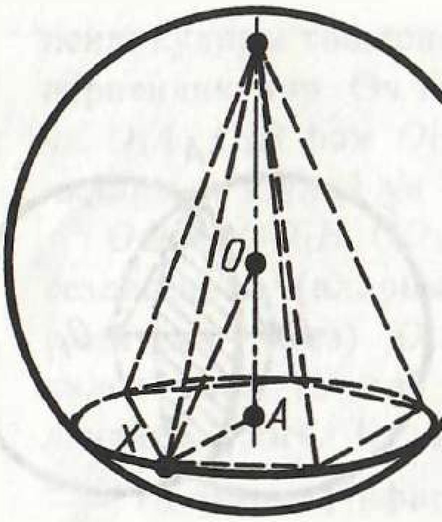
192. КАМАУЛЫ ҺӘМ КАМАУЧЫ КҮПКЫРЛЫКЛАР

Күпкырлыкның барлык түбәләре шар өслегендә ятсалар, ул *шарга камаулы* дип атала. Әгәр күпкырлыкның барлык кырлары да шарга орынсалар, ул *шарны камаучы* дип атала.

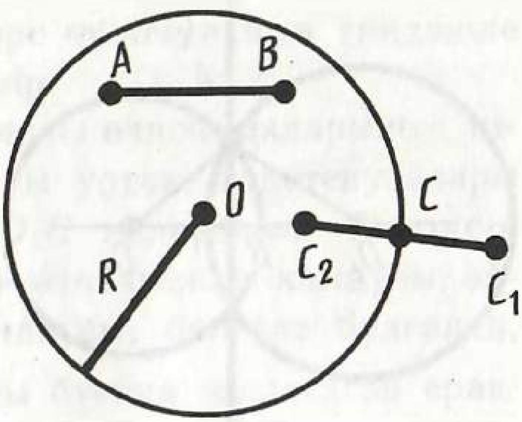
Мәсьәлә (47). Төзек пирамиданы камаучы шарның үзәге аның күчәре өстендә ятканын исбатлагыз.

Чишү. Шар үзәге O дан пирамиданың нигез яссылыгына OA перпендикуляры төшерик (462 нче рәсем). X — пирамида нигезенең теләсә кайсы бер түбәсе булсын. Пифагор теоремасы буенча

$$AX^2 = OX^2 - OA^2 = R^2 - OA^2.$$



462 нче рәсем



463 нче рәсем

Шул рәвешле, AX пирамида нигезенең теләсә кайсы түбәсе өчен бертөрле. Бу исә A ноктасы пирамиданың нигезен камаучы әйләнәнең үзәге була дигән сүз. Шулай булгач, шарның үзәге O пирамиданың күчәре өстендә ята.

193. ГЕОМЕТРИЯДӘ ҖИСЕМ ҺӘМ АНЫҢ ӨСЛЕГЕ ТӨШЕНЧӘСЕ ТУРЫНДА

Без алдагы темаларны аңлатканда сезгә инде таныш күрсәтмәле күзаллауларны истә тотып, *җисем* һәм *җисемнең өслеге* әйтелешләрен еш кулландык. Хәзер геометрик җисем һәм аның өслеге төшенчәсенең төгәл билгеләмәсен бирербез.

Ноктаны үзәк итеп алып төзелгән шар тулысынча фигураныкы булса, ул фигураның *эчке* ноктасы дип атала. Фигураның барлык нокталары эчке нокталар булып, аның теләсә кайсы ике ноктасын тулысынча шул фигураныкы булган сынык сызык белән тоташтырып булса, ул фигура *өлкә* дип атала. Бу билгеләмәне шар мисалында аңлатып бирик (463 нче рәсем).

Шарның шар үзгеннән R дан кечерәк булган r ераклыктагы һәр ноктасы аның эчке ноктасы була, чөнки үзәге бу ноктада, ә радиусы $R - r$ булган шар башта бирелгән R радиуслы шар эчендә урнаша. Шарның үзәктән R дан кечерәк ераклыктагы барлык нокталары өлкә төзиләр. Чыннан да, теләсә нинди ике нокта: A һәм B барлык нокталары үзәктән R дан кечерәк ераклыкта булган AB кисемтәсе белән тоташтырылалар.

Әгәр үзәге пространствоның бирелгән ноктасындагы шар

бу фигураныкы булган нокталарга да һәм фигураныкы булмаган нокталарга да ия булса, аны бирелгән фигураның *чик ноктасы* дип атыйлар. Шарның O дан R ераклыктагы нокталары аның чик нокталары булырлар, ягъни шарның чиге сфера була. Мондый һәр C ноктасы өчен C үзәкле һәм $r>0$ радиуслы һәр шарда O ноктасыннан R дан зуррак ераклыкта һәм R дан кечерәк ераклыкта яткан C_1 һәм C_2 нокталарын күрсәтергә мөмкин.

Өлкә үзенең чиге белән бергә *йомык өлкә* дип атала.

Чикле йомык өлкә *җисем* дип атала. Җисемнең чиге *җисемнең өслеге* дип атала. Шар җисемнең бер мисалы. Сезгә таныш күпкырлык, цилиндр һәм конус шулай ук җисемгә мисал булып торалар.

Пространстводагы кебек үк, яссылыкта да фигураның эчке нокталары, чик нокталары һәм өлкә төшенчәсе кертелә. Өлкәнең чик нокталары өлкәнең чиген төзиләр. R радиуслы түгәрәктә үзәктән R дан кечерәк ераклыктагы нокталар — эчке нокталар, ә R ераклыктагы нокталар чик нокталар була. Түгәрәк — йомык өлкә.

Яссы күппочмак — чиге күппочмак булган яссылыктагы чикле йомык өлкә ул.

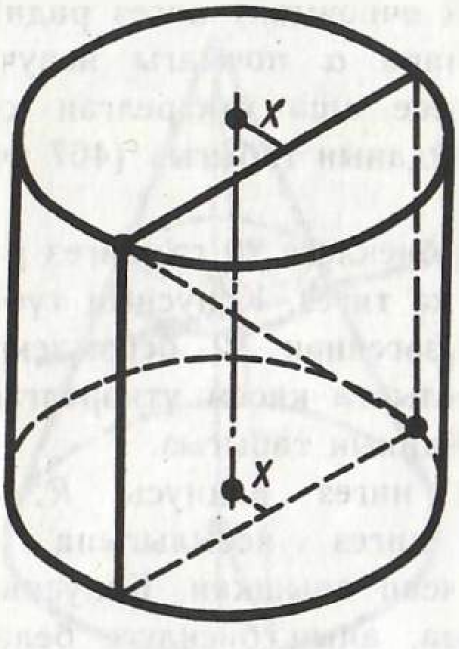
? КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Түгәрәк цилиндр (цилиндрның төзүчесе, цилиндрның нигезләре, ян өслеге) дип нәрсәгә әйтәләр? Аңлатып бирегез.
2. Нинди цилиндр туры цилиндр дип атала?
3. Цилиндрның радиусы, цилиндрның биеклеге, цилиндрның күчәре, цилиндрның күчәр кисеме дип нәрсәгә әйтәләр?
4. Цилиндрның нигез яссылыгына параллель яссылык аның ян өслеген нигез әйләнәсенә тигез әйләнә буенча кисқәнлеген исбатлагыз.
5. Цилиндрга камаулы (цилиндрны камаучы) призма дип нинди призмага әйтәләр? Цилиндрга орынма яссылык дип нәрсәгә әйтәләр?
6. Түгәрәк конус, конусның түбәсе, конусның төзүчесе, конусның нигезе, конусның ян өслеге дип нәрсәгә әйтәләр?
7. Нинди конус туры конус дип атала?

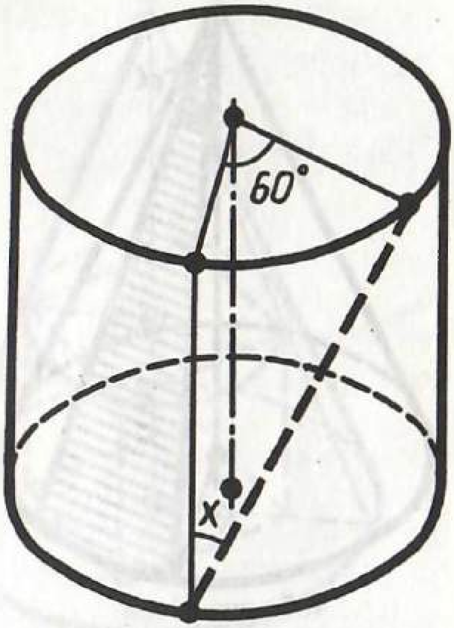
8. Конусның биеклеге, конусның күчәре, конусның күчәр кисеме дип нәрсәгә әйтәләр?
9. Конусның нигез яссылыгына параллель яссылык аның ян өслеген үзәге конус күчәрендә яткан әйләнә буенча кисканлеген исбатлагыз.
10. Кисек конус дип нәрсәгә әйтәләр?
11. Нинди пирамида конуска камаулы (конусны камаучы) пирамида дип атала? Конуска орынма яссылык дип нәрсәгә әйтәләр?
12. Шар (шар өслеге, сфера) дип нәрсә атала?
13. Шарның радиусы, шарның диаметры дип нәрсәгә әйтәләр? Шарның нинди нокталары диаметраль каршы ятучы нокталар дип атала?
14. Шарның яссылык белән кисеме түгәрәк икәнен исбатлагыз.
15. Нинди яссылык диаметраль яссылык дип атала? Зур түгәрәк дип нәрсәгә әйтәләр?
16. Шарның теләсә кайсы диаметраль яссылыгы аның симметрия яссылыгы булганын, шарның үзәге аның симметрия үзәге икәнен исбатлагыз.
17. Нинди яссылык шарга орынма яссылык дип атала?
18. Орынма яссылыкның шар белән бер генә уртак ноктасы — орыну ноктасы — булганын исбатлагыз.
19. Нинди туры шарга орынма дип атала?
20. Ике сфераның кисешү сызыгы әйләнә икәнен исбатлагыз.
21. Нинди күпкырлык шарга камаулы (шарны камаучы) күпкырлык дип атала?

Мәсьәләләр

1. Цилиндр нигезенең радиусы 2 м, биеклеге 3 м. Күчәр кисеменең диагонален табыгыз.
2. Цилиндрның күчәр кисеме — мәйданы Q га тигез булган квадрат. Цилиндр нигезенең мәйданын табыгыз.
3. Цилиндрның биеклеге 6 см, нигез радиусы 5 см. Цилиндрның күчәреннән 4 см ераклыкта аңа параллель үткәрелгән кисемнең мәйданын табыгыз.
4. Цилиндрның биеклеге 8 дм, нигез радиусы 5 дм. Цилиндр, кисемдә квадрат килеп чыгарлык итеп, яссылык белән кистерелгән. Бу кисемнән күчәргә кадәр ераклыкны табыгыз (464 нче рәсем).
5. Цилиндрның биеклеге 6 дм, нигез радиусы 5 дм. 10 дм озынлыктагы AB кисемтәсенең очлары һәр ике нигезенең әйләнәләре өстендә ята. Бу кисемтәдән күчәргә кадәрге иң кыска ераклыкны табыгыз.

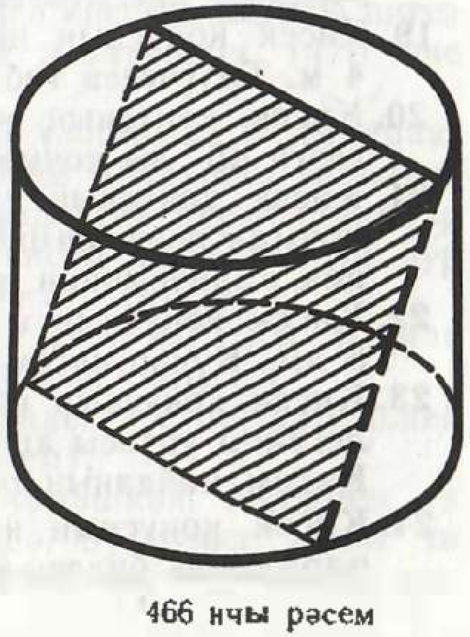


464 нче рәсем

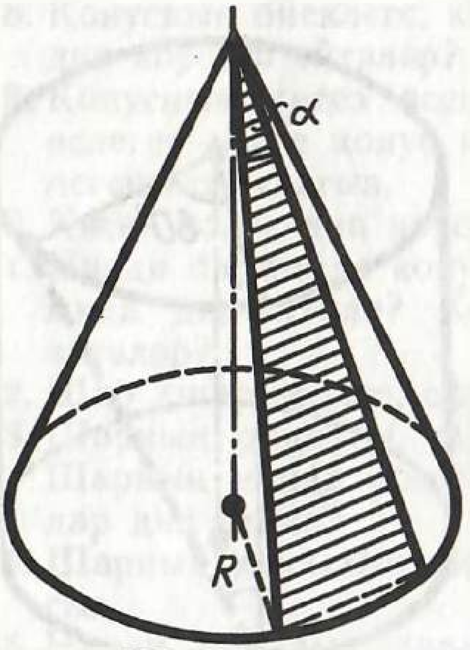


465 нче рәсем

6. Тигезьяклы цилиндрда (цилиндрның диаметры биеклегенә тигез) өске нигез әйләнәсенең бер ноктасы аскы нигез әйләнәсенең ноктасы белән тоташтырылган. Бу нокталарга үткәрелгән радиуслар арасындагы почмак 60°. Үткәрелгән туры белән цилиндр күчәре арасындагы x почмагын табыгыз. (465 нче рәсем).
7. Цилиндрга алтыпочмаклы төзек призма камалган. Нигез радиусы цилиндрның биеклегенә тигез булса, аның ян кырының диагонале белән цилиндр күчәре арасындагы почмакны табыгыз.
8. Цилиндрның биеклеге 2 м. Нигез радиусы 7 м. Бу цилиндрга, барлык түбәләре нигез әйләнәләрендә ятарлык һәм авыш итеп, квадрат камалган. Квадратның ягын табыгыз (466 нчы рәсем).
9. Конусның нигез радиусы 3 м, биеклеге 4 м. Төзүчесен табыгыз.
10. Конусның l төзүчесе нигез яссылыгына 30° лы почмак ясап авышкан. Биеклеген табыгыз.
11. Конусның нигез радиусы R. Турыпочмаклы өчпочмак күчәр кисеме булып хезмәт итә. Аның мәйданын табыгыз.
12. Тигезьяклы конусның (күчәр кисе-



466 нчы рәсем



467 нче рәсем

ме — төзек өчпочмак) нигез радиусы R. Үзара α почмагы ясаучы ике төзүчесе аша үткәрелгән кисемнең мәйданын табыгыз (467 нче рәсем).

13. Конусның биеклеге 20 гә, нигез радиусы 25 кә тигез. Конусның түбәсе аша үзәгеннән 12 берәмлеккә тигез ераклыкта кисем үткәрелгән. Кисем мәйданын табыгыз.

14. Конусның нигез радиусы R, ә төзүчесе нигез яссылыгына α почмагы ясап авышкан. Конусның түбәсе аша, аның биеклеге белән φ почмагы ясап, яссылык үткәрелгән. Килеп чыккан кисем мәйданын табыгыз.

15. Конус түбәсеннән d ераклыкта, нигезенә параллель яссылык белән кистерелгән. Конусның нигез радиусы R, биеклеге H булса, кисем мәйданын табыгыз.

16. Конусның биеклеге H. Кисем мәйданы нигез мәйданының яртысына тигез булсын өчен, нигезгә параллель яссылыкны конусның түбәсеннән нинди ераклыкта үткәрергә кирәк?

17. Конус биеклегенең уртасы аша аның төзүчесе l га параллель туры үткәрелгән. Конус эчендәге туры кисемтәсенең озынлыгын табарга.

18*. Конусның төзүчесе 13 см, биеклеге 12 см. Конусны нигезенә параллель туры кисеп үтә; ул турыдан нигезгә кадәр ераклык 6 см, ә биеклегенә кадәр 2 см. Бу турының конус эчендәге кисемтәсен табыгыз (468 нче рәсем).

19. Кисек конусның нигез радиуслары 3 м һәм 6 м, биеклеге 4 м. Төзүчесен табыгыз.

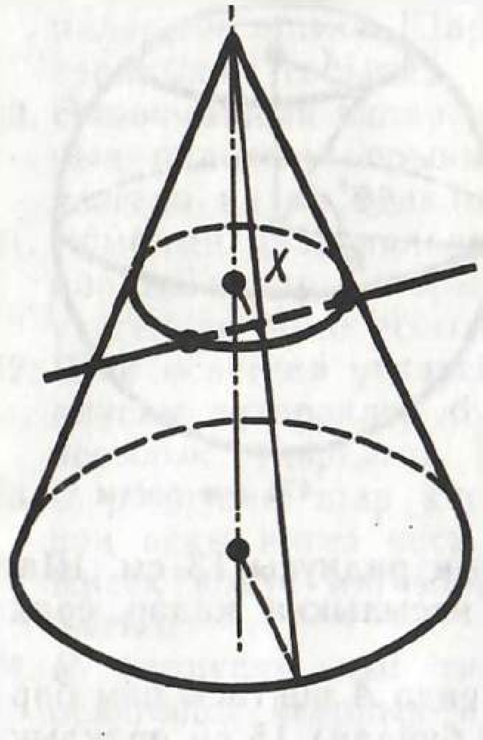
20. Кисек конусның нигез радиуслары R һәм r; төзүчесе нигезгә 45° лы почмак ясап авышкан. Биеклеген табыгыз.

21. Кисек конусның төзүчесе $2a$ га тигез һәм нигезгә 60° лы почмак ясап авышкан. Бер нигезенең радиусы икенче нигезенең радиусыннан ике тапкыр зуррак. Һәр радиусын табыгыз.

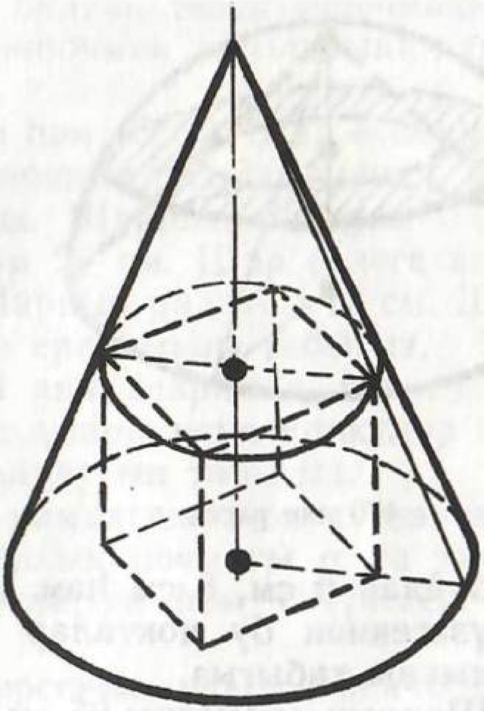
22. Кисек конусның нигез радиуслары 3 дм һәм 7 дм, төзүчесе 5 дм. Күчәр кисеменең мәйданын табыгыз.

23. Кисек конусның нигез мәйданнары 4 дм^2 һәм 16 дм^2. Биеклегенең уртасы аша нигезенә параллель яссылык үткәрелгән. Кисем мәйданын табыгыз.

24. Кисек конусның нигез мәйданнары M һәм m. Нигезләренә параллель булган урта кисемнең мәйданын табыгыз.



468 нче рәсем



469 нчы рәсем

25. Пирамиданың барлык ян кабыргалары тигез. Аның ниндидер конуска камаулы пирамида икәнен исбатлагыз.

26*. Конусның нигез радиусы R һәм биеклеге H бирелгән. Конуска камаулы кубның кабыргасын табыгыз (469 нчы рәсем).

27*. Конусның нигез радиусы R һәм биеклеге H бирелгән. Аңа ян кырлары квадратлар булган төзек өчпочмаклы призма камалган. Призманың кабыргасын табыгыз.

28. Ярымшар белән аңа камаулы конусның нигезләре һәм биеклекләре уртак. Конус биеклегенең уртасы аша нигезенә параллель яссылык үткәрелгән. Конусның ян өслеге белән ярымшарның өслеге арасында урнашкан кисем мәйданы нигез мәйданының яртысына тигез икәнен исбатлагыз (470 нче рәсем).

29. Радиусы 41 дм га тигез булган шар үзәгеннән 9 дм ераклыкта яссылык белән кистерелгән. Кисем мәйданын табыгыз.

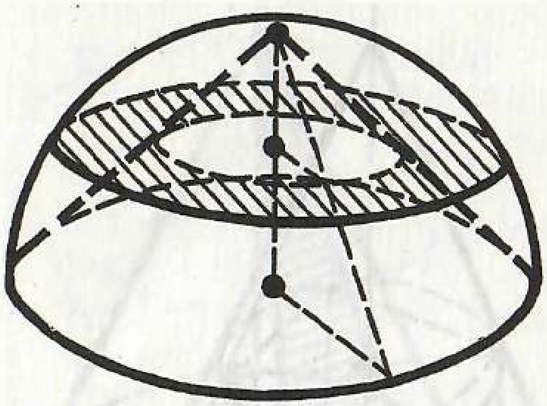
30. Шар радиусының уртасы аша шул радиуска перпендикуляр яссылык үткәрелгән. Килеп чыккан кисем мәйданының зур түгәрәк мәйданына чагыштырмасы нәрсәгә тигез?

31. Шарның радиусы R. Радиусның очы аша, 60° лы почмак ясап, яссылык үткәрелгән. Кисем мәйданын табыгыз.

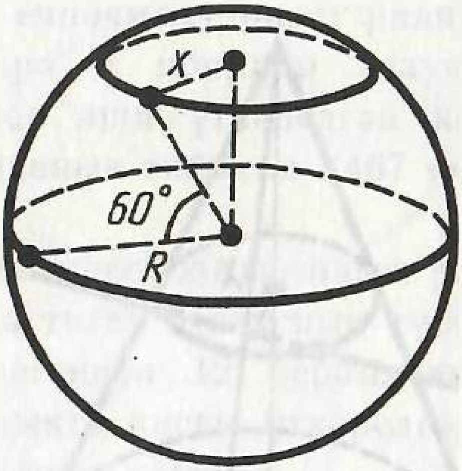
32. Җир шарының радиусы R. 60° лы киңлектәге параллельнең озынлыгы күпмегә тигез? (471 нче рәсем).

33. N шәһәре 60° лы төньяк киңлектә урнашкан. Җирнең үз күчәре тирәсендә әйләнүе нәтиҗәсендә, бу пункт 1 сәг тә күпме юл үтә? Җирнең радиусын 6000 км га тигез дип алырга.

34. Шар өслегендә өч нокта бирелгән. Алар арасы туры сызык



470 нче рәсем



471 нче рәсем

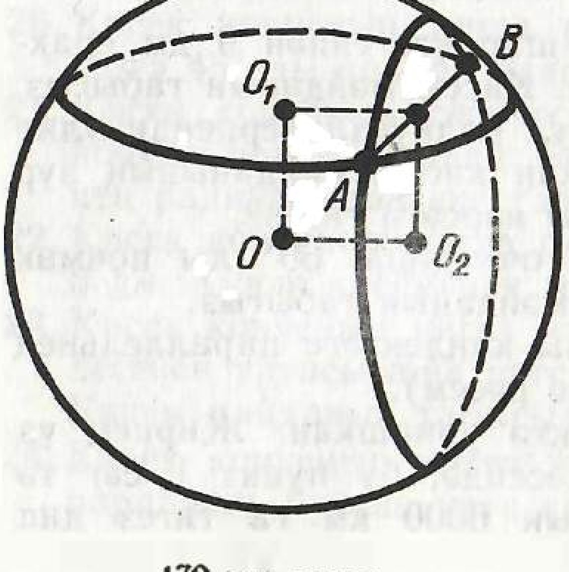
буйлап 6 см, 8 см һәм 10 см. Шарның радиусы 13 см. Шар үзәгеннән бу нокталар аша үтүче яссылыкка кадәр ераклыкны табыгыз.

35. Шарның диаметры 25 см. Аның өслегендә A ноктасы һәм барлык ноктлары A ноктасыннан (туры буйлап) 15 см ераклыкта булган әйләнә бирелгән. Бу әйләнәнең радиусын табыгыз.

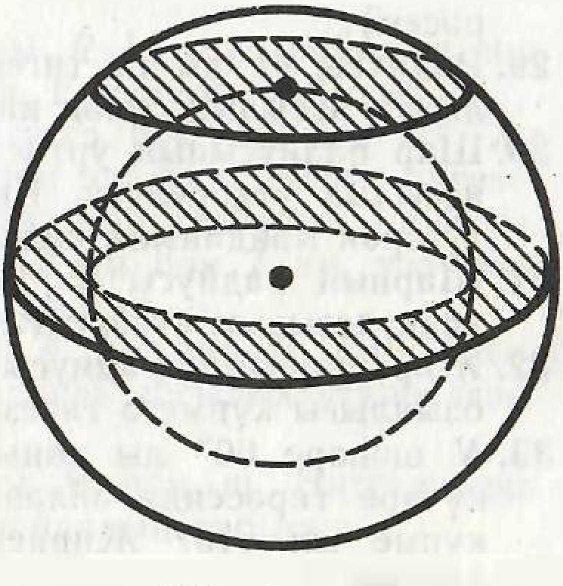
36*. Шарның радиусы 7 см. Аның өслегендә уртак хордалары 2 см га тигез булган ике тигез әйләнә бирелгән. Әйләнә яссылыкларының үзара перпендикуляр икәне билгеле булса, аларның радиусларын табыгыз (472 нче рәсем).

37. R радиуслы шар бирелгән. Өслегенең бер ноктасы аша ике яссылык үткәрелгән: берсе — шарга орынма яссылык, икенчесе беренчесе белән 30° лы почмак ясый. Кисем мәйданын табыгыз.

38. Җисем ике концентрик шар өслеге белән чикләнгән (куыш шар). Аның үзәге аша үтүче яссылыкның киселе эчке шарга орынма яссылыкның кисеме белән тигез зурлыкта икәнен исбатлагыз (473 нче рәсем).



472 нче рәсем



473 нче рәсем

39. R радиуслы шар ягы a га тигез булган төзек өчпочмакның якларына орына. Шар үзәгеннән өчпочмак яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

40. Өчпочмакның яклары 13 см, 14 см һәм 15 см. Шар өчпочмакның якларына орынып тора. Өчпочмак яссылыгыннан шар үзәгенә кадәр ераклыкны табыгыз. Шарның радиусы 5 см.

41. Ромбның диагональләре 15 см һәм 20 см. Шар өслеге аның барлык якларына орынып тора. Шарның радиусы 10 см. Шар үзәгеннән ромб яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

42. Шар өслегенә үткәрелгән орынма аша шарны r_1 һәм r_2 радиуслы түгәрәкләр буенча кисүче үзара перпендикуляр ике яссылык үткәрелгән. Шарның R радиусын табыгыз.

43. R радиуслы шар кисек конуска камалган. Конус төзүчесенең аскы нигез яссылыгына авышлык почмагы α га тигез. Кисек конус нигезләренең радиусларын һәм төзүчесен табыгыз.

44. R радиуслы ике тигез шар берсенең үзәге икенчесенең өслегендә ятарлык итеп урнашкан. Аларның өслекләренең кисешү сызыгының озынлыгын табыгыз.

45. Шарларның радиуслары 25 дм һәм 29 дм, ә аларның үзәкләре арасындагы ераклык 36 дм. Аларның өслекләренең кисешү сызыгының озынлыгын табыгыз.

46. Ягы a га тигез булган кубны камаучы шарның радиусын табыгыз.

47. Төзек пирамиданы камаучы шарның үзәге аның күчәре өстендә ятканын исбатлагыз.

48. Төзек пирамидага камалган шарның үзәге аның биеклеге өстендә ятканын исбатлагыз.

49. Кабыргасы a га тигез булган төзек тетраэдрны камаучы шарның радиусын табыгыз.

50. Төзек дүртпочмаклы пирамидада нигезенең ягы a га, ә түбә янындагы яссы почмагы α га тигез. Камаулы һәм камаучы шарларның радиусларын табыгыз.

51*. R радиуслы шарга түбә янындагы яссы почмагы α га тигез булган төзек өчпочмаклы пирамида камалган. Пирамиданың биеклеген табыгыз.

52. Төзек n-почмаклы призма R радиуслы шарга камалган. Призма нигезенең кабыргасы a га тигез. $n=3$; 4; 6 булганда, призманың биеклеген табыгыз.

53. n-почмаклы төзек пирамида нигезенең ягы a га, нигез янындагы икекырлы почмагы φ гә тигез. Пирамидага камаулы шарның радиусын табыгыз.

54. Шарга камаулы n-почмаклы төзек пирамида нигезенең ягы a га тигез, ә ян кабыргасы нигез яссылыгына α почмагы ясап авышкан. Шарның радиусын табыгыз.

§ 21. КҮПКЫРЛЫКЛАРНЫҢ КҮЛӘМНӘРЕ

194. КҮЛӘМ ТӨШЕНЧӘСЕ

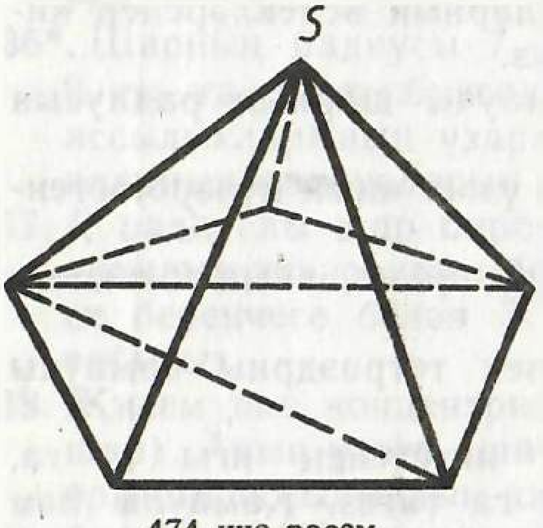
Яссылыктагы фигуралар өчен мәйдан төшенчәсе кертелгән кебек, пространстводагы җисемнәр өчен күләм төшенчәсе кертелә. Башлап гади җисемнәр карала. Җисемне чикле сандагы өчпочмаклы пирамидаларга бүлгәләп булса, ул гади җисем дип атала.

Гади җисемнәр өчен *күләм — уңай зурлык ул, аның санча кыйммәте түбәндәге үзлекләргә ия:*

1) *Тигез җисемнәрнең күләмнәре тигез.*

2) *Җисем гади җисемнәрдән торган кисәкләргә бүлгәләнсә, бу җисемнең күләме аның кисәкләренең күләмнәре суммасына тигез.*

3) *Кабыргасы озынлык берәмлегенә тигез булган кубның күләме берәмлеккә тигез.*



474 нче рәсем

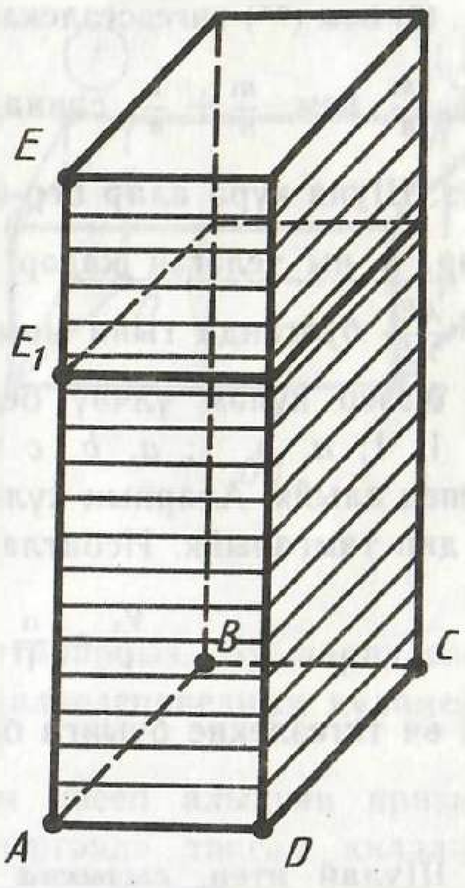
Әгәр билгеләмәдә әйтелгән кубның кабыргасы 1 см булса, күләм куб сантиметрларда күрсәтелер; кубның кабыргасы 1 м булса, күләм куб метрларда булыр, кубның кабыргасы 1 км булса, күләм куб километрларда булыр һ. б. ш.

Теләсә нинди кабарынкы күпкырлык гади җисемгә мисал булып тора. Аны чикле сандагы өчпочмаклы пирамидаларга түбәндәгечә бүлгәләргә мөмкин. Күпкырлыкның кайсы да булса S түбәсен билгелибез. Күпкырлыкның S түбәсен эченә алмаган барлык кырларын өчпочмакларга бүлгәлибез. Ул вакытта бу өчпочмаклар — нигезләре, S ноктасы — уртак түбәсе булган өчпочмаклы пирамидалар күпкырлыкның өчпочмаклы пирамидаларга бүлгәләнешен бирер. 474 нче рәсемдә ирекле рәвештә алынган пирамиданың шундый бүлгәләнеше бирелгән.

195. ТУРЫПОЧМАКЛЫ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДНЫҢ КҮЛӘМЕ

Сызыклы үлчәмнәре a, b, c булган турыпочмаклы параллелепипедның күләмен табыйк. Моның өчен башта нигезләре тигез булган ике турыпочмаклы параллелепипедның күләмнәре чагыштырмасы аларның биеклекләре чагыштырмасына тигез икәнен исбатларбыз.

P һәм P_1 — турыпочмаклы параллелепипедлар, $ABCD$ аларның уртак нигезләре, ә AE һәм AE_1 — биеклекләре булсын. Ачыклык өчен $AE_1 < AE$ дип исәпләрбез (475 нче рәсем). V һәм V_1 — параллелепипедларның күләмнәре булсын. P параллелепипедының AE кабыргасын n (n — зур сан) тигез кисәккә бүлик. Һәр кисәк $\frac{AE}{n}$ га тигез, m исә AE_1 кабыргасындагы бүлү нокталары саны булсын. Ул вакытта



475 нче рәсем

$$\left(\frac{AE}{n}\right)m \leqslant AE_1 \leqslant \left(\frac{AE}{n}\right)(m+1).$$

Моннан

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{AE_1}{AE} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

Бүлү нокталары аша нигезгә параллель яссылыклар үткәрик. Алар P параллелепипедын n тигез параллелепипедка бүләр. Аларның һәркайсының күләме $\frac{V}{n}$ га тигез. P параллелепипеды түбәннән саный башлаганда m параллелепипедны эченә ала һәм $m+1$ параллелепипед эчендә урнашкан. Шуңа күрә

$$\left(\frac{V}{n}\right)m \leqslant V_1 \leqslant \left(\frac{V}{n}\right)(m+1).$$

Моннан

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{V_1}{V} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

(*) һәм (**) тигезсезлекләреннән $\frac{V_1}{V}$ һәм $\frac{AE_1}{AE}$ саннарының икесе дә $\frac{m}{n}$ һәм $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$ саннары арасында урнашканлыгын күрәбез. Шуңа күрә алар бер-берсеннән $\frac{1}{n}$ иан да күпкә аерылмыйлар. n ны теләгән кадәр зур алырга мөмкин, ә бу исә $\frac{V_1}{V}=$ $=\frac{AE_1}{AE}$ булганда гына мөмкин, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Хәзер күләм үлчәү берәмлеге булган куб һәм үлчәмнәре: a, 1, 1; a, b, 1; a, b, c булган өч турыпочмаклы параллелепипед алыйк. Аларның күләмнәрен тиңдәшле рәвештә V_1, V_2 һәм V дип тамгалыйк. Исбатлау буенча

$$\frac{V_1}{1}=\frac{a}{1},\ \frac{V_2}{V_1}=\frac{b}{1},\ \frac{V}{V_2}=\frac{c}{1}.$$

Бу өч тигезлекне буынга буын тапкырлап, табабыз:

$$V=abc.$$

Шулай итеп, ***сызыкча үлчәмнәре a, b, c булган турыпочмаклы параллелепипедның күләме V = abc формуласы буенча исәпләнә.***

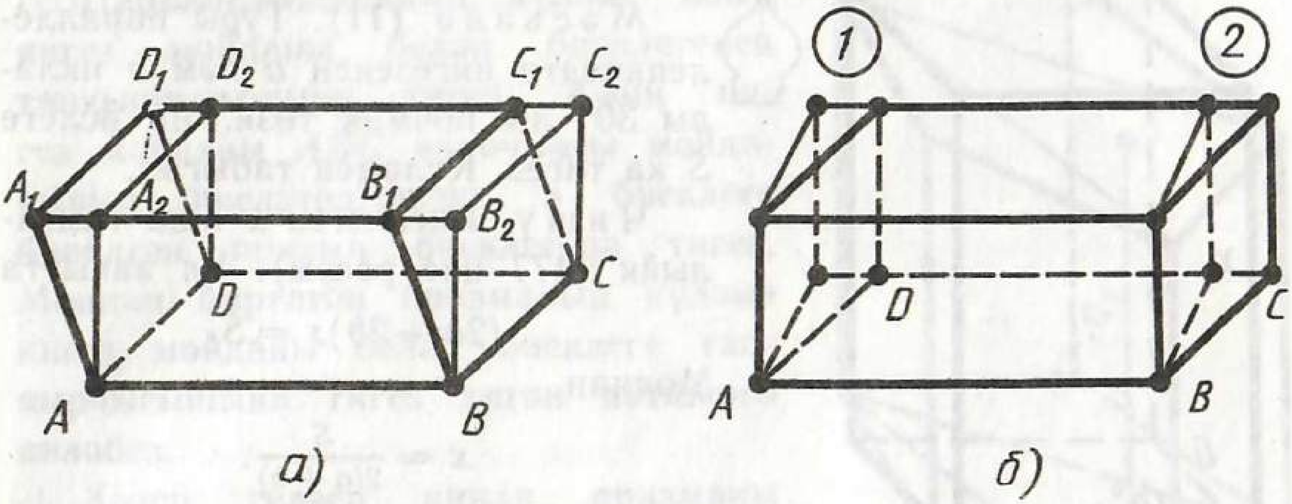
Мәсьәлә (3). Кубның һәр кабыргасын 2 см га озынайтсаң, аның күләме 98 $см^3$ га зурая. Кубның кабыргасын табыгыз.

Чишү. Кубның кабыргасын x аша тамгаласак, $(x+2)^3-x^3=98$, ягъни $x^2+2x-15=0$ булыр. Тигезләмәнең ике тамыры бар: $x=3$, $x=-5$. Уңай тамырның гына геометрик мәгънәсе бар. Шулай итеп, кубның кабыргасы 3 см га тигез.

196. АВЫШ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДНЫҢ КҮЛӘМЕ

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ авыш параллелепипедның күләмен табыйк (476 нчы рәсем).

BC кабыргасы аша $ABCD$ нигезенә перпендикуляр яссылык үткәрәбез һәм параллелепипедка $BB_1B_2\ CC_1C_2$ өчпочмаклы призмасын өстибез (476 нчы рәсем, a). Хәзер AD кабыргасы аша $ABCD$ нигезенә перпендикуляр итеп үткәрелгән яссылык белән килеп чыккан җисемнән өчпочмаклы призманы кисеп алабыз.



476 нчы рәсем

Ул вакытта яңадан параллелепипед табарбыз. Бу параллелепипедның күләме башта бирелгән параллелепипедның күләменә тигез була.

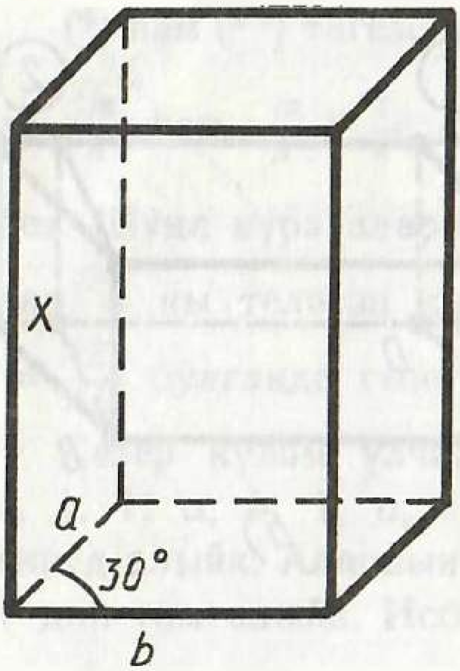
Чыннан да, өстәмә призма белән кисеп алынган призма AB кисемтәсе кадәр параллель күчергәндә тәңгәл киләләр, димәк, аларның күләмнәре тигез. Әле тасвирланган үзгәртүдә параллелепипедның нигез мәйданы һәм биеклеге саклана. Шулай ук ике ян кырының яссылыклары да саклана, ә калган икесе нигезгә карата перпендикулярга әйләнә.

Шул ук үзгәртүне тагын авыш кырларына карата кулланып, барлык ян кырлары нигезгә перпендикуляр булган параллелепипед, ягъни туры параллелепипед табарбыз.

Килеп чыккан туры параллелепипедны аналогик рәвештә турыпочмаклы параллелепипедка үзгәртәбез: аңа башта 1 призмасын өстибез, аннары 2 призмасын кистереп алабыз (476 нчы рәсем, *б*). Бу үзгәртүдә шулай ук параллелепипедның күләме, нигез мәйданы һәм биеклеге саклана.

Шул рәвешле, турыпочмаклы параллелепипедның күләме аның нигез мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышына тигез. Бирелгән параллелепипедны, югарыда сөйләнгәнчә, турыпочмаклы параллелепипедка үзгәрткәндә, һәр очракта да күләм, нигез мәйданы һәм биеклек сакланганлыктан, баштагы параллелепипедның да күләме нигез мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышына тигез була.

Шулай итеп, ***теләсә нинди параллелепипедның күләме нигез мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышына тигез.***



477 нче рәсем

Мәсьәлә (11). Туры параллелепипедта нигезенең a һәм b яклалы 30° лы почмак төзи. Ян өслеге S ка тигез. Күләмен табыгыз.

Чишү. Биеклеген x аша тамгалыйк (477 нче рәсем). Ул вакытта

$$(2a+2b)x=S.$$

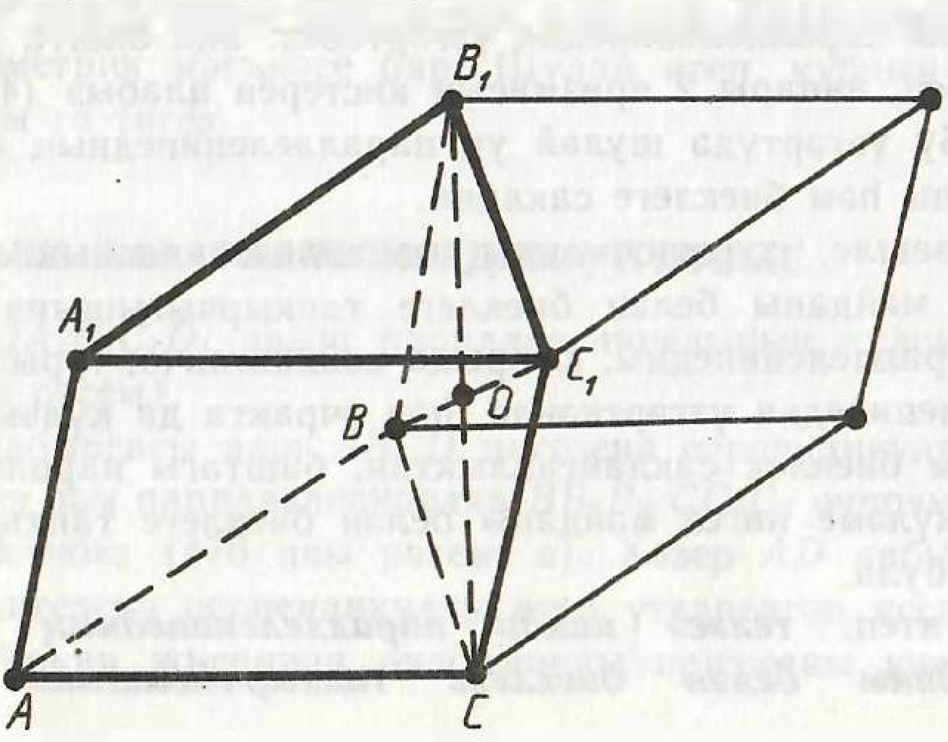
Моннан

$$x=\frac{S}{2(a+b)}.$$

Параллелепипедның нигез мәйданы $ab\sin 30°=\frac{ab}{2}$ гә тигез. Моннан аның күләме $\frac{abS}{4(a+b)}$ га тигез була.

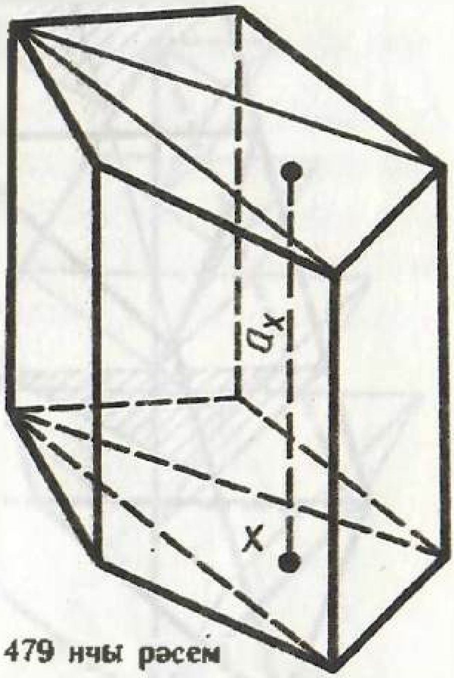
197. ПРИЗМАНЫҢ КҮЛӘМЕ

Башта өчпочмаклы призманы карарбыз (478 нче рәсем). Аны, рәсемдә күрсәтелгәнчә, параллелепипедка тутырыйк. O ноктасы параллелепипедның симметрия үзәге була. Шуңа күрә аңа өстәп төзелгән призма башта бирелгән призмага O ноктасына карата симметрик була, шулай булгач, аның күләме бирелгән призманың күләменә тигез. Шулай итеп, төзелгән параллелепипедның күләме бирелгән призма күләменең икеләтелгәненә тигез.



478 нче рәсем

Параллелепипедның күләме аның нигез мәйданы белән биеклегенең тапкырчыгышына тигез. Аның нигез мәйданы *ABC* өчпочмагы мәйданының икеләтелгәненә, ә биеклеге бирелгән призма биеклегенә тигез. Моннан бирелгән призманың күләме нигез мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышына тигез дигән нәтиҗәгә киләбез.



479 нчы рәсем

Хәзер теләсә нинди призманы карыйк (479 нчы рәсем). Аның нигезен өчпочмакларга бүлгәлибез. △ — шул өчпочмакларның берсе булсын. △ өчпочмагының нинди дә булса *X* ноктасыннан ян кабыргаларга параллель туры үткәрәбез. a_x — бу турының призмада яткан кисемтәсе булсын. *X* ноктасы △ өчпочмагын йөреп чыкканда, a_x кисемтәләре өчпочмаклы призманы тутыралар. Әгәр һәр △ өчпочмагы өчен шундый призма төзесәк, бирелгән призма өчпочмаклы призмаларга бүлгәләнер. Бу призмаларның барысының да биеклекләре бертөрле һәм бирелгән призманың биеклегенә тигез.

Бирелгән призманың күләме аны төзүче өчпочмаклы призмаларның күләмнәре суммасына тигез. Исбатлау буенча өчпочмаклы призманың күләме аның нигез мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышына тигез. Моннан бирелгән призма күләменең түбәндәгегә тигез икәнлеге чыга:

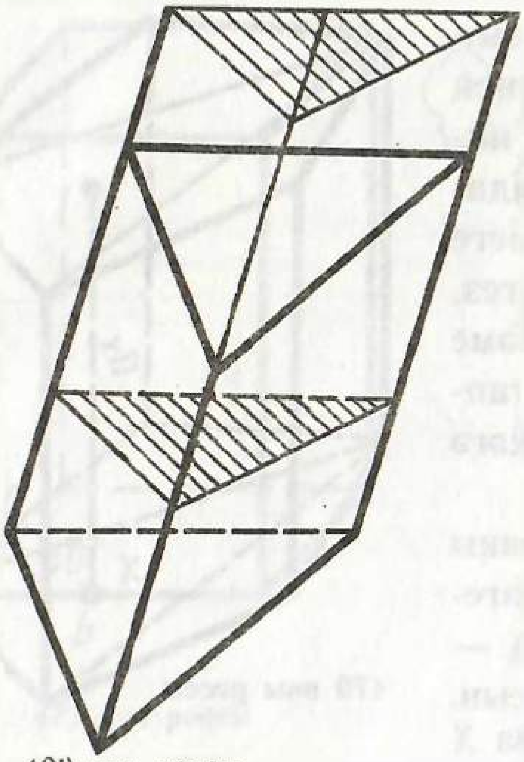
$$V = S_1H + S_2H + ... + S_nH = (S_1 + S_2 + ... + S_n)H,$$

биредә, S_1, S_2, ..., S_n — призманың нигезен бүлгәләүдән килеп чыккан △ өчпочмакларының мәйданнары. △ өчпочмакларының мәйданнары суммасы бирелгән призма нигезенең мәйданы *S* ка тигез. Шуңа күрә

$$V = SH.$$

Шулай итеп, ***теләсә нинди призманың күләме аның нигез мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышына тигез.***

Мәсьәлә (24). Авыш призманың ян кабыргаларына перпендикуляр һәм барлык ян кабыргаларын кисеп үтүче



480 нче рәсем

кисем үткәрелгән. Кисем мәйданы Q га, ян кабыргалары l га тигез булса, призманың күләмен табыгыз.

Чишү. Үткәрелгән кисем яссылыгы призманы ике кисәккә бүлә (480 нче рәсем). Аларның берсен, призманың нигезләре тәңгәл килерлек итеп, параллель күчерик. Бу вакытта баштагы призманың кисеме нигезе булып хезмәт иткән, ә биеклеге l га тигез булган туры призма табарбыз. Бу призма да шул ук күләмгә ия. Шулай итеп, баштагы призманың күләме Ql га тигез.

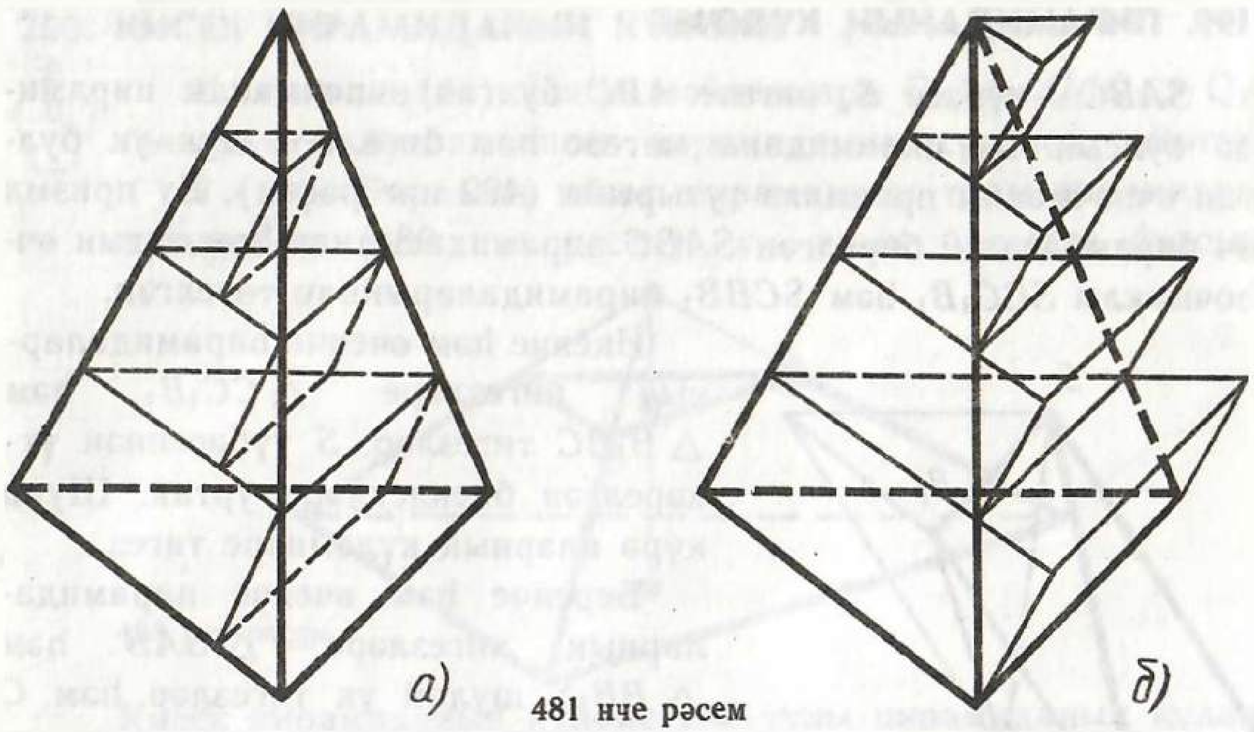
198. ТИГЕЗ ЗУРЛЫКТАГЫ ҖИСЕМНӘР

Ике җисемнең күләмнәре тигез булса, алар *тигез зурлыктагы җисемнәре* дип атала.

Нигез мәйданнары тигез һәм биеклекләре тигез булган ике өчпочмаклы пирамида тигез зурлыкта була.

Чыннан да, өчпочмаклы пирамидаларның нигез мәйданнары тигез һәм биеклекләре тигез булсын. Аларның тигез зурлыкта, ягъни күләмнәре тигез икәнен исбатлыйк.

Һәр пирамиданың биеклеген n тигез кисәккә бүлеп, бүлү нокталары аша нигезгә параллель яссылыклар үткәрәбез. Бу яссылыклар пирамиданы n катлауга бүләләр. Беренче пирамиданың һәр катлавы өчен, 481 нче *а* рәсемендә күрсәтелгәнчә, пирамида эченә урнашкан призмалар төзибез. Икенче пирамиданың һәр катлавы өчен бу катлауны эченә алган призмалар төзибез (481 нче рәсем, *б*). Беренче пирамиданың k нчы (түбәдән исәпләгәндә) катлавындагы призма белән икенче пирамиданың $(k-1)$ нче катлавын эченә алган призманың нигез мәйданнары тигез, чөнки бу нигезләр бер үк охшашлык коэффициенты $\left(\frac{k}{n}\right)$ белән пирамидаларның нигезләренә охшашлар. Бу призма-



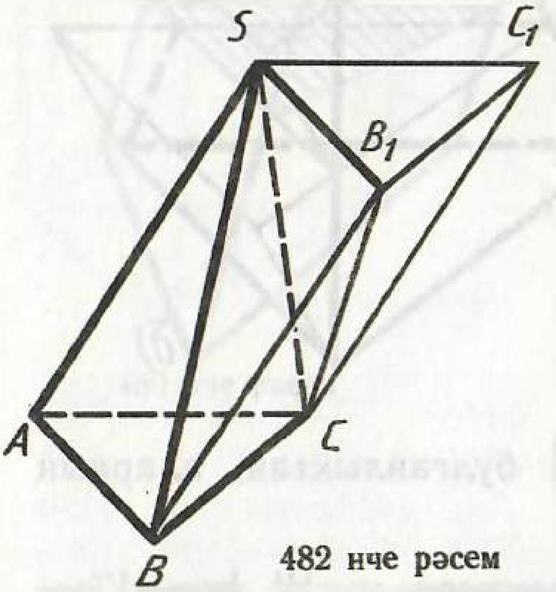
481 нче рәсем

ларның биеклекләре дә бертигез $\left(\frac{H}{n}\right)$ булганлыктан, аларның күләмнәре дә тигез.

V_1 һәм V_2 — пирамидаларның күләмнәре, ә V_1' һәм V_2' — аларда төзелгән призмаларның күләмнәре суммалары булсын. Беренче пирамиданың k нчы катлавындагы призманың күләме икенче пирамиданың $k-1$ нче катлавындагы призманың күләменә тигез булганлыктан, беренче пирамидадагы барлык призмаларның күләмнәре суммасы икенче пирамидадагы соңгы катлаудан башка барлык катлаулардагы призмаларның күләмнәре суммасына тигез. Соңгы катлаудагы призманың күләме $S\cdot\frac{H}{n}$ га тигез, монда S — пирамида нигезенең мәйданы, ә H — биеклек. Моннан, $V_1' = V_2' - S\frac{H}{n}$ икәнлеге килеп чыга. Моннан тыш, $V_1 > V_1'$, ә $V_2 < V_2'$ булганга күрә, $V_1 > V_2 - \frac{SH}{n}$, яки $V_2 - V_1 \leqslant \frac{SH}{n}$. Бу тигезсезлек теләгән кадәр зур n өчен дә үтәлә. Ә бу бары тик $V_2 - V_1 \leqslant 0$, ягъни $V_2 \leqslant V_1$ булганда гына мөмкин. Пирамидаларны рольләре белән алмаштырып, капма-каршы $V_2 \geqslant V_1$ тигезсезлеген табабыз. Моннан $V_1 = V_2$ икәнлеге килеп чыга. Фикер расланды.

199. ПИРАМИДАНЫҢ КҮЛӘМЕ

$SABC$ — түбәсе S, нигезе ABC булган өчпочмаклы пирамида булсын. Бу пирамиданы нигезе һәм биеклеге шул ук булган өчпочмаклы призмага тутырыйк (482 нче рәсем). Бу призма өч пирамидадан: бирелгән $SABC$ пирамидасыннан һәм тагын өчпочмаклы SCC_1B_1 һәм $SCBB_1$ пирамидаларыннан төзелгән.



482 нче рәсем

Икенче һәм өченче пирамидаларның нигезләре $\triangle CC_1B_1$ һәм $\triangle B_1BC$ тигезләр, S түбәсеннән үткәрелгән биеклекләре уртак. Шуңа күрә аларның күләмнәре тигез.

Беренче һәм өченче пирамидаларның нигезләре — $\triangle SAB$ һәм $\triangle BB_1S$ шулай ук тигезләр һәм C түбәсеннән үткәрелгән биеклекләре тәңгәл килә. Димәк, аларның күләмнәре шулай ук тигез.

Шулай итеп, өч пирамида да бер үк күләмгә ия. Бу күләмнәрнең суммасы призма күләменә тигез булганлыктан, пирамидаларның күләмнәре $\frac{SH}{3}$ кә тигез.

Шулай итеп, ***өчпочмаклы теләсә нинди пирамиданың күләме нигез мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышының өчтән беренә тигез:***

$$V = \frac{1}{3}SH.$$

Хәзер өчпочмаклы булмаган теләсә нинди пирамида алыйк. Аның нигезен $\triangle_1$, $\triangle_2$, ..., $\triangle_n$ өчпочмакларына бүлгәлик. Бу өчпочмаклар — нигезләре булып, ә пирамиданың түбәсе түбәләре булган пирамидалар бирелгән пирамиданы төзиләр. Бирелгән пирамиданың күләме үзен төзүче пирамидаларның күләмнәре суммасына тигез. Аларның барысының да биеклеге бирелгән пирамиданыкы кебек үк H ка тигез булганлыктан, әлеге пирамиданың күләме

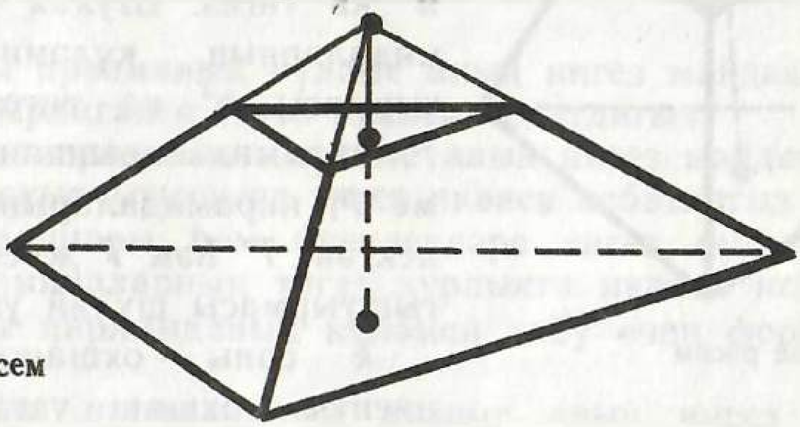
$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + ... + S_n) = \frac{1}{3}SH.$$

Шулай итеп, ***пирамиданың күләме аның нигез мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышының өчтән беренә тигез.***

200. КИСЕК ПИРАМИДАНЫҢ КҮЛӘМЕ

Мәсьәлә (44). Нигез мәйданнары Q_1 һәм $Q_2 (Q_1 > Q_2)$, биеклеге h булган кисек пирамиданың күләмен табыгыз.

Чишү. Бирелгән кисек пирамиданы тулы пирамидага тутырабыз (483 нче рәсем). x — аның биеклеге булсын.



483 нче рәсем

Кисек пирамиданың күләме ике тулы пирамиданың күләмнәре аермасына тигез: берсе — нигез мәйданы Q_1, биеклеге x булган пирамида, икенчесе — нигез мәйданы Q_2, биеклеге $x - h$ булган пирамида.

Бу пирамидаларның охшашлыгыннан чыгып x ны табабыз:

$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2$. Моннан $x = \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}}$. Кисек пирамиданың күләме:

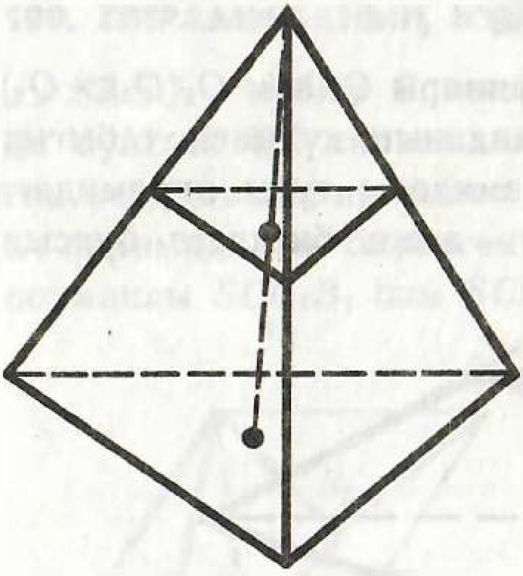
$$V = \frac{1}{3}\left[Q_1 \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} - Q_2\left(\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} - h\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}h\frac{Q_1\sqrt{Q_1} - Q_2\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} = \frac{1}{3}h(Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2).$$

201. ОХШАШ ҖИСЕМНӘРНЕҢ КҮЛӘМНӘРЕ

T һәм T' — ике охшаш гади җисем булсын. Бу — T җисемен T' җисеменә күчерә торган охшаш үзгәртү бар дигән сүз. Охшашлык коэффициентын k аша тамгалыйк.

T җисемен өчпочмаклы $P_1, P_2, \ldots, P_n$ пирамидаларына бүлгәлик. T җисемен T' җисеменә күчерә торган охшаш үзгәртү $P_1, P_2, \ldots, P_n$ пирамидаларын $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ пирамидаларына күчерә. Бу пирамидалар T' җисемен төзиләр, һәм шуңа күрә T' җисеменең күләме $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ пирамидалары күләмнәренең суммасына тигез.



484 нче рәсем

P_i' һәм P_i пирамидалары охшаш һәм охшашлык коэффициенты k га тигез булганлыктан, аларның биеклекләре чагыштырмасы k га, ә нигез мәйданнарының чагыштырмасы k^2 ка тигез. Шулай булгач, пирамидаларның күләмнәре чагыштырмасы k^3 ка тигез. T җисеме P_i пирамидаларыннан, ә T' җисеме P_i' пирамидаларыннан төзелгәнлектән, T' һәм T җисемнәренең чагыштырмасы шулай ук k^3 ка тигез.

k саны — охшашлык коэффициенты — охшаш үзгәртүдә теләсә нинди ике тиңдәшле нокталар пары арасындагы ераклыклар чагыштырмасына тигез. Шулай булгач, бу сан T' һәм T җисемнәренең теләсә нинди ике тиңдәшле сызыкча үлчәмнәренең чагыштырмасына тигез. Шулай итеп, без түбәндәге нәтиҗәгә килербез:

Ике охшаш җисемнең күләмнәре чагыштырмасы аларның тиңдәшле сызыкча үлчәмнәренең кублары чагыштырмасына тигез.

М ә с ь ә л ә (48). Пирамида биеклегенең уртасы аша нигезенә параллель яссылык үткәрелгән. Ул пирамиданың күләмен нинди чагыштырмада бүлә?

Ч и ш ү. Белгәнебезчә, үткәрелгән яссылык охшаш пирамида кисеп ала (484 нче рәсем). Охшашлык коэффициенты аларның биеклекләре чагыштырмасына, ягъни $\frac{1}{2}$ гә тигез.

Шуңа күрә пирамидаларның күләмнәре чагыштырмасы $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : 1$ гә тигез. Димәк, яссылык безнең пирамиданы күләмнәре $\frac{1}{8} : \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 1 : 7$ чагыштырмасында булган кисәкләргә бүлә.

КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Күләмнең төп үзлекләрен әйтеп бирегез.
2. Турыпочмаклы параллелепипедның күләме аның сызыкча үлчәмнәренең тапкырчыгышына тигез икәнен исбатлагыз.
3. Теләсә нинди параллелепипедның күләме аның нигез мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышына тигез икәнен исбатлагыз.
4. Өчпочмаклы призманың күләме аның нигез мәйданын биеклегенә тапкырлаганга тигез икәнен исбатлагыз.
5. Теләсә нинди призманың күләме аның нигез мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышына тигез икәнен исбатлагыз.
6. Нигез мәйданнары һәм биеклекләре тигез булган өчпочмаклы пирамидаларның тигез зурлыкта икәнен исбатлагыз.
7. Өчпочмаклы пирамиданың күләмен табу өчен формула чыгарыгыз.
8. Теләсә нинди пирамиданың күләме аның нигез мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышының өчтән беренә тигез икәнен исбатлагыз.
9. Охшаш җисемнәрнең күләмнәре чагыштырмасы аларның тиңдәшле сызыкча үлчәмнәренең кублары чагыштырмасына тигез икәнен исбатлагыз.

МӘСЬӘЛӘЛӘР

1. Кабыргалары 3 см, 4 см һәм 5 см лы өч җиз кубны эретеп бер куб койганнар. Бу кубның кабыргасы нинди озынлыкта?
2. Металл кубның тышкы кабыргасы 10,2 см, массасы 514,15 г. Стенасының калынлыгы 0,1 см. Куб эшләнгән металлның тыгызлыгын табыгыз.
3. Кубның һәр кабыргасын 2 см га озынайтсаң, кубның күләме 98 $см^3$ га зурая. Кубның кабыргасын табыгыз.
4. Кубның һәр кабыргасын 1 м га озынайтсаң, аның күләме 125 тапкыр зурая. Кубның кабыргасын табыгыз.
5. Үлчәмнәре $25\times12\times6{,}5$ см булган кирпечнең массасы 3,51 кг. Тыгызлыгын табыгыз.
6. 10 $м^3$ сыешлы бакны урнаштыру өчен $2{,}5\times1{,}75$ м үлчәмле мәйдан хәзерләнгән. Бакның биеклеген табыгыз.
7. Турыпочмаклы параллелепипедның үлчәмнәре 15 м, 50 м һәм 36 м. Аңа тигез зурлыктагы кубның кабыргасын табыгыз.
8. Турыпочмаклы борысның үлчәмнәре 3 см, 4 см һәм 5 см. Һәр кабыргасын x см га озынайтсаң, борысның өслеге 54 $см^2$ га зурая. Аның күләме күпмегә зураер?
9. Чуен торбаның кисеме квадрат рәвешендә. Аның тышкы

яктан киңлеге 25 см, стенасының калынлыгы 3 см. Буйга 1 метр булган торбаның массасын табыгыз (чуенның тыгызлыгы 7,3 $г/см^3$).

10. Турыпочмаклы параллелепипедның a га тигез булган диагонале нигез яссылыгы белән α, ян кыры белән β почмагы төзи. Параллелепипедның күләмен табыгыз.

11. Туры параллелепипед нигезенең a һәм b яклары үзара 30° лы почмак төзиләр. Ян өслеге S ка тигез. Күләмен табыгыз.

12. Туры параллелепипедта нигезенең яклары $2\sqrt{2}$ см һәм 5 см га тигез. Алар үзара 45° лы почмак төзиләр. Параллелепипедның кечерәк диагонале 7 см га тигез. Аның күләмен табыгыз.

13. Туры параллелепипедның нигезе — мәйданы 1 $м^2$ га тигез булган ромб. Диагональ кисемнәренең мәйданнары 3 $м^2$ һәм 6 $м^2$. Параллелепипедның күләмен табыгыз.

14. Ромбның мәйданы Q га, диагональ кисемнәренең мәйданнары M һәм N га тигез булса, үткән мәсьәләне гомуми очрак өчен чишегез.

15. Авыш параллелепипедның нигезе — ягы 1 м га тигез булган квадрат. Ян кабыргаларының берсе 2 м га тигез һәм ул нигезнең һәр янәшә ягы белән 60° лы почмак төзи. Параллелепипедның күләмен табыгыз.

16*. Параллелепипедның кырлары — ягы a, кысынкы почмагы 60° булган тигез ромблар. Параллелепипедның күләмен табыгыз.

17*. Параллелепипедның һәр кабыргасы 1 см га тигез. Параллелепипедның бер түбәсе янындагы өч яссы почмагының һәркайсы 2α га тигез булган кысынкы почмаклар. Параллелепипедның күләмен табыгыз.

18*. Параллелепипедның бер түбәдән чыккан өч кабыргасының озынлыклары a, b, c га тигез. a һәм b кабыргалары үзара перпендикуляр, ә c кабыргасы аларның һәркайсы белән α почмагы төзи (485 нче рәсем). Параллелепипедның күләмен табыгыз.

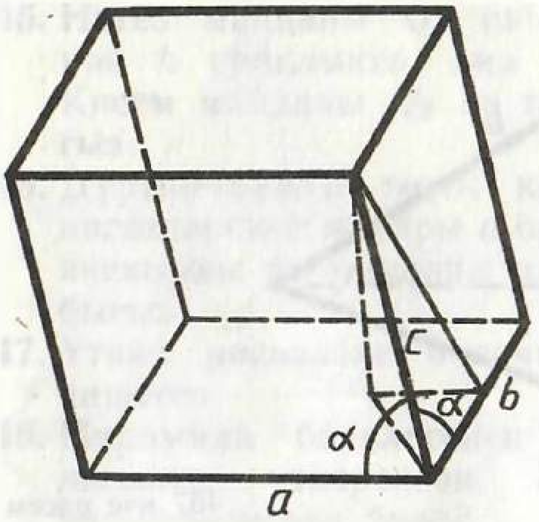
19. Нигезенең ягы a һәм ян кабыргасы b буенча 1) өчпочмаклы; 2) дүртпочмаклы; 3) алтыпочмаклы төзек призманың күләмен табыгыз.

20. Ягы 3,2 см га тигез булган төзек сигезпочмак формасындагы агач тактаның калынлыгы 0,7 см, массасы 17,3 г. Агачның тыгызлыгын табыгыз.

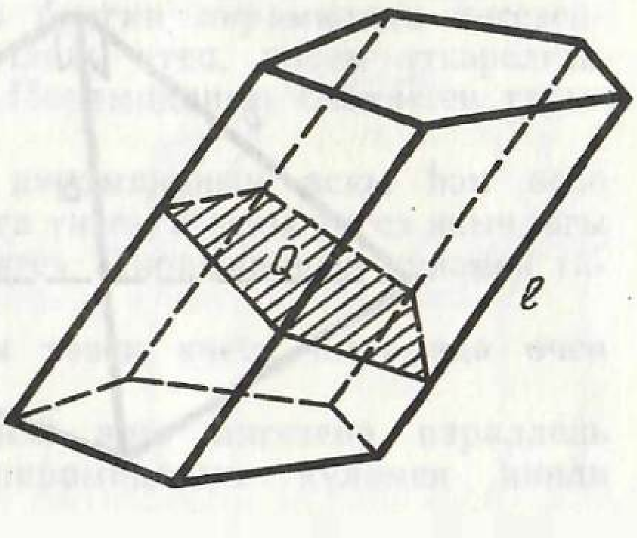
21. Дүртпочмаклы төзек призманың диагонале 3,5 см, ян кырының диагонале 2,5 см. Призманың күләмен табыгыз.

22. Өчпочмаклы төзек призма нигезенең ягы a га тигез, ян өслеге нигез мәйданнарының суммасына тигез зурлыкта. Призманың күләмен табыгыз.

23. Алтыпочмаклы төзек призманың иң зур диагональ кисе-



485 нче рәсем



486 нчы рәсем

менең мәйданы 4 $м^2$, каршы ятучы ике ян кыры арасындагы ераклык 2 м. Призманың күләмен табыгыз.

24. Авыш призманың ян кабыргаларына перпендикуляр һәм барлык ян кабыргаларын кисеп үтүче кисем үткәрелгән. Кисем мәйданы Q га, ян кабыргалары l га тигез булса, призманың күләмен табыгыз (486 нчы рәсем).

25. Өчпочмаклы авыш призманың ян кабыргалары 15 м га, аларны эченә алган параллель турылар арасындагы ераклыклар 26 м, 25 м һәм 17 м га тигез. Призманың күләмен табыгыз.

26. Су агызу трубасының аркылы кисеме — нигезе 1,4 м, биеклеге 1,2 м га тигез булган тигезьянлы өчпочмак формасында. Трубаның үткәрү сәләтен (1 сәгатькә туры килгән куб метрларда) исәпләп чыгарыгыз. Агым тизлеге 2 м/с.

27. Тимер юл өеменең аркылы кисеме трапеция формасында. Аның аскы нигезе 14 м, өске нигезе 8 м, биеклеге 3,2 м. 1 км өемгә ничә куб метр җир кирәклеген табыгыз.

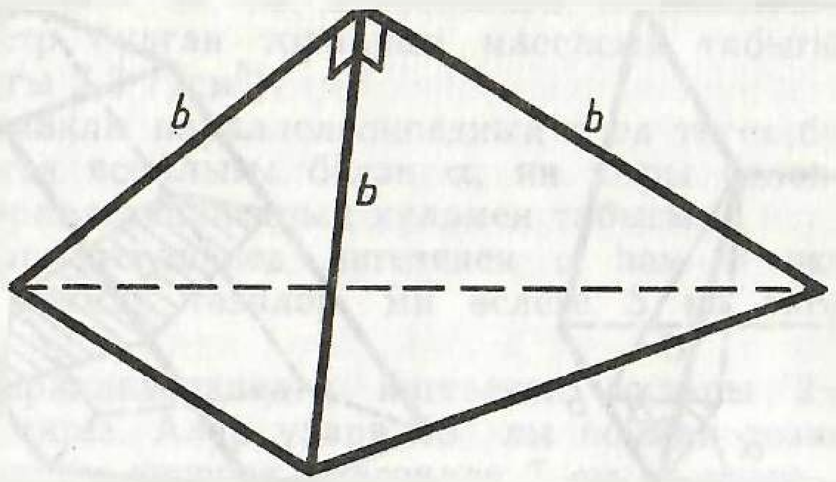
28. Өчпочмаклы туры призма нигезенең яклары 4 см, 5 см һәм 7 см га тигез, ә ян кабыргасы нигезенең зуррак биеклегенә тигез. Призманың күләмен табыгыз.

29. Өчпочмаклы туры призманың нигез мәйданы 4 $см^2$, ә ян кырларының мәйданнары 9 $см^2$, 10 $см^2$, 17 $см^2$. Күләмен табыгыз.

30. Призманың нигезе — бер ягы 2 см га, калган ике ягы 3 әр см га тигез булган өчпочмак. Ян кабыргасы 4 см га тигез һәм нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи. Аңа тигез зурлыктагы кубның кабыргасын табыгыз.

31. Авыш призманың нигезе — ягы a га тигез булган тигезьяклы өчпочмак; ян кырларының берсе нигезгә перпендикуляр һәм ул кечерәк диагонале c га тигез булган ромбтан гыйбарәт. Призманың күләмен табыгыз.

32. Дүртпочмаклы туры призманың биеклеге h, диагональ-



487 нче рәсем

ләре нигез яссылыгы белән α һәм β почмаклары ясый. Нигезенең диагональләре арасындагы кысынкы почмагы γ. Призманың күләмен табыгыз.

33. Нигезенең ягы a га, кабыргасы b га тигез булган төзек 1) өчпочмаклы; 2) дүртпочмаклы; 3) алтыпочмаклы пирамиданың күләмен табыгыз.

34. Алтыпочмаклы төзек пирамида нигезенең ягы a га, нигезе янындагы икекырлы почмагы 45° ка тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.

35. Өчпочмаклы пирамиданың ян кабыргалары үзара перпендикуляр һәм һәркайсы b га тигез (487 нче рәсем). Пирамиданың күләмен табыгыз.

36. Өчпочмаклы төзек пирамида нигезенең ягы a га тигез, ә ян кабыргалары үзара перпендикуляр. Пирамиданың күләмен табыгыз.

37. a кабыргасы буенча төзек тетраэдрның күләмен табыгыз.

38. a кабыргасы буенча октаэдрның күләмен табыгыз.

39. Пирамиданың нигезе — яклары 9 м һәм 12 м га тигез булган турыпочмаклы; барлык ян кабыргалары 12,5 м га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.

40*. Пирамиданың нигезе — яклары 6 см, 6 см һәм 8 см га тигез булган тигезьянлы өчпочмак. Барлык ян кабыргалары 9 см га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.

41. Өчпочмаклы пирамиданың бер кабыргасы 4 см га, ә калганнарының һәркайсы 3 см га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.

42. Пирамиданың нигезендә турыпочмаклык ята. Пирамиданың һәр ян кабыргасы l га тигез һәм турыпочмаклыкның чиктәш яклары белән α һәм β почмаклары төзи. Пирамиданың күләмен табыгыз.

43. Пирамиданың нигезендә ике почмагы α һәм β га, ә камаучы түгәрәгенең радиусы R га тигез булган өчпочмак ята. Ян кабыргалары нигез яссылыгына γ почмагы ясап авышканнар. Пирамиданың күләмен табыгыз.

44. Нигез мәйданнары Q_1 һәм $Q_2 (Q_1 > Q_2)$, биеклеге h булган кисек пирамиданың күләмен табыгыз.

45. Нигез мәйданы Q_1 гә тигез булган пирамидада нигезеннән h ераклыкта, аңа параллель итеп, кисем үткәрелгән. Кисем мәйданы Q_2 гә тигез. Пирамиданың биеклеген табыгыз.
46. Дүртпочмаклы төзек кисек пирамиданың аскы һәм өске нигезләренең яклары a һәм b га тигез, ә аскы нигез янындагы икекырлы почмаклары α га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.
47. Үткән мәсьәләне өчпочмаклы төзек кисек пирамида өчен чишегез.
48. Пирамида биеклегенең уртасы аша нигезенә параллель яссылык үткәрелгән. Ул пирамиданың күләмен нинди чагыштырмада бүлә?
49. Пирамиданың биеклеге h. Аның нигезенә параллель һәм күләмен урталай бүлүче кисем пирамиданың түбәсеннән нинди ераклыкта үтә?

§ 22. ӘЙЛӘНҮ ҖИСЕМНӘРЕНЕҢ КҮЛӘМНӘРЕ ҺӘМ ӨСЛЕКЛӘРЕ

202. ЦИЛИНДРНЫҢ КҮЛӘМЕ

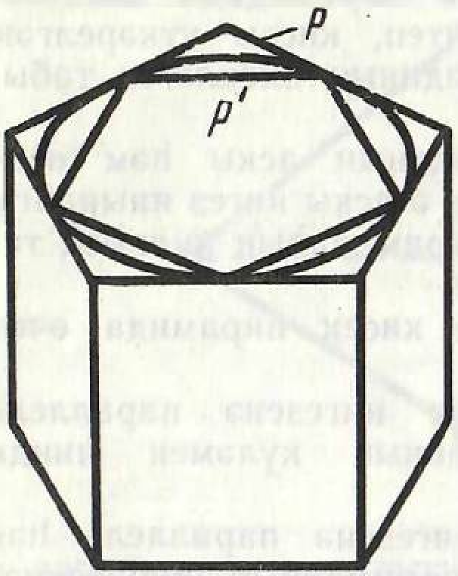
Әгәр җисемне гади, ягъни чикле сандагы өчпочмаклы пирамидаларга бүлгәләргә мөмкин булса, аның күләме шул пирамидаларның күләмнәре суммасына тигез. Теләсә нинди җисемнең күләме түбәндәгечә табыла.

Бирелгән җисемне эченә алган гади җисемнәр һәм аның эчендә урнашкан гади җисемнәр булып, аларның күләмнәре бу җисем күләме V дан теләгән кадәр аз аерылса, бу җисем V күләменә ия була.

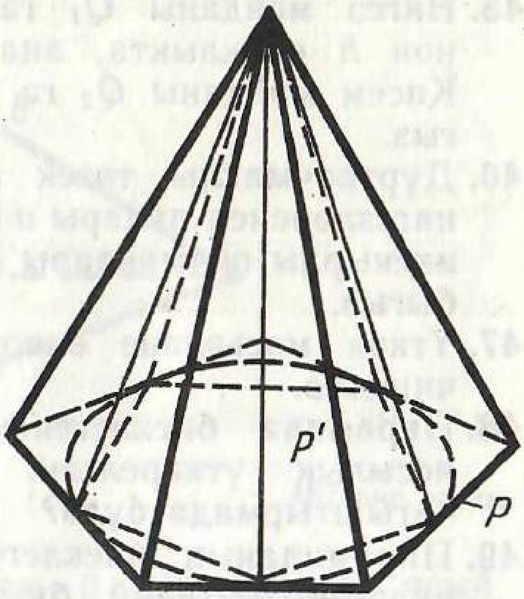
Бу билгеләмәне нигез радиусы R һәм биеклеге H булган цилиндрның күләмен табуга кулланып карыйк.

Шулай итеп, түгәрәк мәйданы өчен формула чыгарганда ике n-почмаклык төзелгән иде (аларның берсе түгәрәкне үз эченә ала, икенчесе түгәрәк эчендә урнашкан) һәм аларның мәйданнары n ны чикләнмәгән рәвештә арттырганда түгәрәк мәйданына якынлаша. Шундый күппочмакларны цилиндр нигезендә яткан түгәрәк өчен дә төзик. P — түгәрәкне үз эченә алган күппочмак, P' — түгәрәк эчендәгесе булсын (488 нче рәсем).

Нигезләре P һәм P', биеклеге цилиндр биеклеге H ка тигез булган ике туры призма төзик. Бер призма цилиндрны үз



488 нче рәсем



489 нчы рәсем

эченә ала, ә икенче призма цилиндр эченә урнашкан. n ны чикләнмәгән рәвештә арттырганда призманың нигез мәйданнары цилиндрның нигез мәйданы S ка чикләнмәгән рәвештә якынлашканга күрә, аларның күләмнәре дә SH ка чикләнмәгән рәвештә якынлаша. Цилиндр күләменең билгеләмәсе буенча

$$V = SH = \pi R^2 H.$$

Шулай итеп, ***цилиндрның күләме аның нигез мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышына тигез.***

203. КОНУСНЫҢ КҮЛӘМЕ

Конусның нигез яссылыгында ике күппочмак: конусның нигезен эченә алган P күппочмагы һәм конус нигезе эчендә P' күппочмагы төзибез (489 нчы рәсем). Нигезләре P һәм P' булган, түбәсе конус түбәсендә яткан ике пирамида төзибез. Беренче пирамида конусны эченә ала, ә икенче пирамида конус эчендә урнашкан.

Белгәнебезчә, яклар саны n ны чиксез арттырганда мәйданнары конус нигезендәге түгәрәк мәйданына якынлаша торган P һәм P' күппочмаклары бар. Мондый күппочмаклар өчен төзелгән пирамидаларның күләмнәре чикләнмәгән рәвештә $\frac{1}{3}SH$ ка якынлаша, монда S — конус нигезенең мәйданы, ә H — аның биеклеге.

Билгеләмә буенча моннан конусның күләме

$$V=\frac{1}{3}SH=\frac{1}{3}\pi R^2H$$

икәнлеге килеп чыга.

Шулай итеп, ***конусның күләме нигез мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышының өчтән беренә тигез.***

204. КИСЕК КОНУСНЫҢ КҮЛӘМЕ

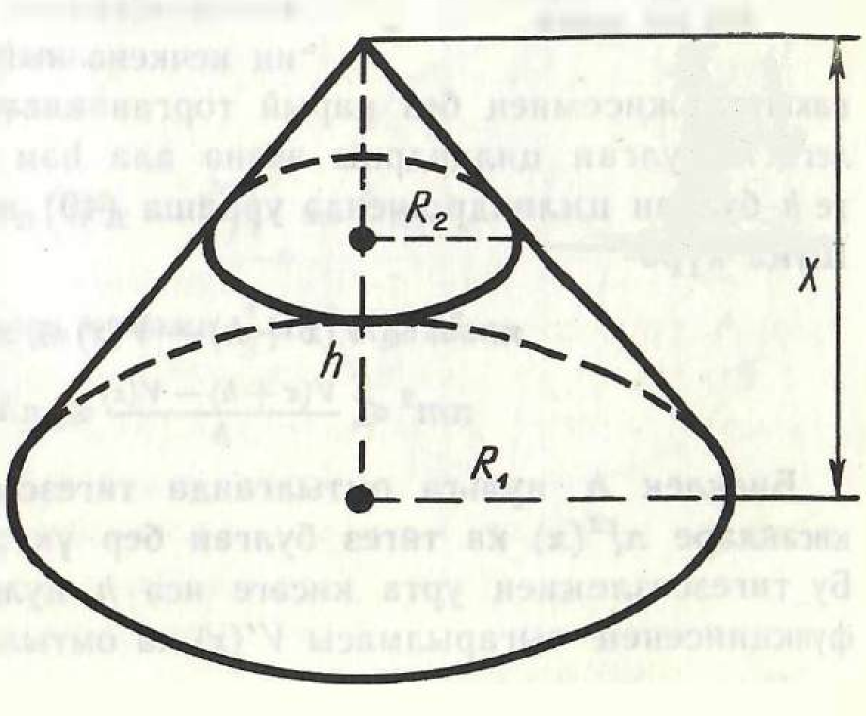
Мәсьәлә (15). Нигез радиуслары R_1 һәм $R_2 (R_2 < R_1)$, биеклеге h булган кисек конусның күләмен табыгыз.

Чишү. Бирелгән кисек конусны тулы конуска тутырабыз (490 нчы рәсем). Аның биеклеге x булсын. Кисек конусның күләме ике тулы конусның күләмнәре аермасына тигез: берсенең нигез радиусы R_1, биеклеге x, икенчесенең нигез радиусы R_2, биеклеге $x-h$.

Конусларның охшашлыгыннан x ны табабыз: $\frac{x}{x-h}=\frac{R_1}{R_2}$, $x=\frac{hR_1}{R_1-R_2}$. Кисек конусның күләме

$$V=\frac{1}{3}\left[\pi R_1^2\frac{hR_1}{R_1-R_2}-\pi R_2^2\left(\frac{hR_1}{R_1-R_2}-h\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\frac{R_1^3-R_2^3}{R_1-R_2}=\frac{1}{3}\pi h(R_1^2+R_1R_2+R_2^2).$$

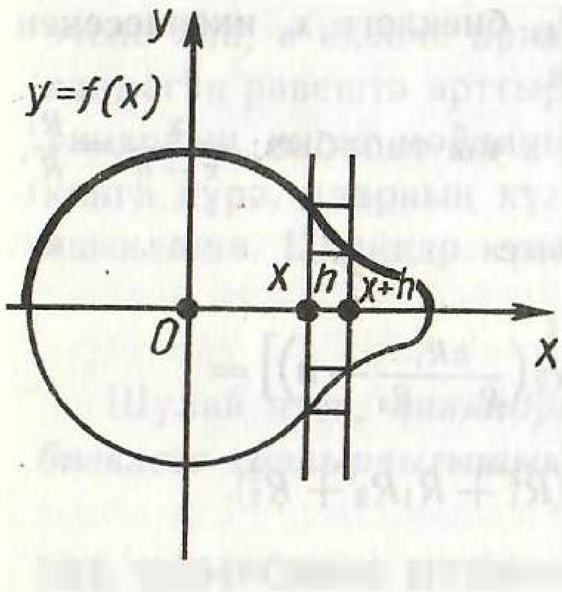


490 нчы рәсем

205. ӘЙЛӘНҮ ҖИСЕМНӘРЕНЕҢ КҮЛӘМНӘРЕ ӨЧЕН ГОМУМИ ФОРМУЛА

Иң гади очракта *әйләнү җисеме* дипниндидер турыга (*әйләнү күчәренә*) перпендикуляр яссылыклар белән үзәкләре әлеге турыда булган түгәрәкләр буенча киселә торган җисем атала. Түгәрәк цилиндр, конус, шар әйләнү җисемнәренең мисаллары булып торалар. Әйләнү җисеменең күләмен исәпләп чыгару өчен формула табыйк.

Җисемнең күчәре аша яссылык үткәрәбез һәм җисем күчәрен x күчәре дип алып, бу яссылыкта Декарт координаталары x, y ны кертәбез (491 нче рәсем). xy яссылыгы җисем өслеген x күчәре симметрия күчәре булган сызык буенча кисә. $y = f(x)$ тигезләмәсе бу сызыкның x күчәреннән өстә урнашкан кисәгенеке булсын.



491 нче рәсем

$(x, 0)$ ноктасы аша x күчәренә перпендикуляр яссылык үткәрик, һәм җисем күләменең бу яссылыктан сулда яткан кисәген $V(x)$ аша тамгалыйк; $V(x)$ x тан функция була. $V(x+h) - V(x)$ аермасы x күчәренә перпендикуляр һәм x, $x+h$ абсциссалы нокталар аша үтүче ике яссылык арасында урнашкан h калынлыктагы җисем күләмен күрсәтә. $f(x)$ функциясенең $[x, x+h]$ кисемтәсендәге иң зур кыйммәте M, иң кечкенә кыйммәте m булсын. Ул вакытта җисемнең без карый торган кисәге радиусы M, биеклеге h булган цилиндрны эченә ала һәм радиусы M, биеклеге h булган цилиндр эчендә урнаша (491 нче рәсемне карагыз). Шуңа күрә

$$\pi m^2 h \leqslant V(x+h) - V(x) \leqslant \pi M^2 h,$$

$$\pi m^2 \leqslant \frac{V(x+h) - V(x)}{h} \leqslant \pi M^2.$$

Биеклек h нульгә омтылганда тигезсезлекнең сул һәм уң кисәкләре $\pi f^2(x)$ ка тигез булган бер үк зурлыкка омтылалар. Бу тигезсезлекнең урта кисәге исә h нульгә омтылганда $V(x)$ функциясенең чыгарылмасы $V'(x)$ ка омтыла. Димәк,

$$V'(x) = \pi f^2(x).$$

Анализдан билгеле булган формула буенча

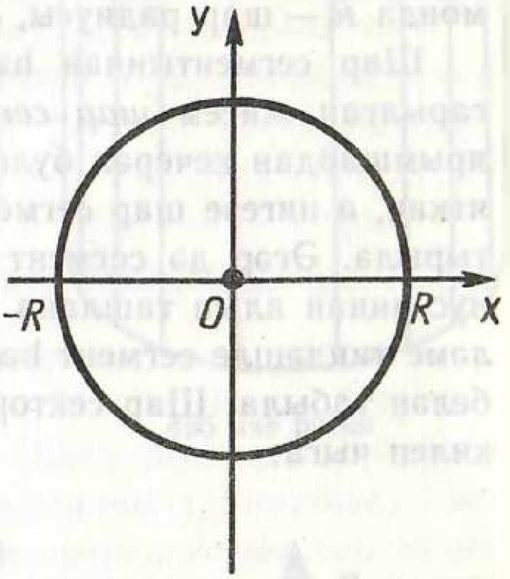
$$V(b) - V(a) = \int_a^b V'(x)dx = \int_a^b \pi f^2(x)dx, \ a < b.$$

Бу формула $x = a$ һәм $x = b$ параллель яссылыклары арасындагы җисем кисәгенең күләмен бирә дә инде.

206. ШАРНЫҢ КҮЛӘМЕ

Әйләнү җисемнәренең күләмнәре өчен табылган формуланы шар күләмен исәпләү өчен кулланыйк.

Шарның үзәген координаталар башлангычы итеп алып, Декарт координаталары кертик (492 нче рәсем). xy яссылыгы R радиуслы шар өслеген



492 нче рәсем

$$x^2 + y^2 = R^2$$

тигезләмәсе белән бирелгән әйләнә буенча кисеп үтә.

x лар күчәреннән өстә урнашкан ярымәйләнә

$$y = f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}, \ -R < x \leqslant R$$

тигезләмәсе белән бирелә.

Шуңа күрә шар күләме

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Шулай итеп, ***шарның күләме*** $\frac{4}{3}\pi R^3$ ***ка тигез.***

207. ШАР СЕГМЕНТЫНЫҢ ҺӘМ ШАР СЕКТОРЫНЫҢ КҮЛӘМЕ

Шарның яссылык белән кистереп алынган кисәге *шар сегменты* дип атала.

Шар сегментының күләме өчен формуланы шар формуласы күләменә аналогик рәвештә табабыз (493 нче рәсем):

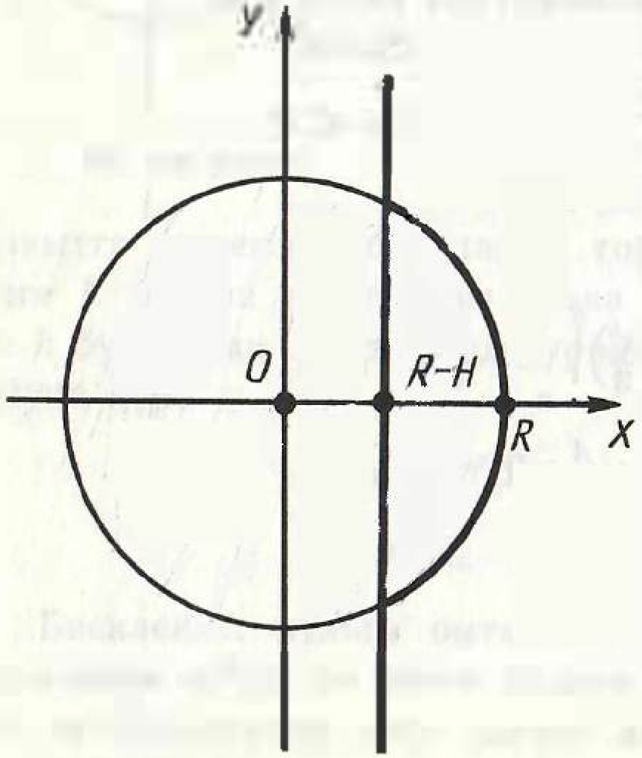
$$V = \pi \int\limits_{R-H}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-H}^{R} = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right),$$

монда R — шар радиусы, H — шар сегментының биеклеге.

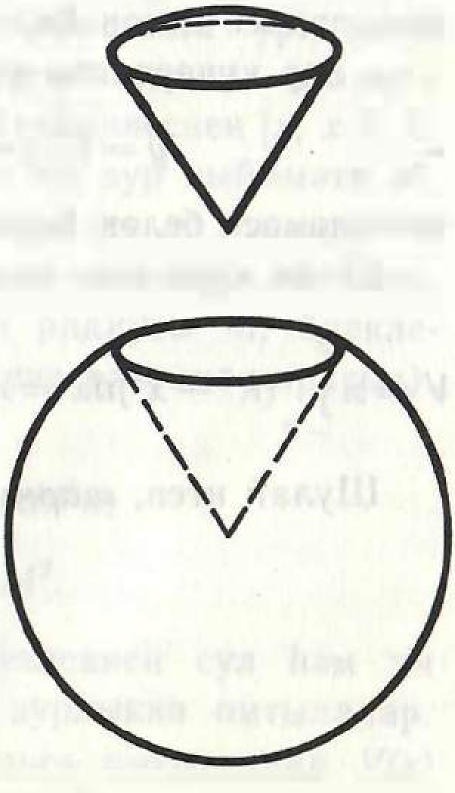
Шар сегментыннан һәм конустан түбәндәгечә китереп чыгарылган җисем *шар секторы* дип атала. Әгәр шар сегменты ярымшардан кечерәк булса, шар сегменты түбәсе шар үзәгендә яткан, ә нигезе шар сегментының нигезе булган конус белән тутырыла. Әгәр дә сегмент ярымшардан зуррак булса, әлеге конус аннан алып ташлана (494 нче рәсем). Шар секторының күләме тиндәшле сегмент һәм конус күләмнәрен кушу яки алу юлы белән табыла. Шар секторының күләме өчен түбәндәге формула килеп чыга:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

монда R — шар радиусы, H — тиндәшле шар сегментының биеклеге.



493 нче рәсем


494 нче рәсем

208. ЦИЛИНДРНЫҢ ЯН ӨСЛЕГЕ МӘЙДАНЫ

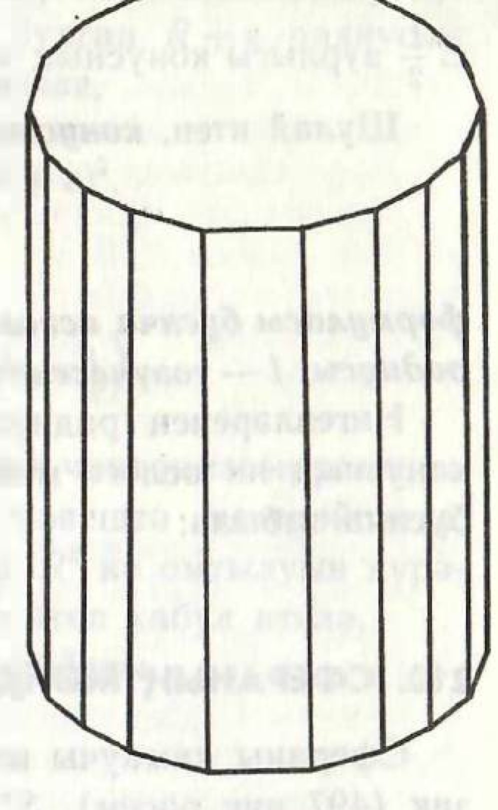
Цилиндрга төзек n-почмаклы призма камыйк (495 нче рәсем). Бу призманың ян өслеге $S_n = P_n H$, монда P_n — призма нигезенең периметры, H — аның биеклеге.

Белгәнебезчә, n ны чикләнмәгән рәвештә арттырганда P_n чикләнмәгән рәвештә цилиндр нигезендәге әйләнәнең озынлыгы C га якынлаша. Димәк, призманың ян өслеге мәйданы чикләнмәгән рәвештә CH ка якынлаша. Шуңа күрә CH цилиндрның ян өслегенең мәйданы итеп кабул ителә.

Шулай итеп, ***цилиндрның ян өслеге мәйданы***

$$S = CH = 2\pi RH$$

формуласы буенча исәпләнә, монда R — цилиндрның нигез радиусы, H — аның биеклеге.



495 нче рәсем

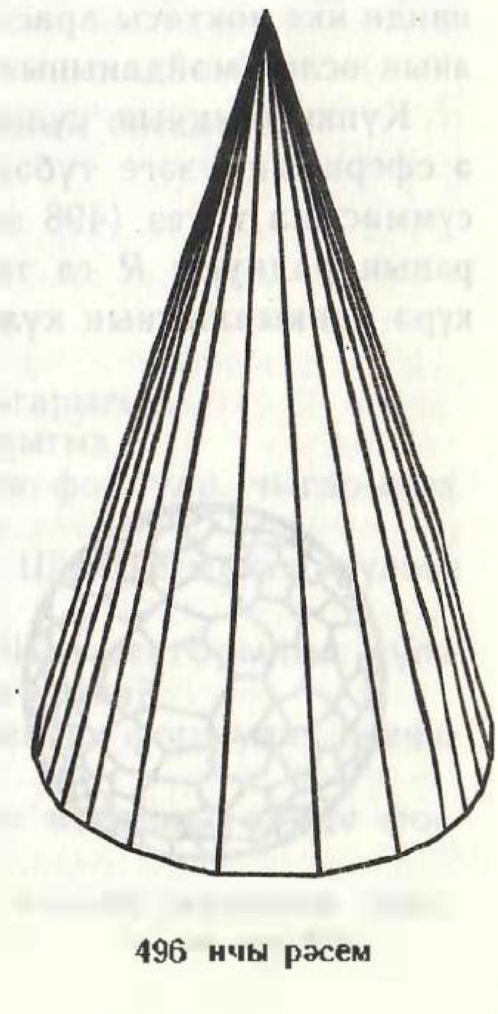
209. КОНУСНЫҢ ЯН ӨСЛЕГЕ МӘЙДАНЫ

Конуска төзек n-почмаклы пирамида камыйк (496 нчы рәсем). Аның ян өслеге мәйданы

$$S_n = \frac{1}{2} P_n l_n,$$

монда P_n — пирамида нигезенең периметры, l_n — апофема.

n ны чикләнмәгән рәвештә арттырганда нигезенең периметры P_n чикләнмәгән рәвештә конус нигезендәге әйләнәнең озынлыгы C га, ә l_n апофемасы l төзүчесенең озынлыгына якынлаша. Тиңдәшле рәвештә пирамиданың ян



496 нчы рәсем

өслеге чикләнмәгән рәвештә $C\frac{l}{2}$ гә якынлаша. Шул сәбәпле $C\frac{l}{2}$ зурлыгы конусның ян өслеге мәйданы итеп кабул ителә.

Шулай итеп, ***конусның ян өслеге мәйданы***

$$S = \frac{1}{2}Cl = \pi Rl$$

формуласы буенча исәпләп чыгарыла, монда R — конусның нигез радиусы, l — төзүчесенең озынлыгы.

Нигезләренең радиуслары R_1, R_2, төзүчесе l булган кисек конусның ян өслеге мәйданын исәпләү өчен формула аналогия буенча табыла:

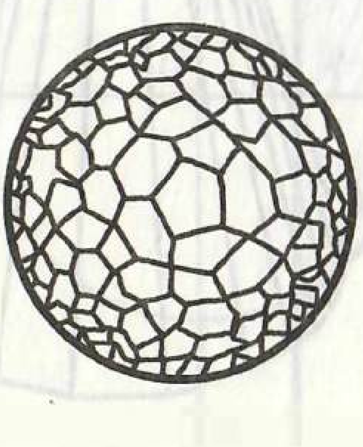
$$S = \pi(R_1 + R_2)l.$$

210. СФЕРАНЫҢ МӘЙДАНЫ

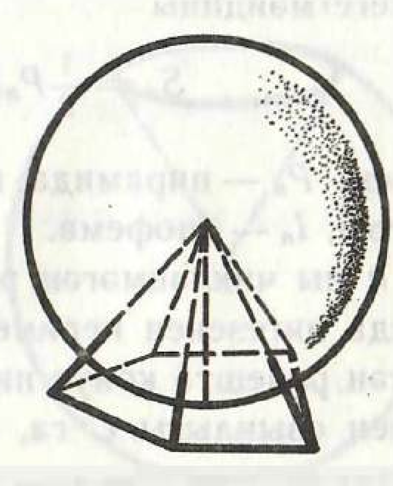
Сфераны камаучы кечкенә кырлы кабарынкы күпкырлык төзик (497 нче рәсем). S' — күпкырлыкның өслек мәйданы, ягъни аның кырларының мәйданнары суммасы. Күпкырлык кырларының сызыкча үлчәмнәре, ягъни теләсә кайсы кырының теләсә нинди ике ноктасы арасындагы ераклык ε нан кечерәк дип уйлап, аның өслек мәйданының якынча кыйммәтен табыйк.

Күпкырлыкның күләме күпкырлыкның кырлары — нигезләре, ә сфераның үзәге түбәләре булган пирамидаларның күләмнәре суммасына тигез (498 нче рәсем). Барлык пирамидалар да сфераның радиусы R га тигез булган бер үк биеклеккә ия, шуңа күрә күпкырлыкның күләме

$$V = \frac{1}{3}S'R.$$



497 нче рәсем



498 нче рәсем

Күпкырлыкның күләме әлеге сфера белән чикләнгән шар күләменнән зуррак, ләкин үзәге шул ук булган $R+\varepsilon$ радиуслы шар күләменнән кечерәк була. Шул рәвешле,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 < \frac{1}{3}S'R < \frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3.$$

Моннан

$$4\pi R^2 < S' < 4\pi(R+\varepsilon)^2\left(1+\frac{\varepsilon}{R}\right).$$

Без күпкырлык кырларының үлчәмнәрен чикләнмәгән рәвештә кечерәйткәндә, ягъни ε чикләнмәгән рәвештә кечерәйгәндә, камаучы күпкырлыкның өслек мәйданы $4\pi R^2$ ка омтылуын күрәбез. Шуңа күрә $4\pi R^2$ сфераның мәйданы итеп кабул ителә.

Шулай итеп, R радиуслы сфераның мәйданы

$$S=4\pi R^2$$

формуласы буенча исәпләп чыгарыла.

Шар секторының сферик кисәгенең мәйданы аналогик рәвештә табыла, ягъни сегментның сферик мәйданы өчен

$$S=2\pi RH$$

формуласы чыгарыла, монда H — сегментның биеклеге.

?КОНТРОЛЬ СОРАУЛАР

1. Цилиндрның күләме өчен формула чыгарыгыз.
2. Конусның күләме өчен формула чыгарыгыз.
3. Әйләнү җисемнәренең күләмнәре өчен формула чыгарыгыз.
4. Шар күләме өчен формула чыгарыгыз.
5. Шар сегменты дип нәрсәгә әйтәләр? Шар сегменты күләме өчен формула чыгарыгыз.
6. Шар секторы дип нәрсәгә әйтәләр? Шар секторының күләме нинди формула буенча исәпләп чыгарыла?
7. Цилиндрның ян өслеге мәйданы нинди формула буенча исәпләп чыгарыла?
8. Конусның (кисек конусның) ян өслеге мәйданы нинди формула буенча табыла?
9. Сфераның мәйданы нинди формула буенча исәпләп чыгарыла?

Мәсьәләләр

1. 25 м бакыр үткәргечнең массасы 100,7 г. Үткәргечнең диаметрын табыгыз (бакырның тыгызлыгы 8,94 г/см^3).

2. Пар казанына су бирүче насосның су бирү өчен ике цилиндры бар. Цилиндрларның диаметрлары 80 мм, ә пешкәкнең адымы 150 мм. Һәр пешкәк минутка 50 эшче йөреш ясаса, насос бер сәгатьтә күпме су бирә ала?

3. Цилиндрның күләме *n* тапкыр зурайсын өчен, нигезен үзгәрешсез калдырганда, биеклеген ничә тапкыр зурайтырга кирәк? Күләме *n* тапкыр зурайсын өчен, биеклеген үзгәрешсез калдырганда, нигез радиусын ничә тапкыр зурайтырга кирәк?

4. Цилиндрга өчпочмаклы төзек призма, ә призмага цилиндр камалган. Цилиндрларның күләмнәре чагыштырмасын табыгыз.

5. Һәр кабыргасы *a* га тигез булган алтыпочмаклы төзек призмага камалган цилиндрның күләмен табыгыз.

6. Кургаш торбаның стенасы калынлыгы 4 мм, эчке диаметры 13 мм (кургашның тыгызлыгы 11,4 г/см^3). Шундый 25 м торбаның массасын табыгыз.

7. Вак таш өеме нигез радиусы 2 м, ә төзүчесе 2,5 м булган конус формасында. Вак таш өеменең күләмен табыгыз.

8. Конусның күчәр кисеме — мәйданы 9 м^2 булган тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмак. Конусның күләмен табыгыз.

9. Конусның төзүчесенең озынлыгы l, нигезенең әйләнә озынлыгы c. Конусның күләмен табыгыз.

10. Конусның төзүчесе нигез яссылыгы белән α почмагы төзи. Конусның күләмен табыгыз.

11. Печән кибәне цилиндр формасында өелеп, конус формасында очланган. Аның нигез радиусы 2,5 м, биеклеге 4 м, шул ук вакытта цилиндрик кисәгенең биеклеге 2,2 м. Печәннең тыгызлыгы 0,03 г/см^3. Печән кибәненең массасын табыгыз.

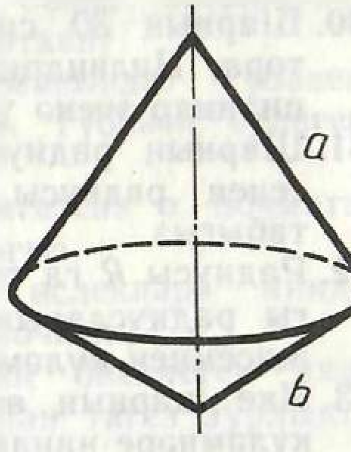
12. Биеклеге 0,18 м, нигез диаметры 0,24 м булган конус формасындагы савыттан сыеклык нигез диаметры 0,1 м булган цилиндрик савытка бушатылган. Савыттагы сыеклыкның биеклеген табыгыз.

13. Тигезьяклы өчпочмак үзенең ягы тирәсендә әйләнә. Килеп чыккан әйләнү җисеменең күләмен табыгыз.

14. Катетлары *a* һәм *b* га тигез булган турыпочмаклы өчпочмак гипотенузасы тирәсендә әйләнә. Килеп чыккан җисемнең күләмен табыгыз (499 нчы рәсем).

15*. Нигезенең радиуслары R_1 һәм $R_2 (R_2 < R_1)$, биеклеге h булган кисек конусның күләмен табыгыз.

16. Очларының диаметрлары 42 см һәм 25 см булган нарат бүрәнәнең озынлыгы 15,5 м. Бүрәнәнең күләмен аның уртасындагы аркылы кисем мәйданын озынлыгына тапкырлап исәпләгәндә, нинди ялгыш (процентларда) җибәрелер?
17. Кисек конус нигезенең радиуслары R һәм r; төзүчесе нигез яссылыгына 45° лы почмак ясап авышкан. Күләмен табыгыз.



499 нчы рәсем

18. Кисек конусның күчәр кисеме мәйданы нигез мәйданнары аермасына тигез, ә нигезенең радиуслары R һәм r. Конусның күләмен табыгыз.
19. Нигез радиуслары 4 см һәм 22 см булган кисек конус белән аңа тигез зурлыктагы цилиндрның биеклекләре бер үк. Бу цилиндрның нигез радиусы күпмегә тигез булыр?
20. Нигезләренең бирелгән R һәм r радиуслары аша кисек конус белән тулы конусның күләмнәре чагыштырмасын табыгыз.
21. Көйләгечнең чуен шарының массасы 10 кг. Шарның диаметрын табыгыз (чуенның тыгызлыгы 7,2 г/см^3).
22. Диаметрлары 25 см һәм 35 см булган ике чуен шар бер шар итеп коелган. Яңа шарның диаметрын табыгыз.
23. 1 кг массалы кургаш кисәге бар. Бу кисәктән 1 см диаметрлы ничә шар коеп була (Кургашның тыгызлыгы 11,4 г/см^3)?
24. Биеклеге нигез диаметрына тигез булган агач цилиндрдан мөмкин булган иң зур шар кырып ясалган. Материалның ничә проценты кырып ташланган?
25. Куыш шарның тышкы диаметры 18 см. Стенасының калынлыгы 3 см. Шар ясалган материалның күләмен табыгыз.
26. Савыт R радиуслы ярымшарга цилиндр өстәп ясалган. Савытның күләме V га тигез булсын өчен, аның цилиндрик кисәгенең биеклеге күпме булырга тиеш?
27. Шарның диаметрына перпендикуляр яссылык диаметрны 3 см һәм 9 см лы кисәкләргә бүлә. Шарның күләме нинди кисәкләргә бүленә?
28. Биеклеге шар диаметрының 0,1 енә тигез булган шар сегментының күләме шар күләменең нинди өлешен тәшкил итә?
29. Ике тигез шар берсенең үзәге икенчесенең өслегендә ятарлык итеп урнашкан. Аларның уртак кисәгенең күләме бөтен шар күләменә нинди чагыштырмада була?

30. Шарның 30 см лы диаметры цилиндрның күчәре булып тора. Цилиндрның нигез радиусы 12 см га тигез. Шарның цилиндр эченә урнашкан кисәгенең күләмен табыгыз.

31. Шарның радиусы 75 см, шар секторының нигез әйләнәсенең радиусы 60 см булса, шар секторының күләмен табыгыз.

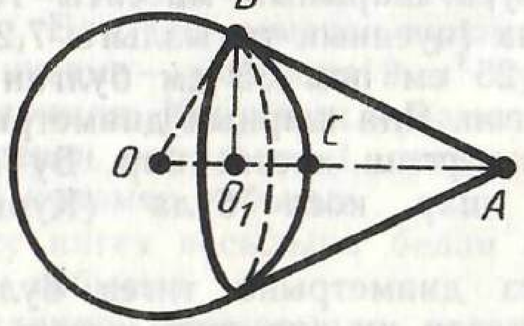
32. Радиусы R га тигез булган 30° лы түгәрәк секторы ян ягындагы радиусларының берсе тирәсендә әйләнә. Килеп чыккан җисемнең күләмен табыгыз.

33. Ике шарның өслекләре $m:n$ чагыштырмасында. Аларның күләмнәре нинди чагыштырмада?

34. Турыпочмаклы өчпочмакның гипотенузасы һәм катетлары өч шарның диаметрлары булып тора. Аларның өслекләре арасында нинди бәйләнеш бар?

35. Квадратны ягы тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан җисемнең өслеге радиусы квадрат ягына тигез булган шар өслеге белән тигез зурлыкта икәнен исбатлагыз.

36. Шарның радиусы 15 см. Шар өслегенең шарның үзәгеннән 25 см ераклыктагы ноктадан күренә торган өлешенең мәйданын табыгыз (500 нче рәсем).



500 нче рәсем

37. 10 см радиуслы шар күчәре буйлап цилиндр рәвешендә борауланган. Тишемнең диаметры 12 см. Җисемнең тулы өслеген табыгыз.

38. 65 см диаметрлы төтен торбасының биеклеге 18 м. Материалның 10% ы ялгауларга китсә, бу торбаны ясау өчен күпме материал кирәк булыр?

39. Подвалның ярымцилиндрик түбәсенең озынлыгы 6 м, диаметры 5,8 м. Подвалның тулы өслеген табыгыз.

40. Түгәрәк табаклы калайдан диаметры 25 см, биеклеге 50 см булган цилиндрик стакан штамплап ясалган. Штамплаганда калайның мәйданы үзгәрми дип уйлаганда, аның диаметрын табыгыз.

41. Цилиндр нигезенең мәйданы Q га, ә күчәр кисеменең мәйданы M га тигез. Цилиндрның тулы өслеге нәрсәгә тигез?

42. Биеклеге 3,5 м га, нигез диаметры 4 м га тигез булган

конус рәвешендәге палатка парусина белән капланган. Палаткага ничә квадрат метр парусина киткән?

43. Силос башнясының түбәсе конус формасында. Түбәнең биеклеге 2 м, башняның диаметры 6 м. Түбәнең өслеген табыгыз.

44. Конусның нигез мәйданы S, төзүчесе нигезенә α почмагы ясап авышкан. Конусның ян өслеген табыгыз.

45. Тигезьяклы конусның ян һәм тулы өслекләре нинди чагыштырмада булыр (кисеме — төзек өчпочмак)?

46. Тигезьяклы конусның тулы өслеге аның биеклеген диаметр итеп алып төзелгән шар өслеге белән тигез зурлыкта икәнен исбатлагыз.

47. Ярымтүгәрәк коник өслек итеп төрелгән. Конусның төзүче белән күчәре арасындагы почмакны табыгыз.

48. Түгәрәк секторының радиусы 3 м га, почмагы 120° ка тигез. Сектор коник өслек итеп төрелгән. Конусның нигез радиусын табыгыз.

49. Бер очының диаметры 0,43 м, икенче очының диаметры 0,036 м, төзүчесе 1,42 м булган рупор ясау өчен ничә квадрат метр җиз калай кирәк?

50. 1 $м^2$ ны буяр өчен 150 г олиф кирәк булса, диаметрлары 25 см һәм 30 см, төзүчесе 27,5 см булган коник формадагы 100 чиләкнең тышкы өслеген буяр өчен күпме олиф кирәк?

МӘСЬӘЛӘЛӘРГӘ ҖАВАПЛАР ҺӘМ КҮРСӘТМӘЛӘР

§ 1.

4. Ике нокта аша бары тик бер генә туры үткәреп була. **7.** 1) 6 см; 2) 7,7 дм; 3) 18,1 м. **10.** Ятмый. **11.** Аера алмый. **12.** Ятмый. **13.** Ятмый. **14.** 0,5 м яки 5,9 м. **15.** 1) $AC=9$ м, $BC=6$ м; 2) $AC=10$ м, $BC=5$ м; 3) $AC=BC=7{,}5$ м; 4) $AC=6$ м, $BC=9$ м. **18.** 1), 4), 6). Кисә, 2), 3), 5) кисми. **19.** 6 кисемтә. **24.** 1) 110°; 2) 119°; 3) 179°. **25.** 2), 3) Үтә алмый. **26.** 1) $\angle(ac)=45°$, $\angle(bc)=15°$; 2) $\angle(ac)=40°$, $\angle(bc)=20°$; 3) $\angle(ac)=\angle(bc)=30°$; 4) $\angle(ac)=24°$, $\angle(bc)=36°$. **29.** Юк. **31.** 1) 1,2 м; 2) 2,4 см. **33.** 11 см. **34.** 100°. **36.** $PQ=5$ см, $QR=6$ см, $PR=7$ см. **37.** $\angle A=40°$, $\angle B=60°$, $\angle C=80°$. **39.** $\triangle ABC$ да $AB=5$ см, $BC=6$ см, $AC=7$ см. **40.** Бар. **42.** Булмый. **43.** Кисә алмый. **49.** 2) Күрсәтмә. *A* һәм *C* нокталарын кисемтә белән тоташтырып, 49 нчы 1) мәсьәләнең расланышыннан файдаланыгыз. **51.** 1) 30 нчы мәсьәләнең чишелешен карагыз. 2) *A* ноктасы аша *a* турысыныкы булмаган туры үткәрегез.

§ 2.

1. 150°, 135°, 120°, 90°. **2.** 1), 2) Булмый, 3) Була. **4.** 105° һәм 75°; 2) 110° һәм 70°; 3) 45° һәм 135°; 4) 90° һәм 90°. **5.** 180°; 90°; 120°. **6.** 1) 72° һәм 108°; 2) 54° һәм 126°; 3) 55° һәм 125°; 4) 88° һәм 92°. **7.** 150°, 150°, 30°. **8.** 130°. **10.** 144° һәм 36°. **11.** 65° һәм 115°. **12.** Барлык почмаклары да туры. **15.** 1) 15°; 2) 26°; 3) 86°. **16.** 1) 120°; 2) 150°; 3) 178°. **18.** Күрсәтмә. Почмакның яклары бирелгән нур бер кисәге булган турыга карата төрле ярымъяссылыкларда яталар. **19.** 90°. **20.** Күрсәтмә. 19 нчы мәсьәләнең нәтиҗәсеннән һәм теорема 2.3 тән файдаланыгыз. **21.** 1) 155°; 2) 135°; 3) 105°. **22.** Күрсәтмә. Теорема 1.1 дән файдаланыгыз. **23.** 1) 20°; 2) 60°; 3) 90°. **24.** $\angle(a_1b)=120°$, $\angle(a_1c)=150°$, $\angle(bc)=30°$. **25.** 1) 110°; 2) 175°; 3) 170°; 4) 130°. **26.** 1) Үтми; 2) мөмкин түгел.

§ 3.

7. Күрсәтмә. Медианаларын шул ук озынлыкта дәвам итегез. **9.** 0,3 м. **10.** 3,5 м. **11.** 1) 3,2 м, 6,2 м, 6,2 м; 2) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **22.** Күрсәтмә. Тигезьянлы өчпочмакта медиананың үзлегеннән файдаланыгыз. **25.** 3) Күрсәтмә. *BD* биссектрисасын үзе озынлыгында дәвам итегез. **27.** 15 м. **30.** Күрсәтмә. 29 нчы мәсьәләнең расланышыннан файдаланыгыз. **39.** Күрсәтмә. Медианаларын шул ук озынлыкта дәвам итегез.

§ 4.

5. AB_1C_1, AC_1B_1 почмаклары һәм BB_1C_1, CC_1B_1 почмаклары — эчке якташ, ә AB_1C_1 һәм CC_1B_1 почмаклары һәм BB_1C_1 һәм AC_1B_1 почмаклары — эчке аркылы ятучы почмаклар. *BCA* һәм *DBC* почмаклары — эчке аркылы ятучы, *CAB* һәм *DBA* почмаклары эчке якташ почмаклар. **14.** 105° һәм 75°; 2) 75°. **15.** Өч почмагының һәркайсы 72° һәм дүрт почмагының һәркайсы 108°. **16.** Мөмкин тү-

гел. **18.** 1) 100°; 2) 65°; 3) 35°; 4) 35°. **19.** 1) 30°, 60°, 90°; 2) 40°, 60°, 80°; 3) 45°, 60°, 75°; 4) 48°, 60°, 72°; 5) 50°, 60°, 70°. **20.** Мөмкин түгел. **21.** Мөмкин түгел. **22.** 1) 100°; 2) 70°; 3) 36°. **23.** 1) 50°; 2) 30°; 3) 75°. **24.** 40°, 40°. **25.** 70° һәм 40° яки 55° һәм 55°. **27.** 1) 80°, 80°, 20°; 2) 70°, 70°, 40°; 3) ике почмагы $120° - \frac{2}{3}\alpha$ га, берсе $\frac{4}{3}\alpha - 60°$ ка тигез. **29.** 1) 105°; 2) $180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; 3) 155°; 4) $90° + \frac{\gamma}{2}$. **31.** 90°. **32.** 110°, 35°, 35°. **33.** 60°, 30° һәм 90°. **34.** 110°. **36.** *A* ноктасы. **38.** 60°. **39.** $\angle D = \frac{\angle A}{2}$, $\angle E = \frac{\angle C}{2}$, $\angle DBE = \angle B + \left(\frac{\angle A + \angle C}{2}\right)$. **40.** 140°, 10°. **41.** 1) 20°; 2) 65°; 3) α. **42.** $\triangle ABD$ның почмаклары: $\angle A = \alpha$, $\angle D = 90°$, $\angle B = 90° - \alpha$, $\triangle CBD$ның почмаклары: $\angle D = 90°$, $\angle B = \alpha + \beta - 90°$, $\angle C = 180° - \alpha - \beta$. **44.** 90°, 45°, 45°. **45.** $\angle D = 90°$, $\angle B = 60°$, $\angle A = 30°$. **46.** 150°. **47.** 90°.

§ 5.

1. Күрсәтмә. Нур өстендә радиуска тигез кисемтә салыгыз. **2.** Күрсәтмә. 1 нче мәсьәләне карагыз. **5.** 60°; 2) 120°. **7.** Мөмкин түгел. **9.** 30°. **10.** 60° һәм 120°. **11.** 70 см, 10 см. **12.** Орына алмыйлар. **13.** 1) Мөмкин түгел; 2) мөмкин түгел. **14.** 2) Күрсәтмә. Каршы килеп исбатлаудан файдаланыгыз. **15.** 2) Күрсәтмә. Каршы килеп исбатлаудан файдаланыгыз. 3) Күрсәтмә. Бирелгән әйләнәләрнең уртак ноктасы аларның үзәкләре аша үтүче туры өстендә ятканын исбатлагыз. **16.** 2) Күрсәтмә. Каршы килеп исбатлаудан файдаланыгыз. **18.** Күрсәтмә. 16, 1) мәсьәләсенең расла-вынннан файдаланыгыз. **28.** Күрсәтмә. Төзек өчпочмак төзүдән башлагыз. **32.** Күрсәтмә. Эзләнелә торган өчпочмакта медиананы үзе озынлыгында дәвам итегез. **36.** **37.** **38.** Күрсәтмә. 35 нче мәсьәләне карагыз. **39.** Күрсәтмә. Биеклек төзүдән башлагыз. **41.** Күрсәтмә. § 4 тәге 50 нче мәсьәләне карагыз. **42.** Күрсәтмә. 41 нче мәсьәләне карагыз. **46.** Күрсәтмә. Башта бер ягы — эзләнелә торган өчпочмакның бирелгән ягына, икенчесе — калган ике ягының суммасына һәм алар арасындагы бирелгән почмакка тигез булган өчпочмак төзегез. **47.** Күрсәтмә. Алдагы мәсьәләнең күрсәтмәсеннән файдаланыгыз, аерма шунда, эзләнелә торган өчпочмакның яклары суммасы урынына аларның аермасын алырга кирәк. **48.** 46 нчы мәсьәләгә күрсәтмәне карагыз. **50.** Күрсәтмә. Бирелгән әйләнәләрнең радиуслары суммасына яки аермасына тигез радиус белән бирелгән әйләнәләрнең берсенә концентрик булган ярдәмче әйләнә төзеп, алдагы мәсьәләнең чишелешенә китерегез.

§ 6.

3. Өч. **4.** 10 м. **5.** 3 см һәм 4 см. **7.** $BC = AD = 4{,}8$ м. **8.** $AD = 15$ см, $CD = 10$ см. **9.** $\angle B = \angle D = 150°$, $\angle C = 30°$. **10.** 3 см. **11.** 40°, 140°, 140°. **12.** 115° һәм 65°. **13.** Мөмкин түгел. **14.** 60°, 60°, 120°, 120°. **15.** 1) 40°, 40°, 140°, 140°; 2) 50°, 50°, 130°, 130°; 3) 80°, 80°, 100°, 100°. **16.** 1) 55°, 55°, 125°, 125°; 2) 35°, 35°, 145°, 145°; 3) 20°, 20°, 160°, 160°. **19.** $BE = 9$ см, $CE = 6$ см. Күрсәтмә. ABE — нигезе AE булган тигезьянлы өчпочмак икәнен исбатлагыз. **20.** 0,6 м һәм 0,8 м. **21.** $AB = BD = 1{,}1$ м, $AD = 0{,}8$ м. **28.** 60 см. **29.** 10 см һәм 18 см. **30.** 12 см, 20 см. **31.** 12 см. **32.** 10 см һәм 25 см яки 7,5 см һәм 18,75 см. **35.** 80° һәм 100°. **37.** 60° һәм 120°. **41.** 4 м. **43.** 2 м. **44.** 2 м. **45.** 4 м, 8 м. **46.** 1 м. **47.** 10 см. **50.** 4 см, 5 см, 6 см. **51.** 6 см. **52.** 6 см, 5 см; 5 см. **56.** 5 м, 6 м. **57.** $a + b$. **59.** 3 м, 4 м. **61.** 70° һәм 110°. **62.** 1,7 м. **63.** 24 см; 36 см. **64.** 60° һәм 120°. **65.** 15 м. **66.** 3 см. **67.** 4 м, 6 м. **68.** 2,2 м. **69.** 9 см һәм 5 см. **70.** a. **71.** Күрсәтмә. Башта ике ягы трапециянең — ян якларына

ә өченчесе трапециянең нигезләре аермасына тигез булган өчпочмак төзегез. **72.** Күрсәтмә. Башта ике ягы — трапециянең диагональләренә, ә өченчесе нигезләренең суммасына тигез булган өчпочмак төзегез. 6.1 мәсьәләнең чишелешеннән файдаланып, башта $x = \frac{ab}{d}$ кисемтәсен төзегез.

§ 7.

2. 1) 5; 2) $\sqrt{2} \approx 1{,}4$; 3) $\sqrt{61} \approx 7{,}8$. **3.** 1) 4; 2) 12; 3) $\sqrt{11} \approx 3{,}3$. **4.** 5 м яки $\sqrt{7} \approx 2{,}6$ м. **5.** Булмый. **6.** 1) 5 см; 2) 17 дм; 3) 6,5 м. **7.** 109 см. **8.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **9.** Булмый. **10.** $\sqrt{7}$ м $\approx 2{,}6$ м. **12.** 15 см. **13.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **15.** Күрсәтмә. Башта $c = \frac{a+b}{2}$ һәм $d = \frac{|a-b|}{2}$ кисемтәләрен төзегез. Ул вакытта эзләнелә торган кисемтә $x = \sqrt{c^2 - d^2}$. **16.** $\sqrt{116}$ м $\approx 10{,}8$ м. **18.** 90°. **20.** Күрсәтмә. Нокталарның берсен кисемтә ярдәмендә өчпочмакның түбәсе белән тоташтырыгыз һәм 19 нчы мәсьәләнең нәтиҗәсеннән файдаланыгыз. **22.** Күрсәтмә. 21 нче мәсьәләнең нәтиҗәсеннән файдаланыгыз. **26.** Юк. **27.** 2 м. **28.** Күрсәтмә. Медиананы үзе озынлыгында дәвам итегез. **31.** 2) Күрсәтмә. Бу мәсьәләне 165 нче *б* рәсем буенча алдагы мәсьәләнең чишелешенә китерегез. **32.** Булмый. **34.** $R - d$, $R + d$. Күрсәтмә. Өчпочмак тигезсезлегеннән файдаланыгыз. **35.** $d + R$, $d - R$. Күрсәтмә. Өчпочмак тигезсезлегеннән файдаланыгыз. **36, 37.** Кисешми. **38.** Күрсәтмә. Әйләнәләрнең үзәкләре арасындагы ераклыкларны аларның радиуслары белән чагыштырыгыз. **39.** Мөмкин түгел. **41.** Күрсәтмә. Бирелгән саннар 40 нчы мәсьәләнең шартын канәгатьләндерә. **42.** 1), 3), 4) Булмый; 2) мөмкин. **43.** 41 нче мәсьәләнең нәтиҗәсеннән файдаланыгыз. **44.** 10 см, 6 см. **45.** $90° - \alpha$, $a \cos \alpha$, $a \sin \alpha$. **46.** $90° - \alpha$, $\frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$, $\frac{a}{\sin \alpha}$. **49.** 1) $\sin 16° = 0{,}2756$, $\cos 16° = 0{,}9613$; 2) $\sin 24°36' = 0{,}4163$, $\cos 24°36' = 0{,}9092$; 3) $\sin 70°32' = 0{,}9428$, $\cos 70°32' = 0{,}3333$; 4) $\sin 88°49' = 0{,}9998$; $\cos 88°49' = 0{,}0206$. **50.** 1) $x = 1°$; 2) $x = 30°6'$; 3) $x = 47°3'$; 4) $x = 86°9'$. **51.** 1) $\operatorname{tg} 10° = 0{,}1763$; 2) $\operatorname{tg} 40°40' = 0{,}8591$; 3) $\operatorname{tg} 50°30' = 1{,}213$; 4) $\operatorname{tg} 70°15' = 2{,}785$. **52.** 1) $x = 17°53'$; 2) $x = 38°7'$; 3) $x = 80°46°$; 4) $x = 83°50°$. **53.** 31°25′; 117°10′; 23,8 м. **54.** 34°10′ һәм 55°50′. **55.** 51°. **56.** 116°16′ һәм 63°44′. **57.** 29°52′ һәм 150°8′. **58.** 12 м, 45°14′. **59.** 60°16′. **60.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **61.** 1) а) 5; 36°52′, 53°8′; б) 41; 12°41′; 77°19′; в) 29; 43°36′; 46°24′; г) 61; 10°23′; 79°37′; 2) а) 12; 22°37′; 67°23′; б) 24; 16°16′; 73°44′; в) 15; 28°4′; 61°56′; г) 13; 81°12′; 8°48′; 3) а) 70°; 0,68; 1,88; б) 39°40′; 3,08; 2,55; в) 19°24′; 7,55; 2,66; г) 13°39′; 15,55; 3,78; 4) а) 59°33′; 5,92; 5,10; б) 49°12′; 7,65; 5,79; в) 29°25′; 8,04; 3,95; г) 22°; 9,71; 3,64. **62.** а) $\cos^2 \alpha$; 2) $\sin^2 \alpha$; 3) 2; 4) $\sin^3 \alpha$; 7; 1; 8) $\sin^2 \alpha$; 9) $1 + \operatorname{tg}^6 \alpha$. **63.** 1) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$; 2) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$; 3) $\sin \alpha = 0{,}8$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$. **64.** 1) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$; 2) $\cos \alpha = \frac{9}{41}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{40}{9}$; 3) $\cos \alpha = 0{,}6$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$. **66.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **67.** $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. **68.** 29 см яки $\sqrt{882}$ см $\approx 29{,}7$ см. **69.** $(\sqrt{3} - 1)$ м $\approx 0{,}732$ м; $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}517$ м. **70.** 60° һәм 120°. **71.** 60°, 60°, 120°, 120°. **72.** 1), 6) α; 2), 3), 4), 5) β. **73.** *BC*. **74.** $\angle A$.

§ 8.

3. 2. **4.** 3. **5.** (2; 0). **6.** (0; 3). **7.** y күчәренә параллель туры. **8.** Ике туры: $x=3$ һәм $x=-3$. **10.** Униайны. **11.** 4; 3. **12.** 1) (3; 2); 2) (−1; 3); 3) (1; 1). **13.** 1) (−2; 3); 2) (3; −5); 3) (−4; 4). **16.** (0; 1), (−2; 0), (−2; 1). **17.** $AB=5$, $AC=10$, $BC=5$. **18.** B ноктасы. **20.** (3; 3) һәм (15; 15). **23.** (3; 4), (−4; 3), (0; 5). **24.** (5; 12) һәм (5; −12); (5; −12) һәм (−5; −12). **25.** $x^2+(y-3)^2=13$. **26.** $(x+4)^2+(y-3)^2=25$. **27.** (−2; 0) яки (4; 0). **28.** $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. **29.** $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. **31.** (0; 1) һәм $\left(-\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$. **32.** (7; 0) һәм (1; 0). **36.** 1) $x+y-5=0$; 2) $3x+10y-2=0$; 3) $x+6y+13=0$. **37.** $x=0$, $y=0$, $x+2y-4=0$. **38.** $a=b=\frac{1}{3}$. **39.** 1) (−3; 0) һәм $\left(0;\ -\frac{3}{2}\right)$; 2) (4; 0) һәм (0; 3); 3) (−2; 0) һәм (0; 3); 4) (2,5; 0) һәм (0; −5). **40.** 1) (1; −2); 2) (2; 4); 3) (0,5; −2). **41.** Күрсәтмә. Ике турының кисешү ноктасын табыгыз һәм аның өченче турыда яту-ятмавын тикшерегез. **42.** $\left(2;\ \frac{5}{3}\right)$. **43.** 1) һәм 6), 2) һәм 3), 4) һәм 5). **45.** $x=2$. **46.** $y=3$. **47.** $3x-2y=0$. **48.** 1) $k=-\frac{1}{2}$; 2) $k=-\frac{3}{4}$; 3) $k=\frac{3}{2}$; 4) $k=2$. **49.** 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°. **50.** 2) (0; 1) һәм (−1; 0); 3) (0; 1) һәм $\left(-\frac{3}{5};\ -\frac{4}{5}\right)$; 4) (0; 1) һәм $\left(-\frac{2k}{k^2+1};\ \frac{1-k^2}{k^2+1}\right)$. **51.** Туры $c=\pm\sqrt{2}$ булганда әйләнәгә орына, $|c|<\sqrt{2}$ булганда аны кисә һәм $|c|>\sqrt{2}$ булганда кисми. Күрсәтмә. Әйләнәгә орынучы турының аның белән бердәнбер уртак ноктасы бар, ягъни тиңдәшле квадрат тигезләмәнең тамырлары тәңгәл килергә тиешләр. **52.** $\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120°=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 120°=-\sqrt{3}$; $\sin 135°=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 135°=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg} 135°=-1$; $\sin 150°=\frac{1}{2}$, $\cos 150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 150°=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **53.** $\sin 160°=0{,}3420$; $\cos 140°=-0{,}7660$; $\operatorname{tg} 130°=-1{,}192$. **54.** 1) $\sin 40°=0{,}6428$, $\cos 40°=0{,}7660$, $\operatorname{tg} 40°=0{,}8391$; 2) $\sin 14°36'=0{,}2521$, $\cos 14°36'=0{,}9677$, $\operatorname{tg} 14°36'=0{,}2605$; 3) $\sin 70°20'=0{,}9417$, $\cos 70°20'=0{,}3365$; $\operatorname{tg} 70°20'=2{,}798$; 4) $\sin 30°16'=0{,}5040$, $\cos 30°16'=0{,}8637$, $\operatorname{tg} 30°16'=0{,}5836$; 5) $\sin 130°=0{,}7660$, $\cos 130°=-0{,}6428$, $\operatorname{tg} 130°=-1{,}192$; 6) $\sin 150°30'=0{,}4924$, $\cos 150°30'=-0{,}8704$, $\operatorname{tg} 150°30'=-0{,}5658$. **55.** $\alpha_1\approx 11°32'$ яки $168°28'$; $\alpha_2\approx 134°26'$; $\alpha_3\approx 158°12'$; **56.** 1) $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2}$; 2) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$; 3) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha=1$; 4) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **57.** 1) $\cos\alpha=0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 3) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha=-1$ яки $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha=1$. **58.** $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$. **61.** Күрсәтмә. Башта α һәм β почмаклары икесе дә кысынкы булган очракны карагыз. **62.** 61 нче мәсьәләгә күрсәтмәне карагыз.

§ 9.

2. Квадратка. **4.** Күрсәтмә. ABC, ACD, ADE тигезьяклы өчпочмакларының C, D һәм E түбәләрен эзлекле рәвештә төзегез. E — эзләнелә торган нокта.

7. Мөмкин түгел. **9.** Күрсәтмә. Бирелгән дүртпочмакның түбәләре үзәккә карата симметриядә түбәләргә күчә. **10.** Күрсәтмә. Бирелгән ноктага карата симметриядән файдаланыгыз. **11.** 1) Кисемтә; 2) почмак; 3) өчпочмак. **14.** 1) $(-3; -4)$; 2) $(3; 4)$; 3) $(3; -4)$. **19.** Өч. **24.** Күрсәтмә. b турысына карата симметриядән файдаланыгыз. **28.** $(1; -1)$, $(2; -1)$, $(1; 1)$. **29.** 1) $a = b = 2$; 2) $a = -3$, $b = 8$; 3) $a = b = 1$. **31.** 1) Юк; 2) бар. **34.** AB һәм DC, AD һәм BC, CD һәм BA, DA һәм CB нурлары бердәй юнәлгән. AB һәм CD, BC һәм DA, DC һәм BA, AD һәм CB нурлары капма-каршы юнәлгән.

§ 10.

1. $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ бердәй юнәлгән, $\overline{BA}$ белән $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ векторларының һәркайсы капма-каршы юнәлгән. **4.** $(2; 4)$, $(-1; 2)$ һәм $(c_1; c_2)$. **5.** $m = \pm 12$, $n = \pm 7$. **8.** 1) $\overline{c}(-3; 4)$, $|\overline{c}| = 5$; 2) $\overline{c}(6; 8)$, $|\overline{c}| = 10$. **10.** 1) $\overline{c}(5; -12)$, $|\overline{c}| = 13$; 2) $\overline{c}(-6{,}8)$, $|\overline{c}| = 10$. **12.** $\overline{AB} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{CD} = \overline{b} - \overline{a}$. **14.** 2) Күрсәтмә. $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{b}$ булганда $\triangle ABC$ төзегез. Ул вакытта $\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$. **15.** $\frac{p}{\sqrt{3}}$.
19. $\overline{c}(-6; -8)$, $|\overline{c}| = 10$. **20.** 1) $\pm \frac{1}{2}$; 2) ± 1; 3) $\pm \frac{5}{13}$. **23.** $\overline{AB} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b})$, $\overline{CD} = -\frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b})$, $\overline{CB} = \frac{1}{2}(\overline{b} - \overline{a})$, $\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{a} - \overline{b})$. **25.** $\overline{a}$ һәм $\overline{c}$, $\overline{b}$ һәм $\overline{d}$. $\overline{a}$ һәм $\overline{c}$ векторлары бердәй юнәлгәннәр, ә $\overline{b}$ һәм $\overline{d}$ капма-каршы юнәлгәннәр. **26.** $m = 2$. **27.** $\lambda = -1$, $\mu = 0$. **28.** Күрсәтмә. 10.3 теоремасыннан файдаланыгыз. **29.** $90°$. **30.** $\sqrt{3}$. Күрсәтмә. $|\overline{a} + \overline{b}|^2 = (\overline{a} + \overline{b})^2$. **31.** $30°$. **32.** $\cos A = 0{,}6$, $\cos B = 0$, $\cos C = 0{,}8$. **33.** $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$. **35.** $m = -\frac{8}{3}$. **36.** $\lambda = -1$.
39. $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$, $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$.
40. Күрсәтмә. 38 нче мәсьәләдән файдаланыгыз. **45.** Берәмлек векторлар $\overline{a}$, $\overline{c}$ һәм $\overline{d}$, $\overline{a}$ һәм $\overline{d}$ векторлары коллинеар. **46.** $\overline{e}(0{,}6; 0{,}8)$. **47.** 2, -3. **48.** 1) $\overline{OX} = \frac{\mu\overline{a} + \lambda\overline{b}}{\mu + \lambda}$.

§ 11.

5. Өчпочмак. **6.** $\angle A = 30°$, $A_1B_1 = 1{,}5$ м. **8.** Күрсәтмә. Башта почмакның якларына орынучы нинди дә булса әйләнә төзегез һәм почмакның түбәсенә карата гомотетиядән файдаланыгыз. **9.** Күрсәтмә. Өчпочмакның бер түбәсенә карата гомотетиядән файдаланыгыз. **11.** 13,6 см. **12.** $AC = 4$ м, $B_1C_1 = 14$ м. **13.** $AC = 24$ см, $A_1C_1 = 18$ см, $B_1C_1 = 15$ см. **16.** $\frac{ah}{a + h}$. **17.** $\frac{m}{n}$. **18.** 4 см. **19.** $\frac{27}{26}$. **20.** 1) 14 см; 2) 6 дм. **22.** $m : n$. **23.** $n : m$. **24.** $AC = 18$ м. Күрсәтмә. ACD һәм CBA өчпочмаклары охшашлар. **25.** $m : n$. **26.** 15 см, 18 см. **27.** 4,5 см. **29.** $\frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}$. **30.** $A_1C_1 = 1{,}2$ м, $AC = 3$ м. **32.** $\angle D = 180° - 2\angle A$, $\angle E = 180° - 2\angle B$, $\angle F = 180° - 2\angle C$. **34.** Охшашлар. **35.** 1) Әйе; 2) әйе; 3) юк. **37.** 1 м, 2 м, 2,5 м. **38.** 6,5 м, 5,5 м. **39.** Охшашлар; 2) охшаш түгелләр. **40.** 15 см, 20 см; 25 см. **41.** 21 см. **43.** $m^2 : n^2$. **44.** ≈ 42 м. **45.** $\frac{bc}{b + c}$. **46.** Күрсәтмә. B ноктасы аша DC турысына параллель туры үткәрегез. **47.** Күрсәтмә.

Алдагы мәсьәләдән файдаланыгыз. **48.** 10 см. **49.** 5 см. **50.** 30° яки 150°. **52.** Күрсәтмә. 51 нче мәсьәләне кара. **54.** α яки $180°-\alpha$. **55.** 50°. **56.** Күрсәтмә. Башта камаулы дүртпочмакның капма-каршы түбәләре калган ике капма-каршы түбәсе аша үткәрелгән турының төрле ягында ятканын исбатлагыз. **60.** Күрсәтмә. Алдагы ике мәсьәләдән файдаланыгыз. **63.** $\approx 225{,}8$ км. Күрсәтмә. 62 нче мәсьәләне кара. **64.** $\approx 82{,}7$ км.

§ 12.

1. $\frac{5}{7}$, $\frac{19}{35}$, $\frac{1}{5}$. **2.** $\sqrt{13}$ яки $\sqrt{109}$ м. **4.** $\frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2\pm 2cd\cos\alpha}$. **5.** $\sqrt{a^2+b^2\pm 2ab\cos\alpha}$. **6.** 2,25 м, 3,75 м. **8.** $\frac{12\sqrt{6}}{5}$ м, $2\sqrt{6}$ м, $\frac{12\sqrt{6}}{7}$ м. **9.** $\frac{\sqrt{145}}{2}$ м, $2\sqrt{7}$ м, $\frac{\sqrt{73}}{2}$ м. **10.** $\frac{12\sqrt{42}}{13}$ м, $\frac{\sqrt{105}}{2}$ м, $\frac{12\sqrt{15}}{11}$ м. **11.** AB ягы арта. **12.** Мөмкин түгел. **14.** $\frac{35}{2\sqrt{6}}$ м. **15.** $AB=\frac{AC\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **16.** $x=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **18.** AB ягы иң зуры, BC ягы иң кечкенәсе. **19.** B почмагы иң зуры, C почмагы иң кечкенәсе. **20.** Ян ягы зуррак. **24.** Күрсәтмә. CD медианасын D ноктасыннан башлап үзе озынлыгында дәвам итегез. **25.** Күрсәтмә. Бер ноктадан турыга үткәрелгән перпендикуляр һәм авышмалар үзлегеннән һәм алдагы мәсьәләнең раславыннан файдаланыгыз.

26. 1)	$\alpha=105°$,	$b\approx 2{,}59$,	$c\approx 3{,}66$;
2)	$\gamma=45°$,	$b\approx 17{,}9$,	$c\approx 14{,}6$;
3)	$\alpha=20°$,	$b\approx 65{,}8$,	$c\approx 88{,}6$;
4)	$\gamma=119°$,	$a\approx 16{,}7$,	$c\approx 24{,}8$;
5)	$\gamma=68°$,	$a\approx 13{,}6$,	$b\approx 11{,}2$.
27. 1)	$\alpha\approx 79°$,	$\beta\approx 41°$,	$c\approx 10{,}6$;
2)	$\alpha\approx 11°$,	$\beta\approx 39°$,	$c\approx 28$;
3)	$\beta\approx 27°$,	$\gamma\approx 58°$,	$a\approx 19{,}9$;
4)	$\beta\approx 21°$,	$\gamma\approx 15°$,	$a\approx 22{,}9$;
5)	$\alpha\approx 16°$,	$\gamma\approx 12°$,	$b\approx 53{,}4$;
6)	$\alpha\approx 130°$,	$\gamma\approx 35°$,	$b\approx 8{,}09$.
28. 1)	$c\approx 8{,}69$,	$\beta\approx 21°$,	$\gamma\approx 39°$;
2)	$c\approx 19{,}6$,	$\beta\approx 13°$,	$\gamma\approx 29°$;
3)	$c\approx 22{,}3$,	$\beta\approx 6°$,	$\gamma\approx 10°$;
4)	чишелеше юк;		
5)	$c\approx 11{,}4$,	$\alpha\approx 42°$,	$\gamma\approx 108°$;
яки	$c\approx 2{,}49$,	$\beta\approx 138°$,	$\gamma\approx 12°$.
29. 1)	$\alpha\approx 29°$,	$\beta\approx 47°$,	$\gamma\approx 104°$;
2)	$\alpha\approx 54°$,	$\beta\approx 13°$,	$\gamma\approx 113°$;
3)	$\alpha\approx 34°$,	$\beta\approx 44°$,	$\gamma\approx 102°$;
4)	$\alpha\approx 39°$,	$\beta\approx 93°$,	$\gamma\approx 48°$;
5)	$\alpha\approx 15°$,	$\beta\approx 11°$,	$\gamma\approx 154°$;
6)	$\alpha\approx 136°$,	$\beta\approx 15°$,	$\gamma\approx 29°$.

§ 13.

2. R_1+R_2+d. R_1-R_2-d. **6.** Мөмкин түгел. **8.** $\frac{1}{2}n(n-1)$. **10.** 36°, 72°, 108°, 144°. **12.** 1) 8; 2) 12. **13.** 1) 10 ягы; 2) 15 ягы. **14.** Күрсәтмә. Бу n-почмакның барлык яклары тигез, барлык почмаклары тигез. **15.** Күрсәтмә. Бу n-почмакның барлык яклары тигез, барлык почмаклары тигез. **18.** Күрсәт-

м ә. Ике радиусны да өчпочмакның яклары аша күрсәтегез. **19.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **Күрсәтмә.** Башта әйләнәнең радиусын табыгыз. **20.** $2\sqrt{6}$ дм. **21.** $2\sqrt{2}$ см. **22.** $\sqrt{3}$ см. **24. Күрсәтмә.** Косинуслар теоремасыннан файдаланыгыз. **25. Күрсәтмә.** Башта § 11 дәге 29 нчы мәсьәлә ярдәмендә 10-почмакның ягын табыгыз, аннары косинуслар теоремасы буенча 5-почмакның ягын табыгыз. $a_{10}=\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$, $a_5=R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. **26.** $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$. **27.** $\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$. **28.** $b=\frac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}}$. **29.** $a=\frac{2bR}{\sqrt{4R^2+b^2}}$. **30. Күрсәтмә.** Башта камаулы төзек алтыпочмак төзегез. **32.** $\frac{R_1r_2}{r_1}$. **33.** $a:b$. **34.** 1) 62,8 м; 2) 94,2 м. **35.** 6,28 мм. **36.** $\approx 3{,}06$. **Күрсәтмә.** 23 нче мәсьәләнең нәтиҗәсеннән файдаланыгыз. **37.** $\approx 3{,}11$. **Күрсәтмә.** 24 нче мәсьәләнең нәтиҗәсеннән файдаланыгыз. **38.** $\approx 6366{,}2$ км. **39.** $\approx 6{,}3$ см. **40.** 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$; 2) $\frac{R}{1+\sqrt{2}}$; 3) $\frac{R}{3}$. **Күрсәтмә.** Түгәрәкләрнең үзәкләре төзек n-почмакның түбәләре була. **41.** 1) $R(3+2\sqrt{3})$; 2) $R(1+\sqrt{2})$; 3) R. **Күрсәтмә.** Түгәрәкләрнең үзәкләре төзек n-почмакның түбәләре була. **42.** $\approx 351{,}9$ м/мин. **43.** 1) 300° һәм 60°; 2) 230° һәм 130°; 3) 190° һәм 170°. **44.** 1) 120°; 2) 90°; 3) 72°; 4) 60°; 5) 240°; 6) 270°. **45.** $\approx 31''$. **46.** 1) $\approx 0{,}79$ м; 2) $\approx 0{,}52$ м; 3) $\approx 2{,}09$ м; 4) $\approx 0{,}80$ м; 5) $\approx 1{,}06$ м; 6) $\approx 2{,}63$ м. **47.** 1) $\frac{\pi a}{3}$; 2) $\frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}$. **Күрсәтмә.** Хордасы һәм тиңдәшле үзәк почмагы буенча әйләнәнең радиусын табыгыз. **48.** 1) $\frac{3l}{\pi}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}l}{\pi}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}l}{2\pi}$. **Күрсәтмә.** Башта әйләнәнең радиусын табыгыз. **49.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$.

§ 14.

1. Күрсәтмә. Пифагор теоремасын кулланыгыз. **2.** ≈ 180 м. **3.** $S=\frac{a^2}{2}$. **4.** Ике тапкыр. **5.** Мәйдан 9 тапкыр зураер. **6.** 5 тапкыр. **7.** 8 м, 18 м. **8.** 12 дм, 25 дм. **9.** 30°. **10.** Квадрат. **11.** 200 см². **12.** 202,8 см². **14.** $\sqrt{15}$ см. **17.** 4800 м². **18.** $\frac{a^2}{4}$. **19.** 6 см. **21.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **22.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **23.** 600 см². **24.** 55 см, 48 см. **25.** $\angle C=90°$. **26.** $\approx 0{,}47$ м². **27.** 5,64 м². **28.** $\frac{a^2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **30.** 1) 84; 2) 12; 3) 288; 4) 10; 5) $\frac{2520}{13}$; 6) 1,4. **31.** $\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **32.** 1) 24 см; 2) 24 см. **33.** 13,44 см. **34.** 12 см; 11,2 см; $\frac{168}{13}$ см. **35.** 1,344. **36.** 1) 4; 2) 7,2; 3) 4,8; 4) $\frac{5040}{169}$. **37.** 480 см². **38.** 408 см². **39.** 540 м². **43.** 1) $R=\frac{65}{8}$, $r=4$; 2) $R=\frac{65}{8}$, $r=1{,}5$; 3) $R=\frac{145}{6}$, $r=\frac{7}{3}$; 4) $R=\frac{35}{4\sqrt{6}}$, $r=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **44.** 4,5 см. **45.** $R=\frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$, $r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$. **46.** $R=\frac{169}{24}$ см, $r=\frac{10}{3}$ см. **47. Күрсәтмә.** Әйләнәгә бер ноктадан үткәрелгән орынмалар үзлегеннән файдаланыгыз.

48. $R=29$ см, $r=12$ см. **50.** 1 : 4. **51.** $\frac{h}{\sqrt{2}}$. **52.** $a^2:b^2$. **53.** $\frac{l^2}{4\pi}$. **54.** 1) 20π см^2; 2) 12π м^2; 3) $\pi(a^2-b^2)$. **55.** 1) 4 тапкыр; 2) 25 тапкыр; 3) m^2 тапкыр. **56.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; 3) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **57.** $\frac{1}{4}$. **58.** 2. **59.** 1) $\frac{\pi R^2}{9}$; 2) $\frac{\pi R^2}{4}$; 3) $\frac{5\pi R^2}{12}$; 4) $\frac{2\pi R^2}{3}$; 5) $\frac{5\pi R^2}{6}$; 6) $\frac{11\pi R^2}{12}$. **60.** 1) $\frac{R^2}{2}$; 2) $\frac{Rl}{2}$; **61.** $a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

62. 1) $(\pi-2)R^2$; 2) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)R^2$; 3) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

§ 15.

2. Мөмкин. **8.** К ү р с ә т м ә. Ноктаны икенче яссылыкта алыгыз да шул нокта һәм бирелгән туры аша яссылык үткәрегез. Бу яссылыкка карата параллельләр аксиомасын кулланыгыз. **12.** Дүрт яссылык. **14.** К ү р с ә т м ә. Каршы килеп исбатлаудан файдаланыгыз.

§ 16.

2. Булмый. **5.** 1) 6 м; 2) 4,2 дм; 3) 6,2 см; 4) $\frac{a+b}{2}$. **6.** 1) 1 м; 2) 0,6 дм; 3) 2,1 см; 4) $\frac{|a-b|}{2}$. **7.** 1) 37,5 см; 2) 9,9 см; 3) 15 см; 4) $c\left(1+\frac{b}{a}\right)$. **8.** 1) 7 м; 2) 2 м; 3) $a+c-b$. **9.** Булмый. **13.** 1) 5 см; 2) 3 см; 3) 8 см; 4) $\frac{bc}{a+c}$. **19.** К ү р с ә т м ә. 16 нчы мәсьәләне кара. **20.** Һәрвакытта да мөмкин түгел. К ү р с ә т м ә. 16 нчы мәсьәләне кара. **26.** Нокта турылар белән бер яссылыкта ятса, чишелешләре юк. **32.** $A_1B_1=a$. **35.** К ү р с ә т м ә. Ирекле рәвештә алынган $X_1X_2X_3$ һәм $Y_1Y_2Y_3$ турыларының кисемтәләре чагыштырмаларын чагыштырыгыз. **38.** Урта сызык. **39.** Мөмкин түгел. **40.** Мөмкин. **41.** К ү р с ә т м ә. Кисемтәләрнең чагыштырмасы саклана. **42.** К ү р с ә т м ә. Перпендикуляр диаметрның проекциясе бирелгән диаметрның проекциясенә параллель хордаларның урталары аша үтә.

§ 17.

2. К ү р с ә т м ә. 1 нче мәсьәләне кара. **3.** 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{a^2-b^2+d^2}$; 4) $\sqrt{a^2-c^2+2d^2}$. **7.** 2 м. **8.** $BD=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $CD=\sqrt{a^2+c^2}$. **14.** 2,6 м. **15.** $\approx 3{,}9$ м. **16.** 9 м. **17.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **19.** 1 м. **20.** 6,5 м. **21.** $\sqrt{a^2-\frac{b^2}{2}}$. **22.** Әйләнә. **23.** 6 см, 15 см. **24.** 1) 15 см, 41 см; 2) 4 см, 8 см. **25.** 9 см. **27.** 6 м. **28.** 5 м, 3 м. **29.** $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. **31.** $\sqrt{b^2-a^2}$. **32.** $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$. **33.** 0,36 м яки 0,44 м. **36.** 1) 4,25 см; 2) 6,75 см; 3) $\frac{a+b}{2}$. **37.** 1) 1,05 см; 2) 0,65 см; 3) $\frac{|a-b|}{2}$. **38.** 0,6 м. **39.** $\frac{am}{m+n}$ (m яссылык үткәрелгән нигезгә туры килә). **40.** $\frac{a}{2}$. **41.** Перпендикулярның озынлыгы $\sqrt{2a^2-b^2}$, ягының озынлыгы $\sqrt{b^2-a^2}$. **42.** $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, $\sqrt{c^2-a^2}$, $\sqrt{c^2-b^2}$. **43.** $\sqrt{2}$ м. **44.** $2\sqrt{2}$ м. **46.** 2,5 м. **47.** 6 м. **48.** 14 см. **49.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **50.** $\sqrt{a^2-\frac{d^2}{8}}$. **51.** $\sqrt{2b^2-a^2}$. **52.** 2,5 м.

53. $\sqrt{b^2+c^2-\frac{b^4}{a^2}}$. **55.** Күрсәтмә. Яссылыкка перпендикуляр турылар параллельләр. **56.** $\sqrt{23}$ м. **57.** 4 м. **59.** 1) 11 м; 2) 13 м; 3) 8 м; 4) 7 м; 5) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 6) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. **60.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **61.** 1,3 м. **62.** 1,7 м.

§ 18.

1. z күчәрендә. **3.** (1; 0; 0), (0; 2; 0), (0; 0; 3); (1; 2; 0), (1; 0; 3), (0; 2; 3). **4.** xy яссылыгыннан ераклык 3 кә, xz яссылыгыннан 2 гә, yz яссылыгыннан 1 гә тигез; x, y, z күчәрләреннән ераклыклар тиңдәшле рәвештә $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$ кә тигез; координаталар башлангычыннан ераклык $\sqrt{14}$ кә тигез. **6.** (2; 2; 2) һәм (−2; −2; −2). **7.** $C(0;\ 0;\ 0)$. **8.** $x+2y+3z=7$. **12.** $B(0;\ -1;\ 3)$. **13.** 1) $D(6;\ 2;\ -2)$; 2) $D(0;\ -2;\ 2)$; 3) $D(-1;\ 7;\ -2)$. **18.** (−1; −2; −3); (0; 1; −2); (−1; 0; 3). **20.** Күрсәтмә. 16 нчы мәсьәләне кара. **24.** (−1; −2; 1). **25.** 1), 2), 4) юк; 3) бар. **30.** 90°. **31.** $\alpha+\beta$ яки $|\alpha-\beta|$. **32.** 40° яки 20°. **36.** 1) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **37.** 30°. **38.** $\sqrt{6}$. **39.** $a\sqrt{2}$. **40.** $3a$. **41.** 30°. **44.** 30°. **45.** 13 м; $\sqrt{409}$ м. **46.** 1) $\cos\alpha=\frac{1}{14}$; 2) $\cos\alpha=\frac{2}{21}$. **47.** 3,36 м. **48.** 1) $\frac{3a^2}{8}$; 2) $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$; 3) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **49.** 1) $\frac{30}{7}$ м² яки 48 м²; 2) 2,5 м² яки $\frac{128}{7}$ м². **51.** $D(-2;\ 3;\ 0)$. **52.** $D(2;\ 1;\ -2)$. **53.** $n=\frac{4}{3}$, $n=\frac{3}{2}$. **55.** 1) $n=\frac{1}{3}$, 2) $n=-1$, 3) $n=2$, 4) $n=4$. **56.** $c=1$. **57.** $\sqrt{|\vec a|^2+|\vec b|^2+|\vec c|^2+|\vec a|\,|\vec b|}$. **58.** 1) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\varphi=90°$. **60.** $\cos C=\sqrt{\frac{2}{15}}$. **62.** $\cos\varphi=\cos\alpha\cos\beta$. **63.** 60°. **64.** $\cos\varphi=\frac{\cos\beta-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

§ 19.

1. 2) 60°. **4.** $\cos\varphi=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\cos\beta=\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}$. **6.** $n(n-3)$. **9.** Күрсәтмә. Теорема 17.3 тән файдаланыгыз. **10.** 144 см². **11.** 7,5 см. **12.** 12 см. **13.** $a\sqrt{5}$, $2a$, $2a^2$, $a^2\sqrt{3}$. **14.** $3a^2$. **15.** $\cos x=\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **16.** $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. **17.** 22 см. **18.** $Q\sqrt{2}$. **19.** 12. **20.** 2 м. **21.** 4 м. **23.** 45 см². **24.** 1) $3ab+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $4ab+2a^2$; 3) $6ab+3a^2\sqrt{3}$. **25.** $3l^2\sqrt{3}$. **26.** 12 м². **29.** 188 м². **30.** ≈262 см². **31.** 10 см². **32.** $2a$, $a\sqrt{2}$. **33.** 13 м, 9 м. **34.** 2 м², 3 м². **35.** 1) 3; 2) 7; 3) 11. **36.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **37.** 2 м². **38.** 1464 см². **39.** $2\sqrt{M^2+2Qh^2}$. **40.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$. **41.**

3 см. **42.** 12 см. **43.** $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\alpha_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **44.** $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2}$. **45.** $2\sqrt{3}$ см. **46.** 5 см, 6 см. **47.** 26 $м^2$. **48.** 540 $см^2$. **49.** 10 $м^2$. **53.** $\frac{35}{6}$ см, $\frac{20}{3}$ см, $\frac{15}{2}$ см. **55.** 11 м. **56.** $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$. **57.** 9 см. **58.** $\cos x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **59.** 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2-a^2}$. **60.** 1) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$; 2) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$; 3) $\sqrt{h^2+\frac{3a^2}{4}}$. **61.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{4}\times$ $\times(a^2+\sqrt{a^2+12h^2}$; 2) $a(a+\sqrt{a^2+4h^2})$; 3) $\frac{3a}{2}(a\sqrt{3}+\sqrt{3a^2+4h^2})$. **62.** $2r(r\sqrt{3}+$ $+\sqrt{3a^2-r^2})$. **63.** 1,8 м, 4 м. **64.** $3a^2$. **65.** $\frac{Q}{\cos\varphi}$. **66.** $\cos\varphi=\frac{Q}{S}$. **67.** 16 см һәм 6 см яки 12 см һәм 8 см. **68.** $\sqrt{2}$ см. **70.** 9 см. **71.** 1 дм. **72.** 6 см. **73.** 2 см. **74.** $\frac{a^2-b^2}{2}$. **75.** $20\sqrt{2}$. **76.** 24 $м^2$, 30°. **77.** 168 $м^2$. **78.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+(a+b)\times$ $\times\sqrt{12h^2+(a-b)^2}$; 2) $a^2+b^2+(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$; 3) $\frac{2}{3}(\sqrt{3}(a^2+b^2)+$ $+(a+b)\sqrt{4h^2+3(a-b)^2})$. **82.** 109°28′. Күрсәтмә. Башта октаэдрның һәр түбәсендә ике пар перпендикуляр кабыргаларның очрашуын исбатларга кирәк. Аннары 4 нче мәсьәләнең формуласын кулланыгыз.

§ 20.

1. 5 м. **3.** 36 $см^2$. **4.** 3 дм. **5.** 3 дм. **6.** $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$. **8.** 10 м. **9.** 5 м. **10.** $\frac{l}{2}$. **11.** R^2. **12.** $2R^2\sin\alpha$. **13.** 500. **14.** Әгәр $\alpha+\varphi<90°$ булса, $\frac{R^2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi}$. **16.** $\frac{H}{\sqrt{2}}$. **17.** $\frac{3l}{4}$. **18.** 3 см. **19.** 5 м. **20.** $R-r$. **21.** a, $2a$. **22.** 30 $дм^2$. **23.** 9 $дм^2$. **24.** $\frac{1}{4}(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2$. **26.** $\frac{HR\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$. **27.** $\frac{HR\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$. **29.** 16π $м^2$. **31.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **32.** πR. **33.** ≈785 км. **34.** 12 см. **35.** 12 см. **36.** 5 см. **37.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **40.** 3 см. **41.** 8 см. **42.** $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. **43.** $R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $\frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{2R}{\sin\alpha}$. **45.** 4π м. **46.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **49.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

50. $R=\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$, $r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$. **51.** $2R\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

52. 1) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $2\sqrt{R^2-a^2}$. **53.** $\frac{a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$. **54.** $R=$ $=\frac{a}{2\sin 2\alpha\cdot\sin\frac{180°}{n}}$

§ 21.

1. 6 см. 2. $\approx 8{,}4$ г/см^3. 4. 25 см. 5. 1,8 г/см^3. 6. $\approx 2{,}29$ м. 7. 30 м. 8. Ике тапкыр. 9. $\approx 192{,}72$ кг. 12. 60 см^3. 13. 3 м^3. 14. $\sqrt{\frac{MNQ}{2}}$. 15. $\sqrt{2}$ м^3. 16. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. 17. $2\sqrt{\sin 3\alpha \sin^3 \alpha}$. 18. $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. 19. 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$; 2) a^2b; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b$. 20. 0,5 г/см^3. 21. 3 см^3. 22. $\frac{a^3}{8}$. 23. 6 м^3. 25. 3060 м^3. 26. 6048 м^3/сәг. 27. 35200 м^3. 28. 48 см^3. 29. 12 см^3. 30. 2 см. 31. $\frac{1}{8}ac\sqrt{12a^2-3c^2}$. 32. $\frac{h^3 \sin \gamma}{2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$. 33. 1) $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$; 2) $\frac{a^2}{6}\sqrt{4b^2-2a^2}$; 3) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2-a^2)}$. 34. $\frac{3a^3}{4}$. Күрсәтмә. Пирамиданың биеклеге нигезенә камалган әйләнәнең радиусына тигез. 35. $\frac{1}{6}b^3$. 36. $\frac{a^3}{12\sqrt{2}}$. 37. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. 38. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$. Күрсәтмә. Октаэдрны ике төзек пирамидага бүлегез. 39. 360 м^3. 40. 48 см^3. Күрсәтмә. Пирамида биеклегенең нигезе пирамиданың нигезен камаучы әйләнәнең үзәге белән тәңгәл килә. 41. $\sqrt{11}$ см^3. 42. $\frac{4}{3}l^3 \cos\alpha \cos\beta \sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}$. 43. $\frac{2}{3}R^3 \sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha + \beta) \operatorname{tg}\gamma$. 45. $\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - Q_2}$. 46. $\frac{1}{6}(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha$. Күрсәтмә. 44 нче мәсьәләдәге формуладан файдаланыгыз. 47. $\frac{1}{24}(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha$. 49. $\frac{h}{\sqrt{2}}$.

§ 22.

1. $\approx 0{,}75$ мм. 22. ≈ 4500 л. 3. n тапкыр; $\sqrt{n}$ тапкыр. 4. 4 : 1. 5. $\frac{3}{4}\pi a^3$. 6. ≈ 61 кг. 7. $\approx 6{,}3$ м^3. 8. 9π м^3. Күрсәтмә. Конусның биеклеге аның нигез радиусына тигез. 9. $\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2}$. 10. $\frac{1}{3}\pi l^3 \sin\alpha \cos^2\alpha$. 11. $\approx 1{,}6$ т. 12. $\approx 0{,}35$ м. 13. $\frac{\pi a^3}{4}$. 14. $\frac{\pi a^2 b^2}{a\sqrt{a^2 + b^2}}$. 16. $\approx 2\%$. 17. $\frac{\pi}{3}|R^3 - r^3|$. 18. $\frac{\pi^2}{3}|R^3 - r^3|$. 19. 14 см. 20. $r < R$ булса, $1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3$. 21. ≈ 14 см. 22. ≈ 39 см. 23. 167. 24. $33\frac{1}{3}\%$. Күрсәтмә. Шарның диаметры цилиндр диаметрына тигез. 25. ≈ 2148 см^3. 26. $\frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R$. 27. 45π см^3, 243π см^3. 28. 0,028. 29. 5 : 16. 30. 3528π см^3. Күрсәтмә. Шарның күрсәтелгән кисәген цилиндрга һәм ике сегментка бүлегез. 31. $112{,}5\pi$ дм^3 яки 450π дм^3. 32. $\frac{1}{3}\pi R^3(2 - \sqrt{3})$. Күрсәтмә. Җисем шар секторы була. 33. $\sqrt{m^3} : \sqrt{n^3}$. 34. Зур өслек калган икесенең суммасына тигез зурлыкта. 35. Күрсәтмә. Ике өслекне дә квадратның ягы аша күрсәтегез. 36. 180π см^2. 37. 512π см^2. 38. $\approx 40{,}4$ м^2. 39. ≈ 116 м^2. 40. 75 см. 41. $\pi m + 2Q$. Күрсәтмә. Нигез мәйданы аша аның радиусын табыгыз. 42. $\approx 25{,}3$ м^2. 43. $\approx 33{,}98$ м^2. 44. $\frac{S}{\cos\alpha}$. Күрсәтмә. Нигез мәйданы аша аның радиусын табыгыз. 45. 2:3. 46. Шар һәм конусның өслеген конусның төзүчесе аша күрсәтегез. 47. 30°. 48. 1 м. Күрсәтмә. Нигез әйләнәсенең озынлыгы сектор дугасының озынлыгына тигез. 49. $\approx 1{,}04$ м^2. 50. $\approx 4{,}3$ кг.

АТАМАЛАР КҮРСӘТКЕЧЕ

А

Абсцисса 122
Авыш параллелепипед күләме 357
Авыш призма 312
Авышма 106, 266
Авышманың проекциясе 106, 266
Аксиома 18

Б

Берәмлек вектор 169
Билгеләмә 18
Бирелгән почмакка тигез почмак төзү 72
Бирелгән яклары буенча өчпочмак төзү 71
Бору 146

В

Вектор 156
Векторлар аермасы 161
— арасындагы почмак 167
— суммасы 160
Векторларның перпендикулярлык шарты 168
— скаляр тапкырчыгышы 166
— тигезлеге 157
Векторны санга тапкырлау 163
Векторның абсолют зурлыгы һәм юнәлеше 157
— координаталары 159
— күчәргә проекциясе 163
Вертикаль почмаклар 26
— почмакларның үзлеге 26

Г

Геометрия 3
Герон формуласы 225
Гипотенуза 58
Гомотетия 176
— үзәге 175

Д

Дүртпочмак 82
Дүртпочмакның диагонале 82

З

Зур түгәрәк (әйләнә) 340

И

Ике әйләнәнең орышуы 69
Икекырлы почмак 305
— почмакның сызыкча почмагы 305
Исбатлау 17

К

Кабарынкы күппочмакның почмагы 207
— — тышкы почмагы 207
Каршы куеп исбат итү 29
Катет 58
Квадрат 89
Кире теорема 38
Кисек пирамиданың апофемасы 321
Кисемтә 6
Кисемтә уртасының координаталары 124
Кисемтәләрнең тигезлеге 14
Кисемтәне урталай бүлү 73
Кисемтәнең очлары 6
Коллинеар векторлар 165
Коллинеар векторларның үзлеге 165
Конус 336
— ,кисек 338
— ,туры 336
Конуска камаулы пирамида 338
Конуска орынма яссылык 339
Конусны камаучы пирамида 339
Конусның биеклеге 336
— күләме 370
— күчәр кисеме 337
— ян өслеге 336, 375
Координата күчәрләре 121, 279
Косинуслар теоремасы 194
Куб 322
Кысынкы почмак 26
Күпкырлы почмак 307
Күпкырлык 308
—, кабарынкы 308
—, төзек 322
Күпкырлыклар, камаулы 345
—, камаучы 345
Күпкырлыкның кыры 308
Күләм 354

Күппочмак 206
—, кабарынкы 207
—, төзек 208
—, яссы 207
—, әйләнәгә камаулы 208
—, әйләнәне камаучы 208
Күппочмакның диагонале 206
— ортогональ проекциясенең мәйданы 294

М

Масштаб 176
Мәйдан 221

Н

Нокта 4
Нокта нокталар арасында ята 7
Ноктага карата симметрик нокталар 142
Ноктага карата симметрия 143
Ноктадан турыга кадәр ераклык 60
Ноктадан яссылыкка кадәр ераклык 266
Нокталар арасындагы ераклык 7, 107, 125
Нокталарның геометрик урыны 75
Нуль вектор 157
Нур (ярымтуры) 9
Нур почмак яклары арасыннан үтә 11

О

Ордината 122
Орта 169
Орыну ноктасы 69, 342
Охшаш фигуралар 177
Охшаш фигураларның мәйданнары 229
Охшаш үзгәртү 175, 289
Охшаш үзгәртү үзлекләре 177
Охшаш җисемнәрнең күләмнәре 363

П

Параллелепипед 314
Параллелепипедның симметрия үзәге 315
Параллелограмм 83
Параллелограмм диагональләренең үзлеге 84
— кагыйдәсе 161
— мәйданы 223
Параллелограммның биеклеге 224
Параллель күчерү 147
Параллель күчерү үзлекләре 147, 148, 288
Параллель проектирлау үзлекләре 253
Параллель турылар 16
Параллель турылар аксиомасы 16
Параллель турыларны кисүче туры янындагы почмаклар үзлеге 54
Параллель турылар арасындагы ераклык 60
Параллель яссылыклар арасындагы ераклык 267
Перпендикуляр туры төзү 74
Перпендикуляр турылар 27
Перпендикуляр һәм авышмаларның үзлекләре 106, 107
Перпендикулярның барлыгы һәм бердәнберлеге 59
Перпендикулярның нигезе 29, 266
Пирамида 317
—, кисек 320
—, төзек 321
Пирамиданың апофемасы 321
— биеклеге 318
— диагональ кисеме 318
— күләме 362
— ян өслеге 321
Пифагор теоремасы 104
Планиметрия 4
Почмак 10
Почмакларның тигезлеге 14
Почмакның биссектрисасы 29
— биссектрисасын төзү 73
— косинусы 103
— синусы 109
— тангенсы 109
Призма 309
—, туры 312
—, төзек 312
Призманың биеклеге 309
— диагонале 309
Призманың диагональ кисеме 310
— күләме 359
— ян өслеге 309, 312
Пространствода Декарт координаталары 279

Р

Радиан 215
Ромб 88
— диагональләренең үзлеге 88

С

Симметрия күчәре 144
— үзәге 143
Синуслар теоремасы 196
Стереометрия 237
Стереометрия аксиомалары 237
Сфера 340
— мәйданы 376
Сынык сызык 204
—, гади 204

—, йомык 206
Сынык сызыкның озынлыгы үзлеге 205

Т

Теорема 17
Теореманың шарты һәм нәтиҗәсе 18
Тэтраэдр 318
Тигез зурлыктагы җисемнәр 360
Тигезьянлы трапеция 92
Тигезьяклы өчпочмак 37
Тигезьянлы өчпочмак 37
Тигезьянлы өчпочмакның медианасы үзлеге 41
Тиңдәшле почмаклар 53
Трапеция 92
— мәйданы 226
Трапециянең биеклеге 226
— урта сызыгы 93
— урта сызыгы үзлеге 93
Туры 4
Туры почмак 25
Туры тигезләмәсе 127
Туры белән яссылык арасындагы почмак 292
Туры белән яссылыкның параллельлеге 248
Туры белән әйләнәнең кисешүе 132
Туры конусның күчәре 336
Туры һәм яссылыкның параллельлек билгесе 248
Туры һәм яссылыкның перпендикулярлыгы 261
Туры һәм яссылыкның перпендикулярлык билгесе 261
Турыга карата симметрик нокталар 144
Турыга карата симметрия 144
Турыга перпендикуляр 28, 29
Турылар арасындагы почмак 290
Турыларның параллельлек билгесе 50, 52, 247
Турының почмакча коэффициенты 131
Турының яссылыкка проекциясе 292
Турыпочмаклы параллелепипед 316
Турыпочмаклы параллелепипедның күләме 355
Турыпочмаклы өчпочмак 58
Турыпочмаклы өчпочмакларның тигезлек билгеләре 58, 59
Турыпочмаклы өчпочмакта урта пропорциональ кисемтәләр 183
Турыпочмаклык 86
Турыпочмаклыкның диагональләренең үзлеге 86
Турыпочмаклыкның мәйданы 223
Түгәрәк 230
— мәйданы 230
— радиусы 230
— сегменты 232
— сегментының мәйданы 232
Түгәрәк секторы 231
— секторының мәйданы 231
— үзәге 230

У

Урта перпендикулярның үзлеге 75

Ф

Фалес теоремасы 90
Фигураларны үзгәртүләр 139
Фигураларның тигезлеге 151

Х

Хәрәкәт 140, 284
Хәрәкәтнең үзлекләре 141, 142

Ц

Цилиндр 332
Цилиндрга камаулы призма 334
— орынма яссылык 335
Цилиндрны камаучы призма 335
Цилиндрның биеклеге 333
— күләме 369
— күчәре 333
— радиусы 333
— ян өслеге 332, 375

Ч

Чалышма турылар 246
— — арасындагы ераклык 270
— — — почмак 290
Чалышма турыларның уртак перпендикуляры 270
Чиктәш почмаклар 24

Ш

Шар 340
— диаметры 340
— радиусы 340
— сегменты 374
— секторы 374
— сегментының күләме 374
— секторының күләме 374
Шарга орынма туры 345
— орынма яссылык 342
Шарның диаметраль яссылыгы 341
— күләме 373

Э

Эчке аркылы ятучы почмаклар 51, 52
Эчке аркылы ятучы һәм эчке якташ почмак парларының үзлекләре 51
Эчке якташ почмаклар 51

Я

Ярымтуры 9
Яссы почмак 184
Яссылык 237
Яссылыкка карата симметрия 287
— перпендикуляр 266
Яссылыклар арасындагы почмак 293
Яссылыкларның параллельлеге 249
— параллельлек билгесе 249
— перпендикулярлыгы 268
— перпендикулярлык билгесе 268
Яссылыкта Декарт координаталары 121

Ә

Әйләнә 66, 75
— дугасы 125
— дугасының градуслы үлчәме 185
— озынлыгы 213
— тигезләмәсе 126
— хордасы 67
— үзәге 66
Әйләнәнең диаметры 67
— радиусы 67
Әйләнәгә камаулы почмак 185
— — почмакларның үзлекләре 185—187
— орынма туры 69
Әйләнү күчәре 333, 336, 340, 372
Әйләнү жисеме 372
— жисеменең күләм формуласы 372

Ө

Өстәмә нурлар 9
Өстәмә (яссы) почмаклар 184
Өч перпендикуляр турында теорема 267
Өчкырлы почмак 306
Өчпочмак 14
— кагыйдәсе 161
— мәйданы 224
— тигезсезлеге 107
Өчпочмакка камаулы әйләнә 70
Өчпочмаклар тигезлеге 14
Өчпочмакларның охшашлык билгеләре 178, 180, 181
— тигезлек билгеләре 33, 36, 41
Өчпочмакны камаучы әйләнә 67
Өчпочмакның биеклеге 40
— биссектрисасы 41
— медианасы 41
— почмагы 14
— тышкы почмагы 57
— — почмагының үзлекләре 57, 58
— урта сызыгы 91
— — — үзлеге 91

Ү

Үзәк почмак 184
Үзәк симметрияле фигура 143

Җ

Җисем 346
Җисемнең өслеге 347
Җәелгән почмак 11
Җәенке почмак 26

ЭЧТӘЛЕК

7 НЧЕ СЫЙНЫФ

ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. Иң гади геометрик фигураларның төп үзлекләре

1. Геометрик фигуралар 3. 2. Нокта һәм туры 4. 3. Кисемтә 6. 4. Кисемтәләрне үлчәү 7. 5. Ярымъяссылыклар 8. 6. Ярымтуры 9. 7. Почмак 10. 8. Кисемтәләр һәм почмаклар салу 12. 9. Өчпочмак 14. 10. Бирелгән өчпочмакка тигез өчпочмакның булуы 15. 11. Параллель турылар 16. 12. Теоремалар һәм исбатлаулар 17. 13. Аксиомалар 18. Контроль сораулар 19. Мәсьәләләр 20.

§ 2. Чиктәш һәм вертикаль почмаклар

14. Чиктәш почмаклар 24. 15. Вертикаль почмаклар 26. 16. Перпендикуляр турылар 27. 17. Каршы күеп исбат итү 29. 18. Почмакның биссектрисасы 29. 19. Геометриядән өлгерү өчен нәрсә эшләргә кирәк 30. Контроль сораулар 31. Мәсьәләләр 31.

§ 3. Өчпочмаклар тигезлегенең билгеләре

20. Өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесе 33. 21. Теоремалар исбатлаганда аксиомалар файдалану 35. 22. Өчпочмаклар тигезлегенең икенче билгесе 36. 23. Тигезьянлы өчпочмак 37. 24. Кире теорема 38. 25. Өчпочмакның биеклеге, биссектрисасы һәм медианасы 39. 26. Тигезьянлы өчпочмакның медианасы үзлеге 40. 27. Өчпочмаклар тигезлегенең өченче билгесе 41. 28. Дәреслек буенча үзлегеңнән ничек эзерләнергә 42. Контроль сораулар 44. Мәсьәләләр 45.

§ 4. Өчпочмакның почмаклары суммасы

29. Турыларның параллельлеге 50. 30. Ике турыны кисүче белән кистергәндә ясалган почмаклар 51. 31. Турыларның параллельлек билгесе 52. 32. Параллель турыларны кисүче белән кистергәндә ясалган почмакларның үзлеге 54. 33. Өчпочмакның почмаклары суммасы 56. 34. Өчпочмакның тышкы почмаклары 57. 35. Турыпочмаклы өчпочмак 58. 36. Турыга перпендикулярның булуы һәм аның бердәнберлеге 59. 37. Геометрия барлыкка килү тарихыннан 61. Контроль сораулар 62. Мәсьәләләр 63.

§ 5. Геометрик төзүләр

38. Әйләнә 66. 39. Өчпочмакны камаучы әйләнә 67. 40. Әйләнәгә орынма 69. 41. Өчпочмакка камаулы әйләнә 70. 42. Төзүгә мәсьәләләр нәрсә ул 71. 43. Бирелгән яклары буенча өчпочмак төзү 71. 44. Бирелгән почмакка тигез почмак төзү 72. 45. Почмакның биссектрисасын төзү 73. 46. Кисемтәне урталай бүлү 73. 47. Перпендикуляр туры төзү 74. 48. Нокталарның геометрик урыны 75. 49. Геометрик урыннар методы 76. Контроль сораулар 77. Мәсьәләләр 77.

8 НЧЕ СЫЙНЫФ

§ 6. Дүртпочмаклар

50. Дүртпочмакның билгеләмәсе 82. 51. Параллелограмм 83. 52. Параллелограмм диагональләренең үзлеге 84. 53. Параллелограммның каршы ятучы яклары һәм почмакларының үзлеге 85. 54. Турыпочмаклык 86. 55. Ромб 88. 56. Квадрат 89. 57. Фалес теоремасы 90. 58. Өчпочмакның урта сызыгы 91.

59. Трапеция 92. 60. Пропорциональ кисемтәләр турында теорема 94. 61. Дүртенче пропорциональ кисемтә төзү 96. Контроль сораулар 96. Мәсьәләләр 97.

§ 7. Пифагор теоремасы

62. Почмакның косинусы 103. 63. Пифагор теоремасы 104. 64. Мисыр өчпочмагы 105. 65. Перпендикуляр һәм авышма 106. 66. Өчпочмак тигезсезлеге 107. 67. Турыпочмаклы өчпочмакның почмаклары һәм яклары арасындагы бәйләнешләр 108. 68. Төп тригонометрик бердәйлекләр 111. 69. Кайбер почмаклар синусы, косинусы һәм тангенсының кыйммәтләре 112. 70. Почмак үскәндә синус, косинус һәм тангенсның үзгәрүе 114. Контроль сораулар 114. Мәсьәләләр 115.

§ 8. Яссылыкта Декарт координаталары

71. Декарт координаталары билгеләмәсе 121. 72. Кисемтә уртасының координаталары 124. 73. Нокталар арасындагы ераклык 125. 74. Әйләнә тигезләмәсе 126. 75. Туры тигезләмәсе 127. 76. Турылар кисешү нокталарының координаталары 128. 77. Турының координаталар системасына карата торышы 129. 78. Туры тигезләмәсендә почмакча коэффициент 130. 79. Сызыкча функциянең графигы 131. 80. Турының әйләнә белән кисешүе 132. 81. 0° тан 180° ка кадәр теләсә нинди почмакның синусын, косинусын һәм тангенсын билгеләү 134. Контроль сораулар 135. Мәсьәләләр 136.

§ 9. Хәрәкәт

82. Фигураларны үзгәртү 139. 83. Хәрәкәтнең үзлекләре 141. 84. Ноктага карата симметрия 142. 85. Турыга карата симметрия 144. 86. Бору 146. 87. Параллель күчерү һәм аның үзлекләре 147. 88. Параллель күчерүнең барлыгы һәм аның бердәнберлеге 149. 89. Ярымтурыларның бердәй юнәлешлелеге 150. 90. Фигураларның тигезлеге 151. Контроль сораулар 153. Мәсьәләләр 154

§ 10. Векторлар

91. Векторның абсолют зурлыгы һәм юнәлеше 156. 92. Векторларның тигезлеге 157. 93. Векторның координаталары 159. 94. Векторларны кушу 160. 95. Көчләрне кушу 162. 96. Векторны санга тапкырлау 163. 97. Векторны коллинеар булмаган ике векторга таркату 165. 98. Векторларның скаляр тапкырчыгышы 166. 99. Векторны координаталар күчәрләре буйлап таркату 169. Контроль сораулар 169. Мәсьәләләр 171.

9 НЧЫ СЫЙНЫФ

§ 11. Фигураларның охшашлыгы

100. Охшаш үзгәртү 175. 101. Охшаш үзгәртүнең үзлекләре 177. 102. Фигураларның охшашлыгы 178. 103. Өчпочмакларның ике почмагы буенча охшашлык билгесе 178. 104. Ике ягы һәм алар арасындагы почмаклары буенча өчпочмакларның охшашлык билгесе 180. 105. Өчпочмакларның өч ягы буенча охшашлык билгесе 181. 106. Турыпочмаклы өчпочмакларның охшашлыгы 182. 107. Әйләнәгә камаулы почмаклар 184. 108. Әйләнәдә хордалар һәм кисүчеләр кисемтәләренең пропорциональлеге 187. Контроль сораулар 188. Мәсьәләләр 189.

§ 12. Өчпочмакларны чишү

109. Косинуслар теоремасы 195. 110. Синуслар теоремасы 196. 111. Өчпочмакның почмаклары белән каршы яткан яклары арасындагы бәйләнеш 198. 112. Өчпочмакларны чишү 199. Контроль сораулар 201. Мәсьәләләр 201.

§ 13. Күппочмаклар

113. Сынык сызык 204. 114. Кабарынкы күппочмаклар 206. 115. Төзек күппочмаклар 208. 116. Төзек күппочмакларга камаулы һәм аларны камаучы әйләнәләрнең радиуслары өчен формулалар 209. 117. Кайбер төзек күппочмакларны төзү 210. 118. Кабарынкы төзек күппочмакларның охшашлыгы 212. 119. Әйләнә озынлыгы 213. 120. Почмакның радианлы үлчәме 215. Контроль сораулар 216. Мәсьәләләр 217.

§ 14. **Фигураларның мәйданнары**

121. Мәйдан төшенчәсе 220. 122. Турыпочмаклыкның мәйданы 221. 123. Параллелограмм мәйданы 223. 124. Өчпочмак мәйданы 224. 125. Өчпочмак мәйданы өчен Герон формуласы 225. 126. Трапеция мәйданы 226. 127. Өчпочмакка камаулы һәм аны камаучы әйләнәләрнең радиуслары формулалары 227. 128. Охшаш фигураларның мәйданнары 228. 129. Түгәрәк мәйданы 229. Контроль сораулар 232. Мәсьәләләр 232.

10 НЧЫ СЫЙНЫФ

СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 15. **Стереометрия аксиомалары һәм аларның иң гади нәтиҗәләре**

130. Стереометрия аксиомалары 237. 131. Бирелгән туры һәм бирелгән нокта аша үтүче яссылыкның булуы 239. 132. Турының яссылык белән кисешүе 240. 133. Бирелгән өч нокта аша үтүче яссылыкның булуы 241. 134. I аксиомага искәрмә 242. 135. Пространствоның яссылык белән ике ярымпространствога бүленүе 243. Контроль сораулар 244. Мәсьәләләр 244.

§ 16. **Туры һәм яссылыкларның параллельлеге**

136. Пространствода параллель турылар 245. 137. Турыларның параллельлек билгесе 247. 138. Туры белән яссылыкның параллельлек билгесе 248. 139. Яссылыкларның параллельлек билгесе 249. 140. Бирелгән яссылыкка параллель яссылыкның булуы 250. 141. Параллель яссылыкларның үзлекләре 251. 142. Пространство фигураларын яссылыкта сурәтләү 252. Контроль сораулар 254. Мәсьәләләр 255.

§ 17. **Турыларның һәм яссылыкларның перпендикулярлыгы**

143. Пространствода турыларның перпендикулярлыгы 260. 144. Туры белән яссылыкның перпендикулярлык билгесе 261. 145. Үзара перпендикуляр туры һәм яссылык төзү 262. 146. Перпендикуляр туры һәм яссылыкның үзлекләре 264. 147. Перпендикуляр һәм авышма 266. 148. Өч перпендикуляр турында теорема 267. 149. Яссылыкларның перпендикулярлык билгесе 268. 150. Чалышма турылар арасындагы ераклык 270. 151. Ортогональ проекцияләүне техник сызымда куллану 271. Контроль сораулар 272. Мәсьәләләр 273.

§ 18. **Пространствода Декарт координаталары һәм векторлар**

152. Пространствода Декарт координаталары кертү 279. 153. Нокталар арасындагы ераклык 281. 154. Кисемтә уртасының координаталары 282. 155. Пространствода симметрия үзгәртүе 283. 156. Табигатьтә һәм тормышта симметрия 284. 157. Пространствода хәрәкәт 284. 158. Пространствода параллель күчерү 287. 159. Пространство фигураларының охшашлыгы 289. 160. Чалышма турылар арасындагы почмак 290. 161. Туры белән яссылык арасындагы почмак 292. 162. Яссылыклар арасындагы почмак 293. 163. Күппочмакның ортогональ проекциясенең мәйданы 294. 164. Пространствода векторлар 295. 165. Пространствода векторлар өстендә гамәлләр 296. Контроль сораулар 297. Мәсьәләләр 298.

11 НЧЕ СЫЙНЫФ

§ 19. **Күпкырлыклар**

166. Икекырлы почмак 305. 167. Өчкырлы һәм күпкырлы почмаклар 306. 168. Күпкырлык 308. 169. Призма 309. 170. Призманы сурәтләү һәм аның кисемен төзү 310. 171. Туры призма 312. 172. Параллелепипед 314. 173. Параллелепипедның үзәк симметриясе 315. 174. Турыпочмаклы параллелепипед 316. 175. Турыпочмаклы параллелепипедның симметриясе 317.

176. Пирамида 317. 177. Пирамида һәм аның яссы кисемнәрен төзү 318. 178. Кисек пирамида 320. 179. Төзек пирамида 321. 180. Төзек күпкырлыклар 322. Контроль сораулар 323. Мәсьәләләр 325.

§ 20. Әйләнү җисемнәре

181. Цилиндр 332. 182. Цилиндрның яссылыклар белән кисемнәре 333. 183. Камаулы һәм камаучы призмалар 334. 184. Конус 336. 185. Конусның яссылыклар белән кисемнәре 337. 186. Камаулы һәм камаучы пирамидалар 338. 187. Шар 340. 188. Шарның яссылык белән кисеме 341. 189. Шарның симметриясе 342. 190. Шарга орынма яссылык 342. 191. Ике сфераның кисешүе 344. 192. Камаулы һәм камаучы күпкырлыклар 345. 193. Геометриядә җисем һәм аның өслеге төшенчәсе турында 346. Контроль сораулар 347. Мәсьәләләр 348.

§ 21. Күпкырлыкларның күләмнәре

194. Күләм төшенчәсе 354. 195. Турыпочмаклы параллелепипедның күләме 355. 196. Авыш параллелепипедның күләме 356. 197. Призманың күләме 358. 198. Тигез зурлыктагы җисемнәр 360. 199. Пирамиданың күләме 362. 200. Кисек пирамиданың күләме 363. 201. Охшаш җисемнәрнең күләмнәре 363. Контроль сораулар 365. Мәсьәләләр 365.

§ 22. Әйләнү җисемнәренең күләмнәре һәм өслекләре

202. Цилиндрның күләме 369. 203. Конусның күләме 370. 204. Кисек конусның күләме 371. 205. Әйләнү җисемнәренең күләмнәре өчен гомуми формула 372. 206. Шарның күләме 373. 207. Шар сегментының һәм шар секторының күләме 374. 208. Цилиндрның ян өслеге мәйданы 375. 209. Конусның ян өслеге мәйданы 375. 210. Сфераның мәйданы 376. Контроль сораулар 377. Мәсьәләләр 378. Мәсьәләләргә җаваплар һәм күрсәтмәләр 382. Атамалар күрсәткече 393.

Учебное издание

Погорелов Алексей Васильевич

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 7—11 классов средней школы

(Перевод с русского на татарский язык)

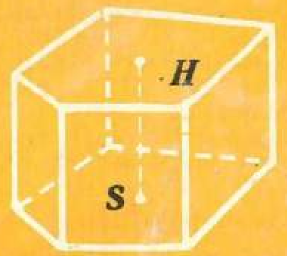
Издание десятое

ИБ № 294

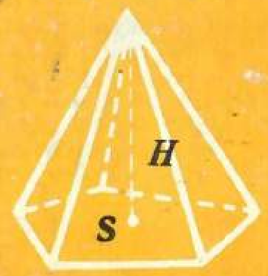
Редакция мөдире Ф. Г. Иштирәкова. Редакторлары Ф. М. Хафизова, Л. Х. Мөхәммәтҗанова. Бизәлеш редакторы Р. А. Сәйфуллина. Техник редакторы Л. И. Фокейчева. Корректоры Р. Г. Исмәгыйлева. Нәшриятка 183 нче номерлы лицензия 1997 елның 7 апрелендә бирелгән. Диапозитивлардан басарга кул куелды 8. 12. 95. Форматы 60х90 1/16. Офсет кәгазе №1. «Литературная» гарнитурасы. Офсет басма. Басма табагы 25,0 + форз. 0, 25. Нәшер-хисап табагы 21,22 + форз. 0,42. Тиражы 47 000 данә. Заказ Е-40.

«Мәгариф» нәшрияты. 420503. Казан, Бауман ур., 19. Издательство «Магариф». 420503. Казань, ул. Баумана, 19. Татарстан Республикасы Мәгълүмат һәм матбугат министрлыгының «Татполиграф» типографиясе. 420111. Казан, Миславский ур., 9.

ҖИСЕМНӘРНЕҢ КҮЛӘМНӘРЕ һӘМ ӨСЛЕКЛӘРЕ



$V = SH$



$V = \frac{1}{3}SH$

$S_{ян} = 2\pi RH$

$V = \pi R^2 H$

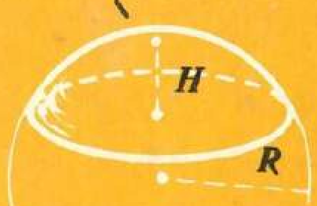
$S_{ян} = \pi Rl$

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

$S = 4\pi R^2$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$S = 2\pi RH$



$V = \pi H^2 (R - \frac{H}{3})$

ЛАТИН АЛФАВИТЫ

БАСМА ХӘРЕФЛӘР	ЯЗМА ХӘРЕФЛӘР	ХӘРЕФЛӘРНЕҢ ИСЕМНӘРЕ	БАСМА ХӘРЕФЛӘР	ЯЗМА ХӘРЕФЛӘР	ХӘРЕФЛӘРНЕҢ ИСЕМНӘРЕ
Aa	Aa	а	Nn	Nn	эн
Bb	Bb	бэ	Oo	Oo	о
Cc	Cc	цэ	Pp	Pp	пэ
Dd	Dd	дэ	Qq	Qq	ку
Ee	Ee	э	Rr	Rr	эр
Ff	Ff	эф	Ss	Ss	эс
Gg	Gg	же	Tt	Tt	тэ
Hh	Hh	аш	Uu	Uu	у
Ii	Ii	и	Vv	Vv	вэ
Jj	Jj	йот (жи)	Ww	Ww	дубль-вэ
Kk	Kk	ка	Xx	Xx	икс
Ll	Ll	эль	Yy	Yy	игрек
Mm	Mm	эм	Zz	Zz	зэт

ГРЕК АЛФАВИТЫНЫҢ КАЙБЕР ХӘРЕФЛӘРЕ

хәрефләр	α	β	γ	δ	λ	μ
исемнәре	альфа	бета	гамма	дельта	ламбда	мю

хәрефләр	π	ρ	τ	φ	ψ	ω
исемнәре	пи	ро	тау	фи	пси	омега